ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+553. Да се определят всички цели числа x, при които изразът $\dfrac{x^3-1}{7x-1}$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+554. Нека $y=\cos^4 x-\cos 2x+\sin x-2\sin^3 x-2$. За кои стойности на реалните числа a и b е изпълнено условието $y\in[a,b]$ за всички реални стойности на x.

(Росен Николаев, гр. Варна)

М+555. Ако p е естествено число, да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{pn}\sqrt{1+k^2}\sin\left(\operatorname{arctg}k-\operatorname{arctg}n\right)$.

(Теодора Радулеску и Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

М+556. В трапец $ABCD$ ($AB\,||\,CD$) диагоналите AC и BD се пресичат в точка O, а лицата на триъгълниците ABO, CDO и BCO са съответно a, b и c. Ако е изпълнено равенството $c=a-6b$, да се намери отношението на голямата основа към малката.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+557. Точките M, N и P лежат съответно върху страните BC, CA и AB на ΔABC така, че $\sphericalangle ANP=\sphericalangle BMP=\sphericalangle MPN$.

а) Ако $CP\cap MN=Q$, да се намери геометричното място на точката Q, когато P описва страната AB.

б) Да се определи положението на точката P, при което $MN\perp CP$. Да се докаже, че при това положение на P периметърът на четириъгълника $CMPN$ е по-голям от удвоения диаметър на вписаната в ΔABC окръжност.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+558. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABD=90^\circ$ и $AC.BD=AD.BC$. Точката P лежи върху правата AD така, че D е между A и P и $\sphericalangle DCP=90^\circ$. Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците ABC и DCP са допирателни.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 15.04.2017 г.