

## МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА' 2017

Д-р М. Плюс

Поредната 58. международна олимпиада по математика се проведе в Рио де Жанейро, Бразилия от 12 до 23 юли 2017 г. В нея взеха участие 615 ученици (553 момчета и 62 момичета) от рекордните 111 държави (досегашният рекорд беше 109 държави през миналата година на олимпиадата в Хонг Конг). Както обикновено, регламентът предвиждаше приблизително половината състезатели да получат медали, като златните, сребърните и бронзовите да са (също приблизително) в отношение 1:2:3. Журито на олимпиадата в Бразилия разпредели общо 291 медала, от които 48 златни с долна граница 25 точки вкл., 90 сребърни с граници от 19 до 24 точки вкл. и 153 бронзови с граници от 16 до 18 точки вкл. Българският отбор заслужи 4 сребърни и 2 бронзови медала, което е в рамките на незадоволителните представяния през последните 10 години. Той беше в състав: Иван Ганев (от Американски колеж с учител д-р Борислава Кирилова), Виолета Найденова (от СМГ "П. Хилендарски" с учител Стойчо Стоев), Константин Гаров (от ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас с учител Магдалена Янева), Кирил Бангачев (от СМГ "П. Хилендарски" с учител Румяна Караджова), Атанас Динев (от ПМГ „Н. Обрешков“, Бургас с учител Динко Раднев) и Христо Папазов (от Американски колеж с учител Десислава Йорданова). В отборното класиране по точки делим 18–21. място (миналата година 22–26. място) с Италия, Холандия и Сърбия, а по медали делим 25–26. място със Сърбия. Спечелените общо 116 точки характеризират един от най-слабите точкови резултати на българския отбор за всички негови участия в международни олимпиади. Дъното е през 2015 г. – 100 точки и през 2013 г. – 101 точки при същото "научно" ръководство на лаборантите от Лабораторията на Пазарджишкия доносник.

Победители в тазгодишната олимпиада са трима ученици, постигнали по 35 точки от максималните 42 – по един от Иран, Япония и Виетнам (и тримата с 0 точки на трета задача). По-долу са резултатите на нашите състезатели, както и класирането по държави.



58<sup>th</sup> International Mathematical Olympiad

## **58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2017 Г.**

### **КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ НА БЪЛГАРСКИТЕ УЧЕНИЦИ**

Име	Място по точки	1 зад.	2 зад.	3 зад.	4 зад.	5 зад.	6 зад.	Общо точки	Медал
Иван Ганев	64–71	7	7	0	7	0	2	23	сребърен
Виолета Найденова	82–102	7	7	0	7	0	0	21	сребърен
Константин Гаров	115–138	5	7	0	7	0	0	19	сребърен
Кирил Бангачев	115–138	7	4	0	7	1	0	19	сребърен
Атанас Динев	188–264	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
Христо Папазов	188–264	7	3	0	7	0	0	17	бронзов
ОБЩО	18–21	40	31	0	42	1	2	116	

## **58. МЕЖДУНАРОДНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – 2017 Г.**

### **КЛАСИРАНЕ И РЕЗУЛТАТИ ПО ДЪРЖАВИ**

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Южна Корея	6	42	39	1	42	22	24	170	1	6	0	0
Китай	6	42	25	0	42	19	31	159	2	5	1	0
Виетнам	6	42	36	0	42	21	14	155	3	4	1	1
САЩ	6	42	29	0	42	23	12	148	4	3	3	0
Иран	6	42	32	0	42	17	9	142	5	2	3	1
Япония	6	41	21	0	42	23	7	134	6	2	2	2
Сингапур	6	42	26	0	37	22	4	131	7-8	2	1	2
Тайланд	6	41	30	0	42	17	1	131	7-8	3	0	2
Тайван	6	40	31	0	42	7	10	130	9-10	1	4	1
Великобритания	6	42	17	5	42	8	16	130	9-10	3	0	2
Русия	6	42	26	7	37	8	8	128	11	1	3	2
Грузия	6	42	22	0	42	18	3	127	12-13	1	2	3
Гърция	6	42	33	0	42	9	1	127	12-13	1	4	1
Беларус	6	40	23	1	42	16	0	122	14-16	1	1	4

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Чехия	6	42	26	4	34	16	0	122	14-16	1	2	2
Украйна	6	42	30	0	36	10	4	122	14-16	1	2	2
Филипини	6	42	25	0	42	11	0	120	17	0	3	3
<b>България</b>	<b>6</b>	<b>40</b>	<b>31</b>	<b>0</b>	<b>42</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>116</b>	<b>18-21</b>	<b>0</b>	<b>4</b>	<b>2</b>
Италия	6	42	22	0	34	18	0	116	18-21	2	1	1
Холандия	6	41	21	0	39	15	0	116	18-21	1	2	1
Сърбия	6	40	30	0	42	4	0	116	18-21	0	4	2
Унгария	6	40	22	0	34	16	3	115	22-24	2	1	1
Полша	6	39	23	0	42	9	2	115	22-24	1	0	5
Румъния	6	42	17	0	42	9	5	115	22-24	0	3	2
Казахстан	6	40	18	0	35	15	5	113	25	1	2	1
Аржентина	6	40	20	0	42	9	0	111	26-28	1	2	1
Бангладеш	6	42	17	0	42	10	0	111	26-28	0	2	2
Хонг Конг	6	42	20	0	23	26	0	111	26-28	1	1	3
Канада	6	42	22	0	37	1	8	110	29	1	2	2
Перу	6	38	27	0	42	1	1	109	30	0	2	3
Индонезия	6	40	22	0	42	4	0	108	31	0	2	3
Израел	6	40	33	0	30	1	3	107	32	0	3	2
Германия	6	41	16	0	34	15	0	106	33	0	1	3
Австралия	6	42	10	8	31	11	1	103	34	0	3	2
Хърватия	6	38	25	0	37	2	0	102	35-36	0	2	3
Турция	6	40	15	0	42	4	1	102	35-36	0	1	3
Бразилия	6	40	17	0	37	6	1	101	37-38	0	2	1
Малайзия	6	40	17	0	42	2	0	101	37-38	0	2	2
Франция	6	41	11	0	32	16	0	100	39-40	0	2	2
Саудитска Арабия	6	40	17	0	36	7	0	100	39-40	0	2	2
Армения	6	41	18	0	38	2	0	99	41	0	2	2
Азербайджан	6	37	19	0	42	0	0	98	42	0	0	4
Мексико	6	42	13	0	39	2	0	96	43	0	1	2
Босна и Херцеговина	6	41	15	0	39	0	0	95	44-45	0	0	4
Таджикистан	6	40	13	0	42	0	0	95	44-45	0	0	3

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Макао	6	39	10	0	36	9	0	94	46-47	1	0	0
Нова Зеландия	6	42	8	0	42	2	0	94	46-47	0	0	3
Кипър	6	42	15	0	36	0	0	93	48-50	0	0	5
Монголия	6	37	12	0	42	1	1	93	48-50	0	1	2
Туркменистан	6	40	11	0	42	0	0	93	48-50	0	0	2
Швеция	6	42	13	0	27	8	1	91	51	0	1	2
Индия	6	42	18	0	30	0	0	90	52-53	0	0	3
Словения	6	42	16	0	32	0	0	90	52-53	0	0	2
Португалия	6	39	19	0	28	3	0	89	54	0	0	2
Испания	6	41	20	0	25	0	0	86	55	0	0	3
Сирия	6	33	10	0	42	0	0	85	56	0	1	0
Латвия	6	39	8	0	24	13	0	84	57	0	0	3
Молдова	6	38	11	0	27	7	0	83	58-59	0	1	0
Швейцария	6	42	9	0	22	10	0	83	58-59	0	0	1
Колумбия	6	41	2	0	35	3	0	81	60-61	0	0	1
Южна Африка	6	41	7	0	27	6	0	81	60-61	0	0	2
Белгия	6	39	14	0	23	3	1	80	62-64	0	1	2
Ирландия	6	36	8	0	34	2	0	80	62-64	0	0	2
Шри Ланка	6	42	8	0	30	0	0	80	62-64	0	0	3
Дания	6	41	5	0	27	4	0	77	65-66	0	0	1
Македония	6	35	6	0	36	0	0	77	65-66	0	0	1
Киргизстан	6	34	4	0	35	2	0	75	67-69	0	0	2
Мароко	6	37	13	0	25	0	0	75	67-69	0	0	1
Словакия	6	40	4	0	26	5	0	75	67-69	0	0	1
Австрия	6	40	5	0	15	14	0	74	70	0	2	0
Естония	6	40	14	0	16	2	0	72	71	0	1	0
Норвегия	6	38	11	0	17	5	0	71	72	0	0	2
Алжир	6	28	11	0	31	0	0	70	73	0	0	1
Литва	6	41	7	0	20	1	0	69	74-75	0	0	2
Узбекистан	5	16	18	0	35	0	0	69	74-75	0	1	0
Албания	6	41	4	0	22	0	0	67	76-77	0	0	1

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Чили	6	36	5	0	26	0	0	67	76-77	0	0	1
Еквадор	6	38	6	0	20	2	0	66	78	0	0	1
Тунис	5	28	3	0	28	0	0	59	79-80	0	0	1
Венецуела	5	29	4	0	24	2	0	59	79-80	0	0	2
Коста Рика	6	34	1	0	23	0	0	58	81-82	0	0	0
Пакистан	6	23	6	0	29	0	0	58	81-82	0	0	1
Ел Салвадор	4	25	5	0	25	2	0	57	83	0	0	1
Финландия	6	40	4	0	10	1	1	56	84	0	0	0
Косово	5	29	1	0	22	2	1	55	85-86	0	0	1
Пуерто Рико	5	33	3	0	19	0	0	55	85-86	0	0	0
Нигерия	4	21	5	0	25	0	0	51	87	0	0	0
Парагвай	6	35	1	0	12	0	0	48	88	0	0	0
Исландия	6	31	5	0	9	0	0	45	89-90	0	0	0
Люксембург	6	27	1	0	15	2	0	45	89-90	0	0	1
Никарагуа	4	17	4	0	22	1	0	44	91	0	0	1
Уругвай	6	37	0	0	6	0	0	43	92	0	0	0
Черна Гора	4	21	4	0	10	7	0	42	93	0	0	1
Боливия	6	24	0	0	17	0	0	41	94	0	0	0
Лихтенщайн	3	19	0	0	3	0	0	22	95-96	0	0	0
Уганда	6	6	5	0	11	0	0	22	95-96	0	0	0
Гватемала	4	12	0	0	6	2	0	20	97	0	0	0
Боствана	6	8	1	0	10	0	0	19	98	0	0	0
Мианмар	6	2	2	0	11	0	0	15	99-101	0	0	0
Панама	1	7	3	0	5	0	0	15	99-101	0	0	0
Тринидад и Тобаго	1	7	1	0	7	0	0	15	99-101	0	0	0
Куба	1	5	1	0	7	0	0	13	102-103	0	0	0
Ирак	4	11	0	0	2	0	0	13	102-103	0	0	0
Хондурас	2	6	0	0	6	0	0	12	104	0	0	0
Камбоджа	6	1	0	0	10	0	0	11	105-106	0	0	0
Кот д'Ивоар	6	2	2	0	7	0	0	11	105-106	0	0	0
Кения	6	3	0	0	3	2	0	8	107	0	0	0

Държава	бр. уч.	зад. 1	зад. 2	зад. 3	зад. 4	зад. 5	зад. 6	общо	място	зл.	ср.	бр.
Гана	1	5	0	0	1	0	0	6	108	0	0	0
Танзания	2	4	0	0	1	0	0	5	109	0	0	0
Египет	3	2	0	0	1	0	0	3	110-111	0	0	0
Непал	6	0	1	0	2	0	0	3	110-111	0	0	0

Ето задачите от 58-ата международна олимпиада по математика:

Вторник, 18 юли 2017 г.

**Задача 1.** За всяко естествено число  $a_0 > 1$  е дефинирана редицата  $a_0, a_1, a_2, \dots$  по следния начин:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{ако } \sqrt{a_n} \text{ е цяло число} \\ a_n + 3 & \text{в противен случай} \end{cases}, \text{ където } n \geq 0 \text{ е цяло число.}$$

Да се намерят всички стойности на  $a_0$ , за които съществува такова число  $A$ , че  $a_n = A$  за безброй много стойности на  $n$ .

*(предложена от Стефан Вагнер, Южна Африка)*

**Задача 2.** Нека  $\mathbb{R}$  е множеството на реалните числа. Да се намерят всички функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , за които  $f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy)$  за всеки две реални числа  $x$  и  $y$ .

*(предложена от Дорлир Ахмети, Албания)*

**Задача 3.** Ловец и невидим заек играят следната игра в равнината. Началните точки  $A_0$  и  $B_0$ , съответно на заека и ловеца, съвпадат. Нека след  $n$  хода на играта заекът и ловецът се намират съответно в точките  $A_n$  и  $B_n$ . По време на  $(n+1)$ -ия ход се изпълняват последователно следните три условия:

(i) Заекът, оставайки невидим, се придвижва до точка  $A_{n+1}$ , разстоянието от която до  $A_n$  е точно 1.

(ii) Проследяващо устройство докладва на ловеца някаква точка  $P_{n+1}$ , за която гарантира, че е на разстояние най-много 1 от  $A_{n+1}$ .

(iii) Оставайки видим, ловецът се придвижва до точка  $B_{n+1}$ , разстоянието от която до  $B_n$  е точно 1.

Винаги ли е възможно ловецът, независимо как се движи заекът и независимо какви точки докладва проследяващото устройство, да избере своите ходове така, че да е сигурен, че след  $10^9$  хода разстоянието между него и заека да е най-много 100?

*(предложена от Герхард Воегингер, Австрия)*

*Време за работа: 4 часа и 30 минути  
Всяка задача се оценява със 7 точки*

Сряда, 19 юли 2017 г.

**Задача 4.** Нека  $R$  и  $S$  са различни точки от окръжност  $\Omega$ , като отсечката  $RS$  не е диаметър. Нека правата  $l$  се допира до  $\Omega$  в точка  $R$ , а  $T$  е такава точка, че  $S$  е средата на отсечката  $TR$ . Точката  $J$  е избрана върху малката дъга  $\widehat{RS}$  на  $\Omega$  така, че описаната окръжност  $\Gamma$  около  $\Delta JST$  пресича  $l$  в две различни точки, по-близката от които до  $R$  е означена с  $A$ . Ако  $K$  е втората обща точка на правата  $AJ$  и окръжността  $\Omega$ , да се докаже, че правата  $KT$  се допира до  $\Omega$ .

*(предложена от Чарлз Лейтем, Люксембург)*

**Задача 5.** Група от  $N(N+1)$ ,  $N \geq 2$ , футболни играчи, никои двама от които не са еднакво високи, е подредена в редица. Сър Алекс иска да извади от редицата  $N(N-1)$  играчи така, че за оставащите  $2N$  играчи да са изпълнени следните  $N$  условия:

- (1) няма играч между двамата най-високи;
- (2) няма играч между третия и четвъртия по височина;

.....

- ( $N$ ) няма играч между двамата най-ниски.

Да се докаже, че това е винаги възможно.

*(предложена от Григорий Челноков, Русия)*

**Задача 6.** Наредената двойка от цели числа  $(x, y)$  е *примитивна*, ако най-големият общо делител на  $x$  и  $y$  е равен на 1. Дадено е крайно множество  $S$  от примитивни двойки. Да се докаже, че съществуват естествено число  $n$  и цели числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$  така, че за всяка двойка  $(x, y)$  от  $S$  е изпълнено:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

*(предложена от Джон Берман, САЩ)*

*Време за работа: 4 часа и 30 минути*

*Всяка задача се оценява със 7 точки*

### **Решение на задача 1.**

Случай 1.  $a_0 \equiv 0 \pmod{3}$

Ще докажем, че ако  $k$  е произволно естествено число, то  $a_0 = 3k$  е решение на задачата. Ще използваме индукция по  $k$ . Ако  $k=1$ , то  $a_0 = 3$  и следващите членове на редицата са 6, 9, 3, 6, 9, ... т.е. редицата е периодична с период 3. Следователно  $a_0 = 3$  е решение на задачата. Забелязваме, че ако  $k=1$ , то всяко  $a_0 \leq (3 \cdot 1)^2 = 9$ , което се дели на 3, е решение на задачата. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое  $k$ , т.е. всяко  $a_0 \leq (3 \cdot k)^2$ , което се дели на 3, е решение на задачата. Ще докажем, че твърдението е вярно за  $k+1$ , т.е. всяко  $a_0 \leq (3 \cdot (k+1))^2$ , което се дели на 3, е също решение на задачата. Нека  $a_0$  се дели на 3 и  $(3 \cdot k)^2 \leq a_0 \leq (3 \cdot (k+1))^2$ . Ако  $a_0 < (3 \cdot (k+1))^2$ , прибавяме последователно тройки към  $a_0$ , докато стигнем до  $(3 \cdot (k+1))^2$  и съгласно условието получаваме  $3 \cdot (k+1)$  като член на редицата. Единственото, което трябва да проверим, е, че  $3 \cdot (k+1) < (3 \cdot k)^2$ , за да приложим

индуктивното предположение. Последното е еквивалентно с  $k+1 < 3k^2$ , за което лесно се проверява, че е изпълнено при  $k > 1$ .

Случай 2.  $a_0 \equiv 2 \pmod{3}$

Този случай не води до решение, защото точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 3. Това означава, че всеки член на редицата се получава от предходния с прибавяне на 3 и следователно редицата е строго монотонно растяща.

Случай 3.  $a_0 \equiv 1 \pmod{3}$

Ще докажем, че ако  $k$  е произволно естествено число, то  $a_0 = 3k+1$  не е решение на задачата. Ще използваме индукция по  $k$ . Ако  $k=1$ , то  $a_0 = 4$  и следващият член на редицата е 2, което води до случай 2. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое  $k$ , т.е. всяко  $a_0 \leq (3k+1)^2$ , което дава остатък 1 при деление на 3, води до член на редицата  $a_n$ , който дава остатък 2 при деление на 3. Ще докажем, че твърдението е вярно за  $k+1$ , т.е. всяко  $a_0 \leq (3(k+1)+1)^2 = (3k+4)^2$ , което дава остатък 1 при деление на 3, води до член на редицата  $a_n$ , който дава остатък 2 при деление на 3. Нека  $a_0$  дава остатък 1 при деление на 3 и  $(3k+1)^2 \leq a_0 \leq (3k+4)^2$ . Ако  $a_0 < (3k+4)^2$ , прибавяме последователно тройки към  $a_0$ , докато стигнем до  $(3k+4)^2$  и съгласно условието получаваме  $3k+4$  като член на редицата. Единственото, което трябва да проверим, е, че  $3k+4 < (3k+1)^2$ , за да приложим индуктивното предположение. Последното е еквивалентно с  $3k^2 + k - 1 > 0$ , за което (както и в случай 1) лесно се проверява, че е изпълнено при  $k > 1$ .

Окончателно, решенията на задачата са всички  $a_0$ , които се делят на 3.

## **Решение на задача 2.**

Случай 1.  $f(0) = 0$

Като положим  $y=0$ , получаваме  $f(f(x)f(0)) + f(x+0) = f(0)$  и следователно  $f(0) + f(x) = f(0)$ , т.е.  $f(x) = 0$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Обратно, директно се проверява, че функцията  $f(x) = 0$  е решение на задачата.

Случай 2.  $f(0) \neq 0$

Като положим  $x = y = 0$ , получаваме  $f(f(0)f(0)) + f(0) = f(0)$ , откъдето  $f(f^2(0)) = 0$ . Сега ще намерим корените на уравнението  $f(x) = 0$ . Ще покажем, че  $f(1) = 0$ . Да допуснем противното, т.е.  $f(1) \neq 0$  и нека  $c \neq 1$  е корен, т.е.  $f(c) = 0$ . Като положим

$x = \frac{c}{c-1}$  и  $y = c$ , получаваме  $f\left(f\left(\frac{c}{c-1}\right)f(c)\right) + f\left(\frac{c}{c-1} + c\right) = f\left(\frac{c}{c-1} \cdot c\right)$ , откъдето

$f\left(f\left(\frac{c}{c-1}\right) \cdot 0\right) + f\left(\frac{c^2}{c-1}\right) = f\left(\frac{c^2}{c-1}\right)$  и следователно  $f(0) = 0$ , което е противоречие с

разглеждания случай 2. Заключаваме, че наистина  $f(1) = 0$ . Нещо повече, от доказаното следва, че  $x=1$  е единственият корен на уравнението  $f(x) = 0$ . Но по-горе показахме, че  $f(f^2(0)) = 0$ . Заключаваме, че  $f^2(0) = 1$  и следователно  $f(0) = -1$  или  $f(0) = 1$ .

Вариант 1.  $f(0) = -1$

Най-напред ще покажем, че ако  $c \neq 0$ , то  $f(c) \neq -1$ . Да допуснем противното, т.е.  $f(c) = -1$ . Като положим  $x = c$  и  $y = 1$ , получаваме  $f(f(c)f(1)) + f(c+1) = f(c)$ , откъдето



$-1 + f(c+1) = -1$ , т.е.  $f(c+1) = 0$  и следователно  $c+1=1$ , т.е.  $c=0$ , което е противоречие. Заклучаваме, че във вариант 1 уравнението  $f(x)+1=0$  има единствено решение  $x=0$ .

По-нататък, като положим  $y=1$ , получаваме  $f(f(x)f(1))+f(x+1)=f(x)$ , откъдето  $f(0)+f(x+1)=f(x)$  и следователно  $f(x+1)=f(x)+1$ . Сега по индукция лесно следва, че  $f(x+n)=f(x)+n$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$  и всяко естествено число  $n$ . Изпълнено е също  $f(x-n)=f(x)-n$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$  и всяко естествено число  $n$ . Наистина,  $f(x)=f(x-n+n)=f(x-n)+n$ , т.е.  $f(x)=f(x-n)+n$ , откъдето  $f(x-n)=f(x)-n$ .

Ще докажем, че ако  $f(x)$  е решение на задачата, то  $f(x)$  е инективна функция. Нека  $f(a)=f(b)$ . Тогава  $f(a)+n=f(b)+n$  и от доказаното по-горе следва, че  $f(a+n)=f(b+n)$  за всяко естествено число  $n$ . Да разгледаме квадратното уравнение  $x^2-(a+n)x+(b+n-1)=0$ . Неговата дискриминанта е  $D=(a+n)^2-4(b+n-1)$  и тя е очевидно по-голяма от нула за достатъчно големи стойности на  $n$ . Следователно, за достатъчно големи стойности на  $n$  разглежданото квадратно уравнение има два различни реални корени  $r$  и  $s$ . От формулите на Виет имаме  $r+s=a+n$  и  $rs=b+n-1$ . Сега, като положим  $x=r$  и  $y=s$ , получаваме  $f(f(r)f(s))+f(r+s)=f(rs)$ , откъдето  $f(f(r)f(s))+f(a+n)=f(b+n-1)$ , т.е.  $f(f(r)f(s))+f(a)+n=f(b)+n-1$ . Следователно  $f(f(r)f(s))=-1$  и заключаваме, че  $f(r)f(s)=0$ , защото сме във вариант 1. Тогава  $f(r)=0$  или  $f(s)=0$ , т.е.  $r=1$  или  $s=1$ . Нека без ограничение  $r=1$ . Сега формулите на Виет дават  $1+s=a+n$  и  $1 \cdot s=b+n-1$ . От тези две равенства следва, че  $1+b+n-1=a+n$  и следователно  $a=b$ , което показва, че наистина функцията е инективна.

Да положим  $y=-x$ . Получаваме  $f(f(x)f(-x))+f(0)=f(-x^2)=f(-x^2+1-1)$ , т.е.  $f(f(x)f(-x))-1=f(-x^2+1)-1$ . Следователно  $f(f(x)f(-x))=f(-x^2+1)$  и с помощта на инективността заключаваме, че  $f(x)f(-x)=-x^2+1$ . Но като положим  $y=1-x$ , получаваме  $f(f(x)f(1-x))+f(1)=f(x(1-x))$ , откъдето  $f(f(x)f(1-x))=f(x(1-x))$  и  $f(x)f(1-x)=x(1-x)$ , т.е.  $f(x)(f(-x)+1)=x-x^2$  и  $f(x)+f(x)f(-x)=x-x^2$ . Последното заедно с полученото по-горе дава  $f(x)-x^2+1=x-x^2$ , т.е.  $f(x)=x-1$  за  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Лесно се проверява, че получената функция е решение на задачата.

### **Вариант 2.** $f(0)=1$

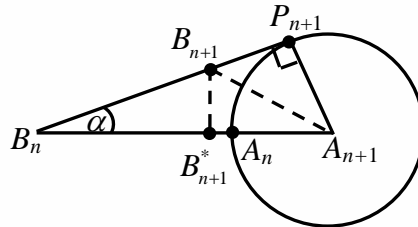
Този вариант може да се разгледа по аналогичен начин и той води до трето решение на задачата  $f(x)=1-x$ . До същия резултат достигаме и директно, като забележим, че ако  $f(x)$  е решение на задачата, то и функцията  $-f(x)$  е също решение.

Окончателно, задачата има 3 решения:  $f(x)=0$ ,  $f(x)=x-1$  и  $f(x)=1-x$ .

### **Решение на задача 3.**

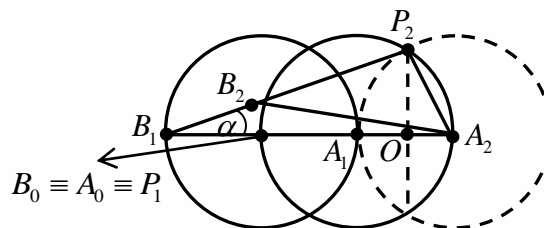
Да уточним, че при всеки ход най-напред се премества заекът, след това проследяващото устройство дава съответна информация и ходът завършва с преместване на ловеца. С  $P_n$  ще означаваме докладваната точка от проследяващото устройство при  $n$ -ия ход. Нека  $d_n = B_n A_n$  е разстоянието между ловеца и заека след  $n$ -ия ход. Тъй като заекът се стреми да се отдалечава максимално от ловеца, той би следвало да се движи по правата между него и ловеца. В резултат на преместването на заека при  $(n+1)$ -ия ход до точка  $A_{n+1}$  ( $A_n A_{n+1} = 1$ ), проследяващото устройство посочва точка (съгласно условието на задачата) в затворен кръг с радиус 1 и център – местоположението  $A_{n+1}$  на заека. Ако стратегията на ловеца е да се

движи по права линия по посока на посочената от проследяващото устройство точка  $P_{n+1}$ , то новото местоположение на ловеца е в точка  $B_{n+1} \in B_n P_{n+1}$ , за която  $B_n B_{n+1} = 1$ . Нека  $B_n P_{n+1}$  е допирателна към кръга с радиус 1 и център  $A_{n+1}$ , а  $\alpha$  е ъгълът между  $B_n A_{n+1}$  и  $B_n P_{n+1}$ . От правоъгълния  $\Delta B_n A_{n+1} P_{n+1}$  имаме  $\sin \alpha = \frac{1}{d_n + 1}$ . Ако  $B_{n+1}^*$  е проекцията на  $B_{n+1}$  върху  $B_n A_{n+1}$ , то



$B_n B_{n+1}^* = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{(d_n + 1)^2}}$ . Тогава  $B_{n+1}^* A_{n+1} = d_n + 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(d_n + 1)^2}}$ . От правоъгълния  $\Delta A_{n+1} B_{n+1} B_{n+1}^*$  (хипотенузата е по-голяма от катета) заключаваме, че за новото разстояние  $d_{n+1}$  между ловеца и заека е изпълнено  $d_{n+1} = B_{n+1} A_{n+1} \geq d_n + 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{(d_n + 1)^2}}$ . Това е възможно най-голямото разстояние между ловеца и заека след  $(n + 1)$ -ия ход при положение, че заекът следва най-добрата своя стратегия, защото стойността на  $\alpha$  е възможно най-голяма именно в случая, когато  $B_n P_{n+1}$  е допирателна към кръга. Тук отчитаме, че тогава стойността на  $\cos \alpha$  е възможно най-малка, т.е. стойността на проекцията  $B_n B_{n+1}^*$  е възможно най-малка и следователно  $B_{n+1}^* A_{n+1}$ , а оттук и стойността на  $d_{n+1}$  е възможно най-голяма.

Интересно е да се съобрази какво би се случило при първия ход на заека и ловеца. В началния момент  $A_0 \equiv B_0$ . Най-неизгодно за ловеца е, ако той тръгне в посока, противна на посоката на заека. Тогава  $d_1 = B_1 A_1 = 2$  и можем да считаме, че играта започва оттук. По отношение на проследяващото устройство най-неизгоден за ловеца е случаят, когато проследяващото устройство докладва точката  $P_1$  така, че тя да съвпада с  $A_0 \equiv B_0$ .



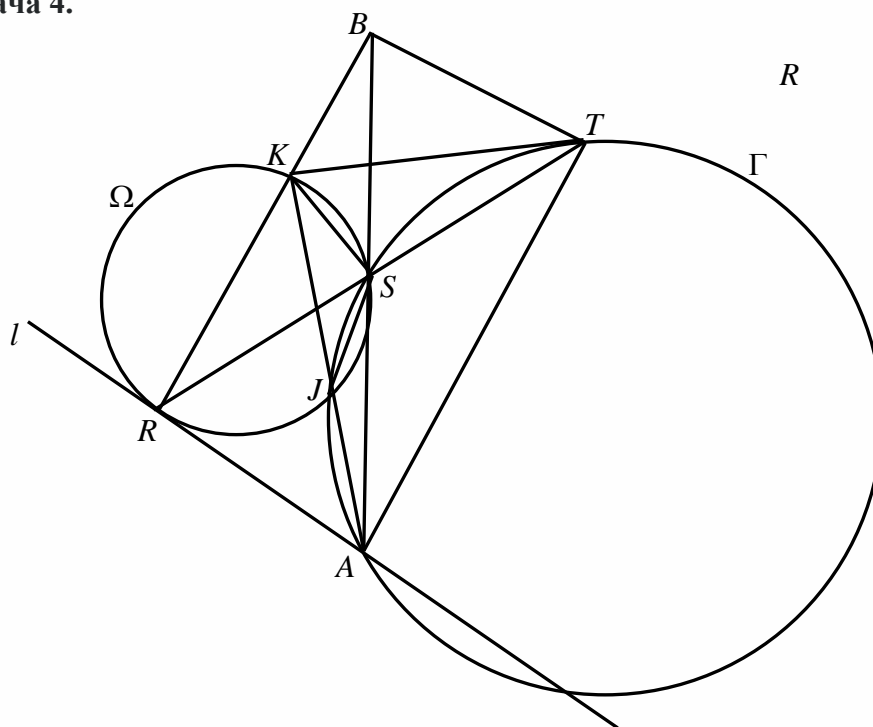
Тъй като търсим стратегия за ловеца независимо от ходовете на проследяващото устройство, можем да считаме, че  $P_2$  е върху симетралата на отсечката  $A_1 A_2 = 1$ . Ако  $O$  е средата на  $A_1 A_2$ , то  $A_1 O = O A_2 = \frac{1}{2}$ . От друга страна,  $P_2$  трябва да лежи в кръг с радиус 1 и

център  $A_2$ . Нека  $P_2$  е пресечната точка на симетралата на  $A_1A_2$  и окръжността с радиус 1 и център  $A_2$ . Пресечните точки са 2, но без ограничение разглеждаме отбелязаната точка  $P_2$  на чертежа. Тогава  $\Delta A_1A_2P_2$  е равностранен и следователно  $P_2$  лежи и на окръжността с радиус 1 и център  $A_1$ . Запазваме означението  $\alpha$ , както по-горе, за ъгъла между правата, определена от местоположението на ловеца и заека от една страна, както и правата, определена от местоположението на ловеца и точката  $P_2$ . Тъй като  $OP_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и

$$B_1P_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(d_1 + \frac{1}{2}\right)^2}, \text{ от правоъгълния } \Delta B_1OP_2 \text{ намираме } \cos \alpha = \frac{d_1 + \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(d_1 + \frac{1}{2}\right)^2}}.$$

От косинусовата теорема за  $\Delta B_1A_2B_2$  имаме  $d_2 = B_2A_2 = \sqrt{1 + (d_1 + 1)^2 - 2(d_1 + 1)\cos \alpha}$ . Като използваме, че  $d_1 = 2$ , лесно стигаме, до  $B_2A_2 \approx 2,081$ . Ако на мястото на  $d_1 = 2$  поставим  $d_k = 100$ , по аналогичен начин пресмятаме  $d_k \approx 100,000037$ , т.е. разстоянието между ловеца и заека нараства приблизително с 0,000037. Тогава  $100 : 0,000037 \approx 2\,700\,000$ , което е значително по-малко от  $10^9$ . Заклучаваме, че при повече от 2 700 000 хода разстоянието между ловеца и заека ще се увеличи още повече, което означава, че отговорът на задачата е отрицателен.

#### Решение на задача 4.



Ще докажем, че  $RK \parallel AT$ . Тъй като  $\angle SJK = \angle STA$  (четириъгълникът  $ATSJ$  е вписан в  $\Gamma$ ) и  $\angle SJK = \angle KRS$  (измерват се с една и съща дъга от  $\Omega$ ), то  $\angle STA = \angle KRS$  и следователно наистина  $RK \parallel AT$ . Нека правата през  $T$ , която е успоредна на  $l$ , пресича  $RK$  в точка  $B$ . Тогава четириъгълникът  $RATB$  е успоредник. Средата на диагонала  $AB$  е среда и на

диагонала  $RT$ , откъдето следва, че точките  $A$ ,  $S$  и  $B$  са колинеарни. Ще докажем, че около четириъгълника  $KSTB$  може да се опише окръжност. Това следва от равенството на ъглите  $STB$  и  $RKS$ . Наистина,  $\angle STB = \angle ARS$  (кръстни ъгли) и  $\angle RKS = \angle ARS$  (измерват се с една и съща дъга от  $\Omega$ ). Имаме още, че  $\angle ABK = \angle BAT$  (кръстни ъгли). Сега от факта, че четириъгълникът  $KSTB$  е вписан, следва, че  $\angle STK = \angle ABK$ . Тогава  $\angle STK = \angle BAT$  и получаваме, че дъгите от  $\Gamma$ , с които тези ъгли се измерват, са равни. Това е възможно само когато  $KT$  е допирателна към  $\Gamma$ , което трябваше да се докаже.

### Решение на задача 5.

Да номерираме играчите с числата от 1 до  $N$  така, че на по-висок играч да съответства по-голям номер. Ще посочим индуктивен алгоритъм, който води до решение на задачата. Да разпределим играчите по произволен начин на  $N$  групи по  $N+1$  играчи. От всяка група ще изберем по двама играчи така, че да са изпълнени исканите от сър Алекс условия:

1. Разглеждаме групата, която съдържа най-ниския играч и го отделяме от тази група заедно със следващия по височина играч в тази група. Това са двамата играчи от тази група. Изваждаме от редицата останалите в групата играчи и приключваме с тази група.

2. От всяка от останалите групи изваждаме най-ниския играч. По този начин получаваме  $N-1$  групи с по  $N$  играчи и постъпваме по описания вече начин.

Ще проверим алгоритъма за конкретни стойности на  $N$ .

**Нека**  $N = 2$ .

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5 и 6. По произволен начин разпределяме тези числа в 2 групи по трима, например така:

3	4	6
---	---	---

1	2	5
---	---	---

Дясната група съдържа най-малкото число 1 (най-ниския играч) и затова отделяме от нея двете най-малки числа **1 и 2**, а изваждаме оставащото 5 от редицата. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 3 от първата група. Оставащите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 4, 6, 1 и 2. Лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

**Нека**  $N = 3$ .

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12. По произволен начин разпределяме тези числа в 3 групи по четирима, например така:

2	5	7	8
---	---	---	---

1	6	9	12
---	---	---	----

3	4	10	11
---	---	----	----

Средната група съдържа най-малкото число 1 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **1 и 6**, а изваждаме оставащите две числа 9 и 12 от редицата. С това приключваме с втората група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 2 от първата група и най-малкото число 3 от третата група. Получаваме 2 групи с по трима играчи и свеждаме задачата до случая  $N = 2$ . Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 5, 7, 8, 4, 10 и 11.

5 7 8

4 10 11

Втората група съдържа най-малкото число 4 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **4 и 10**, а изваждаме оставащото число 11 от редицата и приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 5 от първата група. Оставащите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 7, 8, 4 и 10. Тези числа, заедно с вече избраните 1 и 6, определят търсените числа 7, 8, 1, 6, 4 и 10, за които лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

**Нека**  $N = 4$ .

Играчите по височина от най-ниския към най-високия са 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20. Разпределяме тези числа в 4 групи по петима, например така:

1 4 5 16 19

3 7 10 17 18

2 9 12 13 14

6 8 11 15 20

Първата група съдържа най-малкото число 1 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **1 и 4**, а изваждаме оставащите 5, 16 и 19 от редицата, с което приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 3 от втората група, най-малкото число 2 от третата група и най-малкото число 6 от четвъртата група. Получаваме 3 групи с по четирима играчи и свеждаме задачата до случая  $N = 3$ . Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 7, 10, 17, 18; 9, 12, 13, 14; 8, 11, 15 и 20.

7 10 17 18

9 12 13 14

8 11 15 20

Първата група съдържа най-малкото число 7 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **7 и 10**, а изваждаме оставащите 17 и 18 от редицата. По този начин приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 9 от втората група и най-малкото число 8 от третата група. Получаваме 2 групи с по трима играчи и свеждаме задачата до случая  $N = 2$ . Сега играчите по височина от най-ниския към най-високия са 12, 13, 14; 11, 15 и 20.

12 13 14

11 15 20

Втората група съдържа най-малкото число 11 и затова отделяме от нея двете най-малки числа **11 и 15**, а изваждаме оставащото число 20 от редицата и приключваме с тази група. При втората стъпка на алгоритъма отделяме най-малкото число 12 от първата група. Другите две числа остават в редицата и като краен резултат получаваме числата 13, 14, 11 и 15. Тези числа, заедно с вече избраните 1, 4, 7 и 10 определят търсените числа 1, 4, 7, 10, 13, 14, 11 и 15, за които лесно се проверява, че условията на сър Алекс са изпълнени.

Оставяме на читателя да обоснове алгоритъма при индуктивната стъпка в общия случай от  $N$  към  $N - 1$ .

### Решение на задача 6.

Да обърнем внимание, че търсеният полином е хомогенен, т.е. всеки едночлен в него е от степен  $n$  по отношение на променливите  $x$  и  $y$ . Най-напред ще разгледаме простия случай, когато множеството  $S$  съдържа само един елемент  $(x_1, y_1)$ , за който  $\text{НОД}(x_1, y_1) = 1$ . От Лемата на Безу следва, че съществуват цели числа  $a_0$  и  $a_1$ , за които  $a_0x_1 + a_1y_1 = 1$ . За хомогенен полином с цели коефициенти, който търсим, можем да вземем хомогенния полином от първа степен  $g(x, y) = a_0x + a_1y$  и задачата е решена. За пълнота и за улеснение на читателя ще дадем общата формулировка на Лемата на Безу (Етиен Безу (1730–1783) е френски математик).

**Лема на Безу.** (известна още като *Тъждество на Безу*). Ако  $x$  и  $y$  са цели ненулеви числа, то съществуват цели числа  $a$  и  $b$  така, че  $ax + by = \text{НОД}(x, y)$ .

При това  $\text{НОД}(x, y)$  е най-малкото естествено число, което може да се представи във вида  $ax + by$ . Освен това, всяко цяло число от вида  $ax + by$  е кратно на  $\text{НОД}(x, y)$ . Важно е да се отбележи, че намирането на целите числа  $a$  и  $b$  (наричани *коефициенти на Безу*) може да стане с помощта на алгоритъма на Евклид за намиране на НОД, като в случая на коефициенти на Безу алгоритъмът е известен като *разширен алгоритъм на Евклид*. Например, да намерим най-напред  $\text{НОД}(17, 12)$  с алгоритъма на Евклид:

Стъпка 1. Делим 17 (по-голямото число) на 12 (по-малкото) и получаваме  $17 = 12 \cdot 1 + 5$ ;

Стъпка 2. Делим делителя 12 от предната стъпка с остатък 5 от предната стъпка и получаваме  $12 = 5 \cdot 2 + 2$ ;

Стъпка 3. Делим делителя 5 от предната стъпка с остатък 2 от предната стъпка и получаваме  $5 = 2 \cdot 2 + 1$ ;

Стъпка 4. Делим делителя 2 от предната стъпка с остатък 1 от предната стъпка и получаваме  $2 = 2 \cdot 1 + 0$ .

Процесът спира до получаване на остатък 0, което в разглеждания пример се реализира в стъпка 4. Последният различен от нула остатък задава търсения НОД. В нашия случай  $\text{НОД}(17, 12) = 1$ . Разширяването на алгоритъма на Евклид касае определянето на коефициентите на Безу, което става на ходове по следния начин:

Ход 1. Изразяваме последния различен от нула остатък от стъпка 3 и получаваме  $1 = 5 - 2 \cdot 2$ ;

Ход 2. Изразяваме остатък 2 от предната стъпка 2 и го заместваем в предния ход. Получаваме  $2 = 12 - 5 \cdot 2$  и  $1 = 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 = 5 - 12 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 5(1 + 4) - 12 \cdot 2 = 2 = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 2$ .

Ход 3. Изразяваме остатък 5 от предната стъпка 1 и го заместваем в предния ход. Получаваме  $5 = 17 - 12 \cdot 1$  и  $1 = 5 \cdot 5 - 12 \cdot 2 = 5(17 - 12 \cdot 1) - 12 \cdot 2 = 5 \cdot 17 - 12 \cdot 5 - 12 \cdot 2 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12$ .

Окончателно тъждеството на Безу е  $5 \cdot 17 - 7 \cdot 12 = 1$ , а коефициентите на Безу са 5 и  $-7$ .

Приключваме с отклонението по Лемата на Безу и се връщаме към решението на задача 6. Ще използваме индукция по броя на елементите на  $S$ . Да допуснем, че за  $m$  двойки  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), за които  $\text{НОД}(x_i, y_i) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), съществува хомогенен полином  $g(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$  от степен  $n > 0$  така, че  $g(x_i, y_i) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Ще докажем, че за всяко  $S$  с  $m+1$  примитивни двойки съществува хомогенен полином  $f(x, y)$ , за който  $f(x_i, y_i) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m, m+1$ ).

Нека  $g(x, y)$  е хомогенният полином от степен  $n > 0$ , който съществува съгласно индуктивното предположение за първите  $m$  примитивни двойки и нека

$$f(x, y) = (g(x, y))^M - Cx^{Mn-m} \prod_{i=1}^m (y_i x - x_i y),$$

където  $M$  и  $C$  са подходящи константи. Да обърнем внимание, че  $f(x, y)$  се състои от 2 части, всяка от които е хомогенен полином. Освен това, очевидно  $f(x_i, y_i) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), след като  $g(x_i, y_i) = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Ще разгледаме два случая.

Случай 1.  $(x_{m+1}, y_{m+1}) = (1, 0)$ , която е очевидно примитивна двойка.

Имаме  $f(1, 0) = (g(1, 0))^M - C \prod_{i=1}^m y_i$ . Тъй като  $g(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$ , то

$$f(1, 0) = (a_0)^M - C \prod_{i=1}^m y_i. \text{ Ако } a_0 = 1, \text{ можем да вземем } M = 1, C = 0 \text{ и очевидно } f(1, 0) = 1, \text{ с}$$

което задачата е решена. Затова по-нататък в случай 1 ще считаме, че  $a_0 \neq 1$ .

Да забележим, че  $1 = g(x_i, y_i) \equiv a_0 x_i^n \pmod{y_i}$ . Заклучаваме, че съществува цяло число  $k$ , за което  $a_0 x_i^n = ky_i + 1$ . Оттук следва, че НОД  $(a_0, y_i) = 1$ . Това дава възможност при търсене на константите  $M$  и  $C$  така, че  $f(1, 0) = (a_0)^M - C \prod_{i=1}^m y_i$ , да използваме Ойлеровата функция

$\varphi$ , наричана още *тотиента*. Нека  $M = \varphi\left(\prod_{i=1}^m y_i\right)$ . От теоремата на Ойлер-Ферма следва, че

$$a_0^{\varphi\left(\prod_{i=1}^m y_i\right)} \equiv 1 \pmod{\prod_{i=1}^m y_i}, \text{ защото } a_0 \text{ е взаимно просто с всички } y_i, \text{ а следователно и с тяхното}$$

произведение. Сега за  $C$  е достатъчно да вземем  $C = \frac{(a_0)^M - 1}{\prod_{i=1}^m y_i}$ . Тогава  $f(1, 0) = 1$  и задачата

е решена.

Разбира се, ако някоя от примитивните двойки  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, m, m+1$ ) е двойката  $(1, 0)$ , можем да преномерираме двойките и да считаме, че  $(x_{m+1}, y_{m+1}) = (1, 0)$ , така че задачата е решена. Остава да разгледаме случая, когато нито една от примитивните двойки не е двойката  $(1, 0)$ , т.е.

Случай 2.  $(x_i, y_i) \neq (1, 0)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m, m+1$ ).

За първите  $m$  примитивни двойки прилагаме отново индуктивното предположение и използваме споменатия по-горе хомогенен полином  $g(x, y)$  от степен  $n > 0$ . Тъй като НОД  $(x_{m+1}, y_{m+1}) = 1$ , от Лемата на Безу следва, че съществуват цели числа  $t$  и  $s$ , за които

$$tx_{m+1} + sy_{m+1} = 1. \text{ Да разгледаме матрицата } \begin{pmatrix} t & s \\ -y_{m+1} & x_{m+1} \end{pmatrix}. \text{ Нейната детерминанта е}$$

$tx_{m+1} + sy_{m+1} = 1$  и е различна от 0, което означава, че матрицата е обратима, т.е. тя има обратна матрица. С помощта на горната матрица дефинираме трансформация  $T$  на точки от



равнината  $(x, y)$  в точки от равнината  $(u, v)$ . Обръщаме внимание, че  $T$  е изоморфизъм, т.е.  $T$  е взаимно еднозначно съответствие между двете равнини. Имаме

$$(u, v) = T(x, y) = \begin{pmatrix} t & s \\ -y_{m+1} & x_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \text{ където } u = tx + sy \text{ и } v = -y_{m+1}x + x_{m+1}y.$$

Образите се получават по правилото за умножаване на матрици. Трансформацията  $T$  преобразува хомогенния полином  $g(x, y)$  в хомогенен полином  $g^*(u, v)$  на променливите  $u$  и  $v$ . При това забелязваме, че  $T(x_{m+1}, y_{m+1}) = (1, 0)$ . Използвайки доказаното по-горе, можем да конструираме хомогенен полином  $f^*(u, v)$ , който с обратната трансформация  $T^{-1}$  се преобразува в хомогенен полином  $f(x, y)$ , изпълняващ исканите условия. С това задачата е решена и в този случай.

Предлагаме упражнение върху описания алгоритъм с два типични примера в случая  $m = 2$ .

**Пример 1.**  $(x_1, y_1) = (17, 12)$ ,  $(x_2, y_2) = (1, 0)$

При обсъждането на Лемата на Безу намерихме коефициентите на Безу за примитивната двойка  $(17, 12)$ . По-точно видяхме, че  $5 \cdot 17 - 7 \cdot 12 = 1$  и следователно коефициентите на Безу са  $(5, -7)$ . Можем да използваме линейния хомогенен полином  $g(x, y) = 5x - 7y$  и да конструираме  $f(x, y) = (5x - 7y)^M - Cx^{M-1}(12x - 17y)$ . Имаме  $f(17, 12) = 1$  и  $f(1, 0) = 5^M - C \cdot 12$ . От друга страна  $\varphi(12) = \varphi(2^2 \cdot 3)$  и като използваме правилото за пресмятане стойностите на Ойлеровата функция с помощта на каноничното разлагане на съответния аргумент, намираме  $\varphi(12) = 12 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$ . Тогава

$$M = \varphi\left(\prod_{i=1}^m y_i\right) = \varphi(12) = 4 \text{ и } C = \frac{5^4 - 1}{12} = \frac{624}{12} = 52. \text{ Окончателно}$$

$$f(x, y) = (5x - 7y)^4 - 52x^3(12x - 17y).$$

**Пример 2.**  $(x_1, y_1) = (3, 2)$ ,  $(x_2, y_2) = (2, 5)$ .

Коефициентите на Безу за примитивната двойка  $(3, 2)$  са  $(1, -1)$ . Наистина  $1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$ . Тогава линейният хомогенен полином от алгоритъма е  $g(x, y) = x - y$  и очевидно  $g(3, 2) = 1$ . Тъй като втората примитивна двойка е различна от двойката  $(1, 2)$ , съгласно алгоритъма

(общата схема) ще използваме изоморфизма  $T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ . Имаме  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , т.е.

$T(2, 5) = (1, 0)$ . Също така  $u = -2x + y$  и  $v = -5x + 2y$ . От друга страна  $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ , защото

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ което е единичната матрица и следователно } T \cdot T^{-1} \text{ е идентитет.}$$

Така  $x = 2u - v$  и  $y = 5u - 2v$ . Тогава  $g(x, y) = x - y = 2u - v - (5u - 2v) = -3u + v$ , т.е.  $g^*(u, v) = -3u + v$ . По-нататък  $u_1 = -2x_1 + y_1 = -2 \cdot 3 + 2 = -4$ ,  $v_1 = -5x_1 + 2y_1 = -5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = -11$ ,



