



М + НАЙ-МАЛКИТЕ

ЧАСТИЧЕН И ПЪЛЕН ПОДБОР

Четиво за 4 – 5 клас

Здравейте, малки математици!

Когато решавате една задача, много често намирате отговора, но не си давате сметка дали този отговор е единствен. В математиката има два вида твърдения: едното е твърдение за съществуване, а другото – твърдение за единственост. Единствеността трябва да се разбира в смисъл намиране на всички възможни отговори на съответната задача. Когато сте намерили верен отговор, това означава, че сте извършили частичен подбор. Само когато намерите всички отговори или докажете, че първоначално намереният отговор е единствен, тогава сте извършили пълен подбор. Запомнете: **важно е не само да се намери отговорът, но и да се докаже, че той е единствен.** Ще упражним различните ситуации с няколко примера на логически задачи.

Задача 1. До царя дошла вест, че един от тримата братя е убил ламята. Той извикал братята в двореца и им заповядал да кажат кой е свършил това добро дело, за да го награди богато. Братята отговорили по следния начин:

Най-големият брат: „Брат ми уби ламята” и посочил средния брат.

Средният брат: „Брат ми уби ламята” и посочил най-малкия брат.

Най-малкият брат: „Аз убих ламята”.

Кой от братята е убил ламята, ако е известно, че само един от тях е казал истината, а другите двама са излъгали?

Първо решение: Средният брат е убил ламята, защото този отговор не противоречи на условието на задачата – най-големият брат е казал истината, а другите двама са излъгали.

В случая извършихме частичен подбор. По някакъв начин, може би с налучкване, сме стигнали до отговор, който не противоречи на условието. Това ни дава основание да заключим, че този отговор е верен. Забележете: казваме, че сме намерили верен отговор, а не, че сме намерили верния отговор. Решението е незавършено! Не сме доказали единственост!

Второ решение: Ще извършим пълен подбор, като разгледаме всички възможности за брата, който е убил ламята. Ако допуснем, че това е най-големият брат, то тогава твърденията и на тримата са неверни. Следователно това не е верен отговор. Ако допуснем, че средният брат е убил ламята, стигаме до вече намерено решение. Ако накрая допуснем, че най-малкият брат е убил ламята, то твърденията на средния и на най-малкия брат са верни, което противоречи на условието, че само един от братята е казал истината.



По този начин доказахме, че намереният отговор е единствено възможен. Направеното разсъждение е дълго, но то съдържа доказателствена част за единственост. Въпросът е дали не може да се разсъждава по-кратко. Оказва се, че може. Ето как:

Трето решение: Твърденията на средния и на най-малкия брат са едни и същи. Условието на задачата ни задължава да ги приемем за неверни. Тогава единственото вярно е твърдението на най-големия брат: средният брат е убил ламята.

Получихме още едно доказателство за единственост. Това доказателство не е извършено с пълен подбор, а с едно „хитро” наблюдение. Пълният подбор беше използван във второто решение. Ако задачата се предложи на състезание или олимпиада, второто и третото решение ще бъдат оценени с пълен брой точки, докато за първото решение ще се отнемат точки.

Задача 2. От касата на президента на фирмата изчезнали важни документи. Полицията установила, че в кражбата са участвали двама от следните седем заподозрени служители на фирмата: Ангел, Банко, Вальо, Гено, Димо, Еньо и Жельо. По показания на секретарката на президента единият от похитителите е висок. Полицията открила пепел от цигара и бели косми около касата. Установила още, че е действано с лява ръка, т.е. касата е разбита от левичар.



Известно е, че Ангел, Банко, Вальо и Гено са високи. Измежду седемте заподозрени само Ангел не е пушач. Димо и Жельо са с бели коси, а Ангел и Еньо са левичари. Били арестувани Ангел и Димо. Правилно ли е постъпила полицията?

Решение: Непосредствено се проверява, че ако действително Ангел и Димо са похитителите, всички условия в задачата са изпълнени: Ангел е висок и е левичар, а Димо е пушач и е с бели коси. Отговорът е получен по случаен начин и е пример на частичен подбор. Липсва доказателство за единственост. Затова е необходим пълен подбор, който може да се извърши по няколко начина. Да разгледаме характерните белези на похитителите: висок, пушач, с бяла коса, левичар. Най-бързо можем да стигнем до отговор, ако разгледаме последните две характеристики, защото всяка от тях се отнася само до двама заподозрени – с бели коси са само Димо и Жельо, а левичари са само Ангел и Еньо. Тъй като измежду четиримата само Ангел е висок, то той със сигурност е един от двамата похитители. За втори похитител възможностите са две – Димо и Жельо. Заключаваме, че полицията е избързала с арестуването на Ангел и Димо. Необходимо е допълнително разследване.

Тази задача и предложеният отговор показват, че частичният подбор не е достатъчен.

Задача 3. От каютата на капитана на пиратския кораб изчезнала бутилка ром. Били заподозрени едноръкият Гари, брадатият Том и едноокият Кук. При разпита им пред капитана те заявили:

Гари: „Не съм докосвал Вашия ром. Том също не го е докосвал”.

Том: „Кълна се в брадата си, че Гари няма нищо общо с рома Ви. Кук взе бутилката”.



Кук: „Гари взе бутилката. Аз не съм замесен в случая”.

Капитанът установил, че двете твърдения на един от заподозрените са неверни, докато при друг от заподозрените и двете твърдения са верни. Едно от твърденията на третия заподозрян е вярно, а другото му твърдение е невярно. Освен това в кражбата на бутилката ром е участвал само един човек. Кой е той?

Решение: Пълен подбор в тази задача може да се извърши по няколко начина. Бихме могли да тръгнем например от предположението, че Гари е излъгал на два пъти. Тогава едно от твърденията на другите двама (общо четири твърдения) е невярно. Оттук се появяват четири случая, за всеки от които са необходими допълнителни разсъждения. След това трябва да предположим, че Том е излъгал на два пъти и да разгледаме различните варианти по аналогичен начин. Накрая трябва да разгледаме случая, когато Кук е излъгал на два пъти и да изследваме вариантите. Процедурата е ясна, но тя е доста дълга. По-кратко решение можем да получим, ако разгледаме трите възможности за този, който е откраднал бутилката.

Първи случай: Гари е откраднал бутилката. В този случай едно от твърденията на Гари е вярно, а другото не е. Двете твърдения на Том са неверни, а двете твърдения на Кук са верни. Заключаваме, че всички условия на задачата са изпълнени и следователно Гари е възможният крадец. Казваме „възможният крадец”, защото подборът не е пълен.

Втори случай: Том е откраднал бутилката. Сега Гари и Том имат по едно вярно и по едно невярно твърдение, което противоречи на условието на задачата.

Трети случай: Кук е откраднал бутилката. Сега Гари и Том имат по две верни твърдения, което също противоречи на условието на задачата.

Пълният подбор е завършен и можем да заключим, че Гари е взел бутилката ром от каютата на капитана. Задачата е решена с доказателство.

Задача 4. Четвъртокласниците от едно училище участвали със свои отбори в състезание по футбол. Петима петокласници направили следните прогнози:



Първи петокласник: Отборът на IV^D ще заеме първо място, а отборът на IV^B – второ.

Втори петокласник: Отборът на IV^A ще заеме второ място, а отборът на IV^G – четвърто.

Трети петокласник: Отборът на IV^B ще заеме трето място, а отборът на IV^D – пето.

Четвърти петокласник: Отборът на IV^B ще заеме първо място, а отборът на IV^G – четвърто.

Пети петокласник: Отборът на IV^A ще заеме второ място, а отборът на IV^B – трето.

За всяка от петте прогнози едната част се потвърдила, а другата – не. Определете точните места на петте отбора.

Решение: Ще разгледаме два случая за пълен подбор:

Случай 1. Първата прогноза на първия петокласник е вярна, т.е. IV^D е на първо място. Тогава от прогнозата на третия петокласник следва, че IV^B е на трето място, а от прогнозата на петия петокласник следва, че IV^A не е на второ място. Сега от прогнозата на втория петокласник следва, че $IV^Г$ е на четвърто място. За IV^A и IV^B остава да са на второ и пето място и тъй като, както отбелязахме, IV^A не е на второ място, то окончателното подреждане в този случай е: IV^D , IV^B , IV^B , $IV^Г$ и IV^A .

Случай 2. Втората прогноза на първия петокласник е вярна, т.е. IV^B е на второ място. Но тогава и двете прогнози на петия петокласник са неверни, което води до противоречие с условието на задачата.

Подреждането в състезанието е: IV^D , IV^B , IV^B , $IV^Г$ и IV^A .

Задача 5. В часа по математика на чина на Елена се „приземила“ книжна лястовичка, хвърлена от задните редове. Елена се обърнала и видяла, че зад нея са само Ванко, Сашо и Андрей.

- Кой от вас хвърли лястовичката? – попитала Елена.
- Сашо беше! – отговорил Ванко.
- Не, не съм аз! – възмутил се Сашо.
- И аз не съм! – обадил се Андрей.

Мария, която седяла до Елена и видяла всичко, се усмихнала: „Двама от тях лъжат!“, но не пожелала да даде повече подробности. Можете ли да определите кой е хвърлил лястовичката?

Първо решение: Твърденията на Ванко и Сашо се изключват взаимно. Следователно единият от тях казва истината, а другият лъже. Но тогава от условието на задачата следва, че Андрей лъже. Заключаваме, че лястовичката е хвърлена от Андрей.

Второ решение: Ще използваме пълен подбор. Ако лястовичката е хвърлена от Ванко, то твърденията на другите двама са верни и съгласно условието на задачата този случай се отхвърля. Ако лястовичката е хвърлена от Сашо, то твърденията на Ванко и Андрей са верни. Отново условието на задачата е нарушено и този случай също се отхвърля. Остава единствената възможност лястовичката да е хвърлена от Андрей. Този случай не противоречи на условието на задачата.

Задача 6. Богините Хера, Атина и Афродита отишли при Парис, за да разреши спора им коя е най-красивата между тях. Пред Парис те заявили:

Афродита: „Аз съм най-красивата.“

Атина: „Афродита не е най-красивата.“

Хера: „Аз съм най-красивата.“

Афродита: „Хера не е най-красивата.“

Атина: „Аз съм най-красивата.“

Парис предположил, че всички твърдения на най-красивата са верни, а всички твърдения на другите две богини са неверни. Може ли той да определи най-красивата измежду трите богини въз основа на това предположение?



Решение: Ще разгледаме трите възможни случая, с което ще направим пълен подбор.

Случай 1. Афродита е най-красивата. Нейните твърдения са верни, а тези на другите две богини са неверни. Предположението на Парис дава възможност за решение.

Случай 2. Атина е най-красивата. Двете твърдения на Атина са верни, но второто твърдение на Афродита също е вярно и съгласно предположението на Парис този случай не е решение.

Случай 3. Хера е най-красивата. Твърдението на Хера е вярно, но и първото твърдение на Атина е вярно и отново това не може да е отговорът на задачата по силата на предположението на Парис.

Окончателният отговор на задачата е, че Афродита е най-красивата.

Предлагаме няколко задачи за упражнение:

Задача 7. Алекс, Борис и Валери тренират различни видове спорт: баскетбол, волейбол и тенис. На въпроса какво тренират те отговорили:

Алекс: „Аз тренирам баскетбол.“

Борис: „Аз не тренирам баскетбол.“

Валери: „Аз не тренирам волейбол.“

Определете кой какво тренира, ако е известно, че от трите отговора само един е верен, а останалите са неверни.

Задача 8. Господата Браун, Джонсън и Смит получили обвинение за съучастие в обир на банка. При бягството си ползвали автомобил. По време на следствието те заявили:

Браун: „Избягахме със син „Кадилак“.“

Джонсън: „Избягахме с черен „Крайслер“.“

Смит: „Избягахме с „Форд“, който не беше син.“

Известно е, че за да объркат следствието, всеки от тримата съобщил правилно или марката на автомобила, или неговия цвят. С какъв автомобил и какъв е цветът на автомобила, с който тримата престъпници са избягали?

Задача 9. Четиримата приятели Асен, Борис, Виктор и Григор се надпреварвали кой по-напред ще стигне от училището до парка. На въпроса в какъв ред са стигнали до парка те отговорили:

Асен: „Аз бях втори, а Борис – трети.“

Виктор: „Аз бях втори, а Асен – първи.“

Григор: „Аз бях втори, а Борис – последен.“

Известно е, че едно от твърденията на всяко от момчетата е вярно, а другото му твърдение е невярно. Какъв е редът на пристигане на четиримата в парка?

Задача 10. Преди футболния мач между „Левски“ и „ЦСКА“ били направени 5 прогнози: 1. Мачът няма да завърши наравно; 2. „Левски“ ще вкара гол; 3. „Левски“ ще победи; 4. „Левски“ няма да загуби; 5. В мача ще бъдат вкарани 3 гола. Известно е, че точно три от прогнозите са се сбъднали. Какъв е резултатът от мача?

До нови срещи, малки математици!

Автор на четивото: Д-р М. Плюс