

М + Р Е Ш Е Н И Я

М+556. В трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагоналите AC и BD се пресичат в точка O , а лицата на триъгълниците ABO , CDO и BCO са съответно a , b и c . Ако е изпълнено равенството $c = a - 6b$, да се намери отношението на голямата основа към малката.

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Тъй като $c = \sqrt{ab}$, то $\sqrt{ab} = a - 6b$. Следователно $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} - 6$. Ако $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$, то $x^2 - x - 6 = 0$. Следователно търсеното отношение е $x = 3$, т.е. 3:1.

М+557. Точките M , N и P лежат съответно върху страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ така, че $\sphericalangle ANP = \sphericalangle BMP = \sphericalangle MPN$.

а) Ако $CP \cap MN = Q$, да се намери геометричното място на точката Q , когато P описва страната AB .

б) Да се определи положението на точката P , при което $MN \perp CP$. Да се докаже, че при това положение на P периметърът на четириъгълника $CMPN$ е по-голям от удвоения диаметър на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. От условието следва, че $AN \parallel PM$ и $BM \parallel PN$. Следователно четириъгълникът $CMPN$ е успоредник.

а) Диагоналите на успоредника $CMPN$ се разполовяват от точката Q . Затова, когато P се движи по страната AB , Q описва средната отсечка на $\triangle ABC$, която е успоредна на AB .

б) Ако $MN \perp CP$, успоредникът $CMPN$ е ромб, т.е. $CM = MP = PN = CN = x$ и диагоналът CP е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Тъй като $PN \parallel BC$ и $PM \parallel AC$, чрез теоремата на Талес

изразяваме $\frac{PN}{BC} = \frac{AP}{AB}$ и $\frac{PM}{AC} = \frac{BP}{AB}$. След

почленно събиране на тези равенства

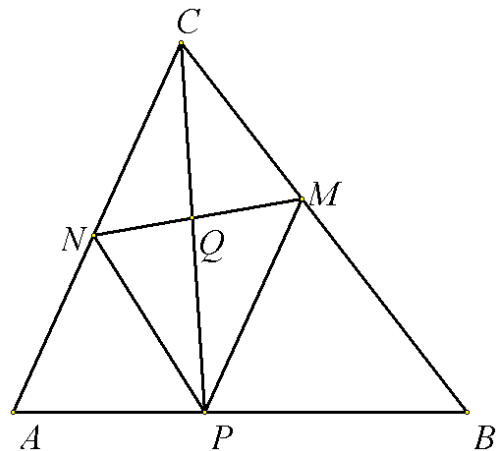
получаваме $\frac{x}{BC} + \frac{x}{AC} = 1$. Оттук

$x = \frac{AC \cdot BC}{AC + BC}$. За лицето S на $\triangle ABC$ имаме $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \sphericalangle ACB$. Тъй като

$0 < \sin \sphericalangle ACB \leq 1$, то $S \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$. Освен това $AC + BC < AC + BC + AB$. Затова

$x > \frac{2S}{AC + BC + AB} = r$. Следователно за периметъра на ромба е изпълнено

неравенството $4x > 4r$, което доказва твърдение б).

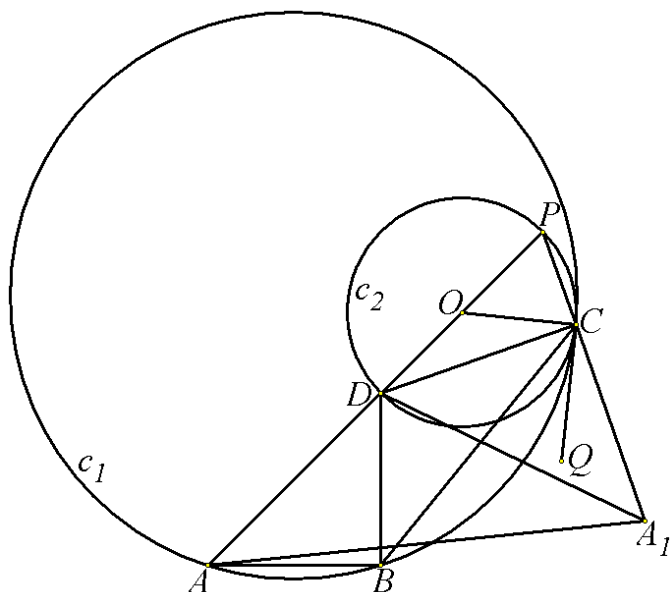


М+558. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ и $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Точката P лежи върху правата AD така, че D е между A и P и

$\sphericalangle DCP = 90^\circ$. Да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците ABC и DCP са допирателни.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. Достатъчно е да докажем, че описаните окръжности c_1 и c_2 съответно около $\triangle ABC$ и $\triangle DCP$ имат обща допирателна в точката C . Нека O е средата на PD , а Q е точка в полуравнината, определена от правата CD , съдържаща $ABCD$ така, че $\sphericalangle QCO = 90^\circ$. Правата CQ е допирателна за c_2 . Остава да се докаже, че тя се допира до c_1 . От свойствата на периферните и вписаните ъгли следва, че е достатъчно да се докаже, че $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$. Тъй като $\sphericalangle DCO = \sphericalangle ODC = 180^\circ - \sphericalangle ADC$, получаваме последователно



$$\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCD - \sphericalangle DCB = 90^\circ - (\sphericalangle DCO + \sphericalangle BCD) = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BCD - 90^\circ,$$

$$\text{т.е.} \quad \sphericalangle BCQ = (180^\circ - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD) - \sphericalangle BCD - 90^\circ = 90^\circ - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD - \sphericalangle BCD.$$

Тогава желаното равенство $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle BAC$ е равносилно с равенството $90^\circ - \sphericalangle ACD - \sphericalangle CAD - \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC$, т.е. (1) $90^\circ - \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. Остава да докажем това равенство. Нека A_1 е точка от продължението на PC така, че

$$\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle ADB. \text{ Понеже } \sphericalangle A_1CD = \sphericalangle ABD = 90^\circ, \text{ то } \triangle ADB \sim \triangle A_1DC. \text{ Оттук } \frac{AD}{A_1D} = \frac{DB}{DC}.$$

От тази пропорция и равенството $\sphericalangle ADA_1 = \sphericalangle BDC$ следва, че $\triangle ADA_1 \sim \triangle BDC$. Затова

$$\frac{AA_1}{AD} = \frac{BC}{BD}. \text{ Но по условие } BC \cdot AD = AC \cdot BD, \text{ което е еквивалентно с } \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}.$$

Следователно $\frac{AA_1}{AD} = \frac{AC}{AD}$, т.е. $AA_1 = AC$. Оттук (2) $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle AA_1C$. Имаме

$$\sphericalangle ACA_1 = 90^\circ - \sphericalangle ACD. \text{ От друга страна } \triangle ADA_1 \sim \triangle BDC \text{ и } \triangle A_1DC \sim \triangle ADB, \\ \sphericalangle AA_1D = \sphericalangle BCD \text{ и } \sphericalangle DA_1C = \sphericalangle DAB. \text{ Оттук } \sphericalangle AA_1C = \sphericalangle AA_1D + \sphericalangle DA_1C = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB.$$

От равенството (2) следва, че $90^\circ - \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$. Последното доказва (1). С това задачата е решена.

M+559. Да се реши уравнението $5x^2 + 6y^2 + z^2 - 2zy - 6x + 12y + 9 = 0$, където $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(Росен Николаев, Йордан Петков, гр. Варна)

Решение. Преобразуваме лявата страна на уравнението, като отделяме точни квадрати.

$$\text{Получаваме } (z - y)^2 + 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + 5\left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 0. \text{ Следователно са изпълнени}$$

едновременно равенствата $z - y = 0$, $x - \frac{3}{5} = 0$ и $y + \frac{6}{5} = 0$. Оттук получаваме, че уравнението има единствено решение $x = \frac{3}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$, $z = -\frac{6}{5}$.

M+560. Нека $N = 2000^{2000} + 2001^{2001} + 2002^{2002} + \dots + 2014^{2014} + 2015^{2015} + 2016^{2016}$. Редицата N, N_1, N_2, \dots, N_k е образувана така, че всяко число след първото е получено като сума от цифрите на предишното. Ако k е най-малкото число, при което N_k е едноцифрено число, да се намерят k и N_k .

(Сава Гроздев, гр. София, Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

Решение. Първо ще определим стойността на N_k . Числото N_k е остатъкът, който се получава при делението на N с 9. Да отбележим, че ако a е цяло число, което не се дели на 3, то a^6 има остатък 1 при деление на 9. Наистина, тъй като $a^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1)$, то при $a = 3n + 1$ числото $a^3 - 1 = 9n(3n^2 + 3n + 1)$ се дели на 9, а при $a = 3n - 1$ числото $a^3 + 1 = 9n(3n^2 - 3n + 1)$ се дели на 9. Оттук следва, че при произволно естествено число u числото a^{6u} има остатък 1 при деление на 9. Освен това, ако \overline{abcd} е произволно четирицифрено цяло число, то има остатък $a + b + c + d$ при деление на 9. Като използваме тези наблюдения получаваме:

$$\begin{aligned} 2001^{2001} &\equiv 2004^{2004} \equiv 2007^{2007} \equiv 2010^{2010} \equiv 2013^{2013} \equiv 2016^{2016} \equiv 0 \pmod{9}, \\ 2000^{2000} &\equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{9}, & 2002^{2002} &\equiv 4^4 \equiv 4 \pmod{9}, & 2003^{2003} &\equiv 5^5 \equiv 2 \pmod{9}, \\ 2005^{2005} &\equiv 7^1 \equiv -2 \pmod{9}, & 2006^{2006} &\equiv 8^2 \equiv 1 \pmod{9}, & 2008^{2008} &\equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{9}, \\ 2009^{2009} &\equiv 2^5 \equiv 5 \equiv -4 \pmod{9}, & 2011^{2011} &\equiv 4^1 \equiv 4 \pmod{9}, & 2012^{2012} &\equiv 5^2 \equiv 7 \equiv -2 \pmod{9}, \\ 2014^{2014} &\equiv 7^4 \equiv 7 \equiv -2 \pmod{9}, & 2015^{2015} &\equiv 8^5 \equiv 8 \equiv -1 \pmod{9}. \end{aligned}$$

Следователно $N_k \equiv N \equiv 4 + 4 + 2 - 2 + 1 + 1 - 4 + 4 - 2 - 2 - 1 \equiv 5 \pmod{9}$, т.е. $N_k = 5$.

Сега ще намерим стойността на k . Тъй като за всяко четирицифрено число \overline{abcd} е изпълнено $\overline{abcd} < 10000$, то $\overline{abcd}^{2016} < 10000^{2016}$. Броят на цифрите на 10000^{2016} е равен на $1 + 4 \cdot 2016 = 8065$. Следователно броят на цифрите на \overline{abcd}^{2016} не надминава 8065. Ако две числа имат по 8065 цифри, то сумата им е число с най-много 8066 цифри. Следователно сумата на четири числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8067 цифри. Оттук следва, че сумата на осем числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8068 цифри. Следователно сумата на шестнадесет числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8069 цифри. Накрая получаваме, че сумата на седемнадесет числа, всяко от които има по 8065 цифри, е число с най-много 8070 цифри. Следователно числото N има не повече от 8070 цифри. Най-голямото число, което има 8070 цифри, е числото X , състоящо се от 8070 деветки. Сумата от цифрите на X е $8070 \cdot 9 = 72630$. Следователно $N_1 < 72630$. Числото, което е по-малко от 72630 и има най-голяма сума на цифрите си, е 69999. Затова за сумата N_2 от цифрите на N_1 е изпълнено неравенството $N_2 < 6 + 4 \cdot 9 = 42$. Числото, което е по-малко от 42 и има най-голяма сума на цифрите си, е 39. Затова за сумата N_3 от цифрите на N_2 е изпълнено неравенството $N_3 \leq 3 + 9 = 12$. Тъй като $5 = N_k \leq N_3$ и сумата от цифрите на всяко от числата 10, 11 и 12 е по-малка от 5, то $N_3 = 5$. Оттук следва и предположението, че $k = 3$. Не е

изключена обаче и възможността да е изпълнено равенството $k = 2$. Тази възможност се отхвърля по следния начин: Нека

$$A = 2001^{2001} + 2004^{2004} + 2007^{2007} + 2010^{2010} + 2013^{2013} + 2016^{2016} \text{ и } B = N - A.$$

Числото A се дели на 9 и затова е изпълнено равенството $A = 9C$, където $C \geq 1$. Следователно сумата от цифрите на A е поне 9. Ако сумата от цифрите на B е равна на m , то за сумата от цифрите на N получаваме $N_1 \geq 9 + m$. Тъй като $m \geq 1$, то N_2 е двуцифрено число (както беше показано по-горе, то е по-малко от 42). Следователно $k = 3$. Така окончателно получаваме, че $k = 3$ и $N_3 = 5$.

М+561. Ако α_1 , α_2 и α_3 са ъглите на триъгълник $A_1A_2A_3$, да се докаже неравенството:

$$\begin{aligned} & 3 \left(\sum_{i=1}^3 \sin^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \right) \geq \\ & \geq \left(\sum_{i=1}^3 \sin^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \right)^2 + 3 \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right)^2. \end{aligned}$$

В кои случаи се достига равенство?

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

Решение. Разглеждаме матрицата $A = \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 & \sin \alpha_3 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и нейната

транспонирана $A^T = \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 1 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 1 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 1 \end{pmatrix}$. За произведението на тези матрици

получаваме $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^3 \sin^2 \alpha_i & \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \\ \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_i & \sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i & \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \\ \sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i & \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i & 3 \end{pmatrix}$. Тъй като

$\det(A \cdot A^T) = (\det A)^2 \geq 0$, то след пресмятане на детерминантата на $A \cdot A^T$ се получава

$$\begin{aligned} & 3 \left(\sum_{i=1}^3 \sin^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \right) - \\ & - \left(\sum_{i=1}^3 \sin^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i \right) \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \right)^2 - 3 \left(\sum_{i=1}^3 \sin \alpha_i \cos \alpha_i \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

което е еквивалентно с желаното неравенство. Равенство се получава тогава и само тогава, когато $\det(A) = 0$, т.е.

$$\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_3 \sin \alpha_1 = 0.$$

Това равенство е еквивалентно с $\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2} \sin \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} = 0$, което означава, че $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_3$ или $\alpha_3 = \alpha_1$. Следователно в неравенството се достига равенство тогава и само тогава, когато $A_1A_2A_3$ е равнобедрен триъгълник.

М+562. В окръжност с диаметър d са построени n успоредни хорди A_kB_k ($k=1,2,\dots,n$), които пресичат диаметър PQ съответно в точките M_k ($k=1,2,\dots,n$). Ако диаметърът PQ е такъв, че са изпълнени равенствата $A_kM_k^2 + B_kM_k^2 = S$ ($k=1,2,\dots,n$), да се намерят всички цели стойности на n и d , при които $n.S = 2016$.

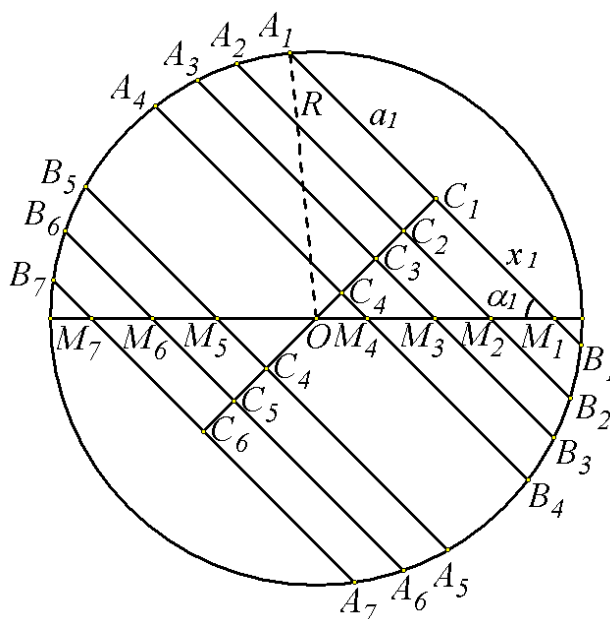
(Милен Найденов, гр. Варна)

Решение. Нека дадената окръжност има център O и радиус R , а C_k е средата на A_kB_k ($k=1,2,\dots,n$). Въвеждаме означенията $A_kC_k = a_k$, $OC_k = p_k$, $C_kM_k = x_k$ и $\sphericalangle A_kM_kO = \alpha_k$ ($k=1,2,\dots,n$). Тогава

$$S = A_kM_k^2 + B_kM_k^2 = (a_k + x_k)^2 + (a_k - x_k)^2 = 2(a_k^2 + x_k^2).$$

Тъй като $a_k^2 + p_k^2 = R^2$ и $a_k = p_k \operatorname{ctg} \alpha_k$, то $S = 2[R^2 + p_k^2(\operatorname{ctg}^2 \alpha_k - 1)]$ ($k=1,2,\dots,n$). От последното равенство следва, че S е постоянна величина само когато $\operatorname{ctg}^2 \alpha_k - 1 = 0$ ($k=1,2,\dots,n$). Следователно $\alpha_k = 45^\circ$ или $\alpha_k = 135^\circ$. При такива ъгли имаме $S = 2R^2 = \frac{d^2}{2}$. Сега равенството $n.S = 2016$ преминава в $n.d^2 = 4032$. Тъй като $4032 = 4032 \cdot 1^2 = 1008 \cdot 2^2 = 252 \cdot 4^2 = 63 \cdot 8^2 = 28 \cdot 12^2 = 7 \cdot 24^2$, то търсените целочислени решения са осем и те могат да се обобщят в следващата таблица:

d	1	2	3	4	6	8	12	24
n	4032	1008	448	252	112	63	28	7



М+563. Точката P лежи върху страната AB на остроъгълния триъгълник ABC , а M и N са петите на перпендикулярите, спуснати от P съответно към BC и AC . Да се

определи положението на P , когато: а) MN има най-малка дължина; б) лицето на $\triangle MNP$ е най-голямо; в) сборът от квадратите на MP и NP е най-малък.

(Христо Лесов, гр. Казанлък)

Решение. а) От условието следва, че четириъгълникът $CMNP$ е вписан в окръжност с диаметър CP . Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. От синусовата теорема за $\triangle CMN$ имаме $MN = CP \cdot \sin \gamma$. Следователно MN има най-малка дължина, когато CP е с най-малка дължина. Това се случва, когато $CP \perp AB$, т.е. P е петата на височината през върха C върху страната AB .

б) Тъй като $\sphericalangle MPN = 180^\circ - \gamma$, то $S_{MNP} = \frac{1}{2} MP \cdot NP \cdot \sin \gamma$. От друга страна $S_{BCP} + S_{ACP} = S_{ABC}$, т.е. $\frac{1}{2} BC \cdot PM + \frac{1}{2} AC \cdot PN = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \gamma$. Сега от неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва

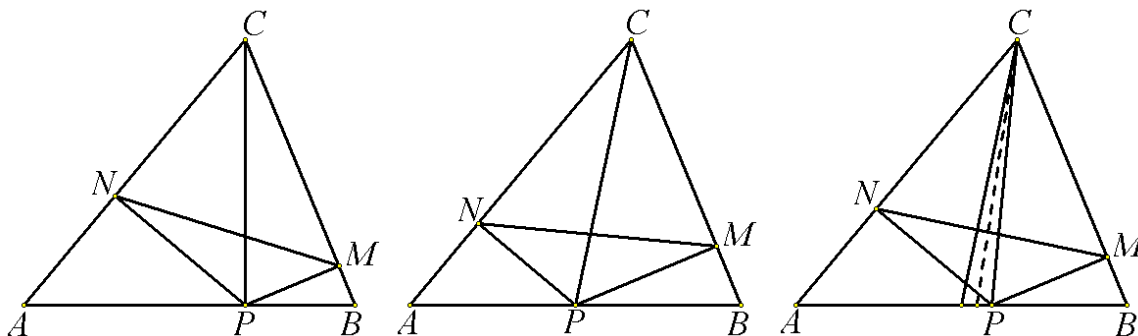
$$\begin{aligned} PM \cdot PN &= \frac{BC \cdot PM \cdot AC \cdot PN}{BC \cdot AC} \leq \frac{1}{BC \cdot AC} \left(\frac{BC \cdot PM + AC \cdot PN}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{BC \cdot AC} \left(\frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \gamma \right)^2 = \frac{1}{4} BC \cdot AC \cdot \sin^2 \gamma. \end{aligned}$$

Оттук $S_{MNP} \leq \frac{1}{8} MP \cdot NP \cdot \sin^3 \gamma$. Следователно най-голямата стойност на S_{MNP} е равна на $MP \cdot NP \cdot \sin^3 \gamma$ и се достига, когато $BC \cdot PM = AC \cdot PN$, т.е. $S_{BCP} = S_{ACP}$. Последното равенство показва, че най-голямата стойност на S_{MNP} се получава, когато P е средата на AB .

в) От неравенството на Коши-Буняковски-Шварц имаме

$$(BC^2 + AC^2)(MP^2 + NP^2) \geq (BC \cdot MP + AC \cdot NP)^2.$$

Оттук $MP^2 + NP^2 \geq \frac{4S_{ABC}^2}{BC^2 + AC^2}$. Следователно най-малката стойност на $MP^2 + NP^2$ се получава, когато $AC \cdot MP = BC \cdot NP$. Ако $CD \perp AB$ и $C \in AB$, то $S_{ACP} = \frac{1}{2} AC \cdot MP = \frac{1}{2} AP \cdot CD$ и $S_{BCP} = \frac{1}{2} BC \cdot NP = \frac{1}{2} BP \cdot CD$. От тези равенства намираме $PN = \frac{AP \cdot CD}{AC}$ и $PM = \frac{BP \cdot CD}{BC}$. Следователно $\frac{BP}{AP} = \frac{BC^2}{AC^2}$. Последното равенство означава, че сумата $MP^2 + NP^2$ е най-малка, когато CP е симедианата на $\triangle ABC$ през върха C .



M+564. Точките O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник ABC . Ако M и N са точки съответно от

страните AC и BC , така че $\sphericalangle MHN = \sphericalangle ACB$, да се докаже, че ортогоналните проекции на O и H върху правата MN лежат върху Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$ и е изпълнено равенството $\sphericalangle MON = 180^\circ - 2\sphericalangle ACB$.

(Хаим Хаимов, гр. Варна)

Решение. В решението на задачата ще използваме следната:

Лема. Ако X е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник $ABCD$, а H_1, H_2, H_3 и H_4 са ортогоналните проекции на X съответно върху AB, BC, CD и DA , то четириъгълникът $H_1H_2H_3H_4$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180^\circ$.

Доказателство. Тъй като четириъгълниците $AH_1XH_4, H_4XH_3D, H_3XH_2C$ и H_2XH_1B са вписани, то $\sphericalangle H_4H_1X = \sphericalangle H_4AX, \sphericalangle H_2H_1X = \sphericalangle H_2BX, \sphericalangle H_4H_3X = \sphericalangle H_4DX$ и $\sphericalangle H_2H_3X = \sphericalangle H_2CX$. Оттук имаме

$$\begin{aligned} \sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 &= (\sphericalangle H_4H_1X + \sphericalangle H_2H_1X) + (\sphericalangle H_4H_3X + \sphericalangle H_2H_3X) = \\ &= (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_2BX) + (\sphericalangle H_4DX + \sphericalangle H_2CX) = (\sphericalangle H_4AX + \sphericalangle H_4DX) + (\sphericalangle H_2BX + \sphericalangle H_2CX) = \\ &= (180^\circ - \sphericalangle AXD) + (180^\circ - \sphericalangle BXC) = \sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD. \end{aligned}$$

Следователно условието $\sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 = 180^\circ$ за вписаност на $H_1H_2H_3H_4$ е еквивалентно с $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180^\circ$. С това лемата е доказана.

Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$, а P и Q са ортогоналните проекции съответно на M и N върху OH . От равенствата $\sphericalangle ANB = 180^\circ - \gamma$ и $\sphericalangle MHN = \gamma$ следва, че $\sphericalangle ANB + \sphericalangle MHN = 180^\circ$. Сега от лемата следва, че ортогоналните проекции на H върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на една окръжност k . Но тази окръжност минава през петите на височините на $\triangle ABC$. Следователно k е Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$. Оттук получаваме, че $Q \in k$. Нека O_1 е центърът на k , а K е ортогоналната проекция на O_1 върху OH . Тъй като O_1 е среда на OH , то O_1K е средна основа в правоъгълния трапец $HOPQ$. Затова $O_1P = O_1Q$. Но $Q \in k$ и следователно $P \in k$. Оттук следва, че ортогоналните проекции на O върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на k . Сега от лемата следва, че $\sphericalangle AOB + \sphericalangle MON = 180^\circ$, т.е. $\sphericalangle MON = 180^\circ - 2\gamma$. С това задачата е решена.

