ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+559. Ако $x, y, z \in \mathbb{R}$, да се реши уравнението

$$5x^2+6y^2+z^2-2zy-6x+12y+9=0.$$

(Росен Николаев и Йордан Петков, гр. Варна)

М+560. Нека

$N=2000^{2000}+2001^{2001}+2002^{2002}+\cdots+2014^{2014}+2015^{2015}+2016^{2016}$.

Всеки член на редицата N, N_1, N_2, ..., N_k е сума от цифрите на предишния член. Ако k е най-малкото число, при което N_k е едноцифрено число, да се намерят k и N_k.

(Сава Гроздев, гр. София и Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+561. Ако α_1, α_2 и α_3 са ъглите на триъгълник $A_1A_2A_3$, да се докаже неравенството:

$$3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)+2\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)\geq$$

$$\geq\left(\sum_{i=1}^{3}\sin^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\right)^2+3\left(\sum_{i=1}^{3}\sin\alpha_i\cos\alpha_i\right)^2.$$

В кои случаи се достига равенство?

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

М+562. В окръжност с диаметър d са построени n успоредни хорди A_kB_k $(k=1,2,\ldots,n)$, които пресичат диаметър PQ съответно в точките M_k $(k=1,2,\ldots,n)$. Ако диаметърът PQ е такъв, че са изпълнени равенствата $A_kM_k^2+B_kM_k^2=S$ $(k=1,2,\ldots,n)$, да се намерят всички цели стойности на n и d, при които $n.S=2016$.

(Милен Найденов, гр. Варна)

М+563. Точката P лежи върху страната AB на остроъгълния триъгълник ABC, а M и N са петите на перпендикулярите, спуснати от P, съответно към BC и AC. Да се определи положението на P, когато:

а) MN има най-малка дължина;
б) лицето на ΔMNP е най-голямо;
в) сборът от квадратите на MP и NP е най-малък.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+564. Точките O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник ABC. Ако M и N са точки съответно от страните AC и BC, така че $\sphericalangle MHN=\sphericalangle ACB$, да се докаже, че ортогоналните проекции на O и H върху правата MN лежат върху Ойлеровата окръжност на ΔABC и е изпълнено равенството $\sphericalangle MON=180^\circ-2\sphericalangle ACB$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 30.04.2017 г.