СЪСТЕЗАНИЯ + СЪСТЕЗАТЕЛИ

МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО ФИНАНСОВА МАТЕМАТИКА

ВУЗФ-София, ИУ-Варна, САФУ-Архангелск

проф. Мария Шабанова, доц. Росен Николаев, проф. Сава Гроздев

Задача 1. Цена данного товара снизилась в сентябре на 17% по сравнению с августом и на 6% в октябре по сравнению с сентябрем. Определите процент снижения цены товара в октябре по сравнению с августом.

A) 23% B) 102% C) 0,23% D) 11% E) 21,98%

Решение. Пусть цена товара в августе *K*. Тогда ее цена в сентябре равна $K-\dfrac{17K}{100}=0,83K$, а в октябре - $0,83K-\dfrac{6.0,83K}{100}=0,7802K$. Изменение цены в октябре по сравнению с августом равно $\dfrac{0,7802K-K}{K}=-0,2198$, то есть цена снизилась на 21,98%.

Задача 2. Определите индекс инфляции в 2015 г. по сравнению с 2014 г., если известны цены и потребление 10 видов товаров (таблица 1).

Таблица 1

Товар	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Потребление 2014 г.	60	240	100	120	300	40	160	800	210	420
Цена 2014 г.	6	0,9	4,5	8	3,5	12	2,1	0,5	8	4,2
Цена 2015 г.	6,2	1,1	4,3	7	4	15	2	0,8	9	5

A) 0,89 B) 11,2% C) 1,12 D) 12,47% E) 1,5

Решение. Пусть $p_i^{(2014)}$, $i=1,2,...,15$ - цены товаров в 2014 г., $p_i^{(2015)}$, $i=1,2,...,10$ - цены товаров в 2015 г., а $q_i^{(2014)}$, $i=1,2,...,10$ - потребленные количества товаров в 2014 г. Индекс инфляции равен

$$I_{2015/2014}=\frac{p_1^{(2015)}.q_1^{(2014)}+p_2^{(2015)}.q_2^{(2014)}+...+p_{10}^{(2015)}.q_{10}^{(2014)}}{p_1^{(2014)}.q_1^{(2014)}+p_2^{(2014)}.q_2^{(2014)}+...+p_{10}^{(2014)}.q_{10}^{(2014)}}=\frac{8656}{7696}=1,12.$$

Задача 3. Найдите максимальную сумму (до второго знака после запятой), которую инвестор готов вкладывать в проект, если этот проект генерирует будущие доходы, соответственно 10000 евро в первом году и 200000 во втором году и инвестор желает минимальную доходность 6,25%.

A) 200000 B) 150000 C) 10000

D) 186574,39 E) 190000.

Решение. Инвестиция является приемлемой, если чистая приведённая стоимость $NPV=\frac{10000}{1+r}+\frac{210000}{(1+r)^2}-I\geq 0$, где r – желаемый уровень доходности, I – размер инвестиции. Ищем максимальное значение I_0, для которого выполнено $\frac{10000}{1+r}+\frac{210000}{(1+r)^2}\geq I$ для $r\geq 0,625$. Функция $f(r)=\frac{10000}{1+r}+\frac{210000}{(1+r)^2}$ монотонно убывающая для каждого $r\geq 0,625$ (так как $f'(r)\geq 0$ для каждого $r\geq 0$). Тогда $I_0=\max\limits_{r\geq 0} f(r)=f(0,625)=186574,39$.

Задача 4. Пусть сумма 10000 евро ставится на срочный одномесячный депозит при p% сложной ставке. В конце первого месяца к накопленной сумме добавляются 5000 евро и они ставятся на тот же самой депозит. В конце второго месяца к накопленной сумме добавляются 2500 евро и они ставятся на тот же самой депозит. Какой минимальный процент p гарантирует, что в конце третьего месяца накопленная сумма будет не менее 20000 евро.

A) 2% B) 3% C) 4% D) 5% E) 6%

Решение. $K_1=10000.\left(1+\frac{p}{100}\right)=10000q$, $K_2=(K_1+5000).q=10000q^2+5000q$, $K_3=(K_2+2500).q=10000q^3+5000q^2+2500q$.

Необходимо, что $f(q) = 10000q^3 + 5000q^2 + 2500q \geq 20000$

Если $p = 2\%$, то $q = 1,02$ и $f(q) = 18364,08 < 20000$.

Если $p = 3\%$, то $q = 1,03$ и $f(q) = 18806,77 < 20000$.

Если $p = 4\%$, то $q = 1,04$ и $f(q) = 19256,64 < 20000$.

Если $p = 5\%$, то $q = 1,05$ и $f(q) = 19713,75 < 20000$.

Если $p = 6\%$, то $q = 1,06$ и $f(q) = 20178,16 > 20000$.

адача 5. Сумма из K евро положена в банк при сложной ставке 5%. В конце каждого года $n = 1,2,3,...$ выплачивают 1000 евро. Найти минимальную сумму *K*, чтобы процесс был бесконечным.

A) 100000 евро B) 10000 евро C) 1500 евро

D) 20000 евро E) 50000 евро

Решение. Начальная сумма *K* должна быть не менее чем настоящей стоимости всех будущих доходов (до бесконечности) при дисконтной ставке 5%:

$$K \geq PV = \frac{1000}{1+\frac{5}{100}} + \frac{1000}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^2} + \frac{1000}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^3} + ... + \frac{1000}{\left(1+\frac{5}{100}\right)^n} + ... =$$

$$= 1000\left(\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05^2} + \frac{1}{1,05^3} + ... + \frac{1}{1,05^n} + ...\right).$$

Так как $\frac{1}{1,05} < 1$, то $PV = 1000.\frac{\frac{1}{1,05}}{1-\frac{1}{1,05}} = \frac{1000}{0,05} = 20000$. Следовательно $K \geq 20000$ евро.

Задача 6. Инвестор имеет возможность инвестировать 100000 евро в двух типов активов – A и B. Ожидаемые годовые доходности соответственно $M(r_A) = 6\%$ и $M(r_B) = 8\%$, а квадратические отклонения от ожидаемых доходностей соответственно $\sigma_A = 2$ и $\sigma_B = 2,5$. Коэффициент корреляции $\rho_{AB} = 0,3$. Какую сумму должен инвестор вкладывать в A и B, чтобы общая дисперсия доходности будет минимальной?

Решение. Пусть инвестированный капитал равен 1, *x* – часть, инвестирована в A и (1-*x*) – часть, инвестирована в B, $x \in [0,1]$. Портфель из двух активов *p* имеет характеристики:

$r_p = xr_A + (1-x)r_B$ (доходность портфеля);

$M(r_p) = M(xr_A + (1-x)r_B) = xM(r_A) + (1-x)M(r_B)$ (ожидаемая доходность портфеля), которое следует из свойств математического ожидания. Согласно дефиниции дисперсии:

$$\sigma_p^2 = M\left(r_p - M(r_p)\right)^2 = M(r_p^2) - M^2(r_p) =$$
$$= M\left(xr_A + (1-x)r_B\right)^2 - \left(xM(r_A) + (1-x)M(r_B)\right)^2 =$$
$$= M\left(x^2 r_A^2 + (1-x)^2 r_B^2 + 2x(1-x)r_A r_B\right) - x^2 M^2(r_A) - (1-x)^2 M^2(r_B) - 2x(1-x)M(r_A)M(r_B) =$$
$$= x^2\left[M(r_A^2) - M^2(r_A)\right] + (1-x)^2\left[M(r_B^2) - M^2(r_B)\right] + 2x(1-x)\underbrace{\left[M(r_A r_B) - M(r_A)M(r_B)\right]}_{\mathrm{cov}(r_A, r_B) = \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}} =$$
$$= x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}.$$

То есть

$$\sigma_p^2 = 4x^2 + 6,25(1-x)^2 + 2x(1-x).2.2,5.0,3 = 7,25x^2 - 9,5x + 6,25 \to \min_{x\in[0,1]}.$$

$(\sigma_p^2)' = 14,5x - 9,5x = 0 \Rightarrow x = 0,65517 \in [0,1]$ и $(\sigma_p^2)'' = 14,5 > 0$, следовательно $\min\limits_{x\in[0,1]} \sigma_p^2 = \sigma_p^2(0,65517)$.

Инвестор должен вкладывать $x.100000 = 65517$ евро в А и $(1-x).100000 = 34483$ евро в В.

Задача 7. Известны функциональные зависимости ежемесячной прибыли Π_1 и Π_2 двух конкурирующих компаний в зависимости от значений p_1, p_2 и p_3 трех факторов:

$$\Pi_1(p_1, p_2, p_3) = -2p_1^2 + 3p_2^2 + 4p_3^2 - 5p_1p_2 + 5p_1p_3 - 15p_1 + 16p_2 - 24p_3 + 36;$$
$$\Pi_2(p_1, p_2, p_3) = -4p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 + p_1p_3 + 4p_2p_3 - 3p_1 + 4p_2.$$

Если $p_1 = p$ $(const)$ и $\Pi_1 = \Pi_2$, то $p_1 + p_2 + p_3$ =?

Решение.

$$\Pi_1 - \Pi_2 = 2p_1^2 + 2p_2^2 + 4p_3^2 - 4p_1p_2 + 4p_1p_3 - 4p_2p_3 + 12p_1 + 12p_2 - 24p_3 + 36 = 0 \ |:2,$$
$$p_1^2 + p_2^2 + 2p_3^2 - 2p_1p_2 + 2p_1p_3 - 2p_2p_3 + 6p_1 + 6p_2 - 12p_3 + 18 = 0,$$
$$(p_1 - p_2 + p_3 - 3)^2 + (p_3 - 3)^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_1 - p_2 + p_3 - 3 = 0 \\ p_3 - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_1 = p_2 = p \\ p_3 = 3 \end{array} \right. .$$

Тогда $p_1 + p_2 + p_3 = 2p + 3$.