ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие. Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+565. Да се намерят всички двойки (x, y) от естествени числа x и y, за които

$$\left|x^2+y^2+2x-4y+5\right|+\left|x^2+y^2-2x+4y-5\right|=\left|4x-8y+10\right|.$$

(Тодор Митев, гр. Русе)

М+566. В редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общ член $x_n = n.a^n - 2016$ цялото число a не се дели на 2017. Докажете, че редицата съдържа безбройно много членове, които се делят на 2017.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

М+567. Реалните параметри p, q, a и b във функциите $f(x)=x^3+px+q$ и $g(x)=x^2+ax+b$ са свързани с равенството $a+b=p+q$. Ако графиките на $f(x)$ и $g(x)$ се допират в точка T, да се намери стойността на абсцисата x_T на точката T.

(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

М+568. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени $\sphericalangle ADB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BDC = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$. Ако центровете на Ойлеровата и вписаната окръжности на ΔABC са съответно O и I, а r е радиусът на вписаната за ΔABC окръжност, да се докаже, че: а) $DI = 2r$; б) точките O, I и D лежат на една права.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

М+569. Даден е ΔABC. Точките A_1, B_1 и C_1 лежат съответно върху правите BC, CA и AB, така че са изпълнени равенствата $\overline{BA_1}:\overline{CA_1}=\overline{CB_1}:\overline{AB_1}=\overline{AC_1}:\overline{BC_1}=\lambda$ $(\lambda \neq \pm 1)$. Нека $A_0 = BB_1 \cap CC_1$, $B_0 = CC_1 \cap AA_1$ и $C_0 = AA_1 \cap BB_1$. Ако точките A_0', B_0' и C_0' са изогонално спрегнатите съответно на A_0, B_0 и C_0 спрямо ΔABC, да се докаже, че точките A_0, B_0, C_0, A_0', B_0' и C_0' лежат на крива от втора степен.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+570. Ръбът на правилен тетраедър $ABCD$ има дължина a, а точката M лежи върху вписаната в $ABCD$ сфера. Да се намерят целите стойности на a, при които изразът $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ приема цели стойности.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 15.06.2017 г.