МАТЕМАТИКА ПЛЮС®

списание за математика и информатика

1

1995

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

списание за математика и информатика

одобрено от Министерството на образованието, науката и технологиите за класна и извънкласна работа

Адрес на редакцията:

София, Подуене, ул. Ангел Войвода № 49
тел. 45-13-13 (всеки работен ден от 15 ч. до 19 ч.)

e-mail: SAVAGROZ@BGEARN.BITNET

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на адрес: Институт по математика — БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София

Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници, да са напечатани на пишеща машина (листове формат А4, 30 реда по 60 знака) или на компютър. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат: 600 × 840/8	Печатни коли 9	
Дадена за печат на 10.02.1995 г.	Подписана за печат на 20.02.1995 г.	ISSN 0861-8321

Математика плюс
бр. 1, 1995

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е списание за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и информатиката направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математическите гимназии и техникумите; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

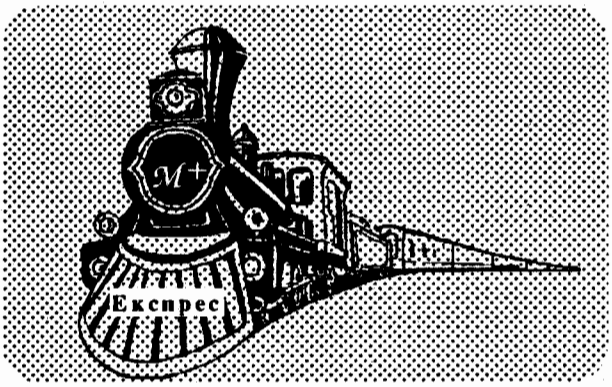
Драги читатели,

Изминаха две години от създаването на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС. Макар и още младо, списанието успя да се утвърди като ваш полезен помощник. Много от вас ни благодарят в писмата си за успешно издържаните приемни изпити в езикови гимназии, техникуми, математически гимназии, Американския колеж, висши учебни заведения. Не са малко и тези, които активно ползват списанието при подготовката си за различните математически състезания и олимпиади. Изминалата 1994 г. беше особено успешна за младите български математици. На Международната олимпиада по математика в Хонконг българите заеха четвърто място в света след САЩ, Китай и Русия. Този факт не остана незабелязан от обществеността, а президентът Желев го изтъкна в новогодишното си приветствие към българския народ. Отлично беше и представянето на Балканската олимпиада в Нови Сад, Югославия. Младите български информатици не останаха по-назад и зарадваха всички ни с множество медали от Международната олимпиада в Швеция и Балканиадата в Гърция. Френската игра-състезание КЕНГУРУ също имаше своите победители-българи и 10 от тях бяха наградени с безплатна екскурзия до Франция. Една блиц-анкета между първенците от споменатите олимпиади и състезания показва, че всички те са редовни абонати на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС и разчитат в подготовката си на разнообразните материали и задачи, които намират в него. Всичко това ни изпълва със заслужена гордост, но и ни задължава да поддържаме високото ниво на списанието. Не забравяйте, че тазгодишните балканиади по математика и информатика ще се проведат в България и не бива да отстъпваме от завоюваните позиции.

През тази година подготвяме интересни материали. Кандидатстващите след 7 и 8 клас ще намерят подготвителни задачи и примерни теми от колеги учители и от П. Нинкова – експерт по математика в Регионалния инспекторат на София. Подготовката за кандидатстване във ВУЗ ще се води от доц. Л. Давидов, а примерните теми в тази рубрика ще бъдат съставяни от екипи под ръководството на проф. Ив. Райчинов – ръководител на катедрата по математика в Университета за национално и световно стопанство, доц. Д. Иванчев – директор на Института по приложна математика при Техническия университет, доц. Вл. Тодоров – ръководител на катедрата по математика във Висшия институт за архитектура и строителство, както и от редица други специалисти. Няма да забравим кандидатстващите в Американския колеж, зрелостниците, участниците в КЕНГУРУ, в различните олимпиади и състезания. Списанието ще помага на всички — от най-малките до най-големите. Особено внимание искам да обърна на НАЦИОНАЛНИЯ КОНКУРС у$\mathcal{M}$+. И през тази година предвиждаме изненади за победителите и техните учители. Тук е мястото от името на участниците в конкурса да честитя на председателя на журито акад. Бл. Сендов избора му за Председател на Народното събрание. Честито!

Искам да спомена и забавния конкурс, който ще продължим да провеждаме съвместно с представителите на фирма ЛЕГО. И тук една новост — голямата награда за тази година е конструктор 8837, който надяваме се ще зарадва и ще достави истинско удоволствие на победителя. Както виждате, очакват ви разнообразни материали и изненади. Мястото не стига да изброявам всичките. Към тях ще прибавим и тези, които дойдат като предложения от вас. Затова пишете ни!

Искрено ваш, **д-р М. Плюс**



НОВО ДОКАЗАТЕЛСТВО НА УАЙЛС НА ПОСЛЕДНАТА ТЕОРЕМА НА ФЕРМА !?

23 юни 1993 г. ще остане важна дата в историята на математиката. На този ден по целия свят беше разпространено съобщението за анонсираното от проф. Ендрю Уайлс доказателство на Последната теорема на Ферма. Тази измамно проста теорема, формулирана преди около 350 години от Пиер Ферма, се оказа костелив орех за много професионални математици и любители (вж. Математика плюс, бр 4/93 г. и бр. 1/94 г.). Особеното в случая беше това, че за разлика от предишните доказателства, които бързо бяха опровергавани, този път аргументите на Уайлс имаха твърдата поддръжка на експертите, можещи да разберат стратегията на неговия подход. През есента на 1993 г. обаче се появиха първите сериозни слухове за някакви непълноти. Те бяха потвърдени официално от Джон Коутс (научен ръководител на Уайлс) на лекция, изнесена в същата зала на Нютоновия институт в Кеймбридж (Англия), където през юни Уайлс беше изнесъл своите знаменити три лекции.

През цялото това време Уайлс избягва публичността и продължава да работи тихо върху своя ръкопис, коригирайки неточностите, посочени му от малка група рецензенти на известното математическо списание "Inventiones Mathematicae". Въпреки, че Уайлс получава покани за лекции от цял свят, той повече не говори за своя труд. Все пак, на 4 декември 1993 г. Уайлс разпространи кратко съобщение по електронната поща, в което обясни допуснатия пропуск при доказателството на хипотезата на Танияма – Шимура (вж. Математика плюс бр. 1/94 г.). Независимо от това, мнението на специалистите беше, че работата на Уайлс съдържа изключителни идеи и резултати за съвременната теория на числата, като един от тях е свеждането на горната хипотеза до просто числово неравенство. Според един от най-известните експерти в тази област Кенет Райбет „това беше една огромна крачка, която разтърси цялата теория на числата".

Интересно е да се отбележи, че след сензационното съобщение световните медии обсипват Уайлс с необичайно за един математик внимание. Списанието "People" го обявява за една от „25-те най-интересни личности на 1993 г." заедно с принцеса Даяна, Майкъл Джексън, президента Клинтън и неговата съпруга Хилари. Появяват се слухове, че филмовата звезда Шарън Стоун иска да се срещне с Уайлс, а известни фирми за производство на джинси и маратонки му отправят примамливи предложения за реклама, които той отхвърля. В центъра на вниманието попадат и други математици, чиито резултати са използвани от Уайлс. Говори се, че служител на едно летище в САЩ спрял Герхард Фрей с въпроса: „Вие ли сте същият Фрей, който откри връзката между теоремата на Ферма и елиптичните криви?" Куриозна е историята с Мерилин Вос Саван, отбелязана в книгата на Гинес като жената с най-висок коефициент на интелигентност. На 21 ноември

1993 г. тя публикува статия в приложението на „Сънди таймс“, в което обяснява защо доказателството на Уайлс е грешно. Нейните „доводи“ се базират на известния факт, че прочутата задача за квадратурата на кръга няма решение. Оттук тя стига до заключението, че предложената от Янош Бояи квадратура на кръга в хиперболичната геометрия не е вярна, защото „неговото хиперболично доказателство не би работило в Евклидовата геометрия“. Твърдейки, че доказателството на Уайлс е основано върху хиперболичната геометрия, тя прилага същата логика: „Ако ние отхвърляме един хиперболичен метод за квадратурата на кръга, длъжни сме да отхвърлим и хиперболичното доказателство на Последната теорема на Ферма“.

Ще оставим този и други странни епизоди без коментар. Независимо от тях обаче шумът около Последната теорема на Ферма играе немалка роля за популяризацията на математиката, което помага на хората да разберат по-добре нейната природа.

В края на миналата година името на Ендрю Уайлс отново беше в устата на математиците по света. Причината за това е следното съобщение, разпространено на 25 октомври 1994 г. по електронната поща от известния математик Карл Рубин:

Тази сутрин бяха предадени за публикуване два ръкописа: „Модулярни елиптични криви и Последната теорема на Ферма“ с автор Ендрю Уайлс и „Теоретико-пръстенови свойства на някои алгебри на Хеке“ с автори Ричард Тейлър и Ендрю Уайлс.

Първият ръкопис (дълъг) съдържа доказателство на Последната теорема на Ферма (и на други резултати), като в една съществена стъпка се използва резултат от втория ръкопис (къс).

Както повечето от вас знаят, оказа се, че аргументите, описани от Уайлс в неговите Кеймбриджски лекции, имат сериозен пропуск — конструкцията на една Ойлерова система. След неуспешни опити да поправи тази конструкция Уайлс се връща към един подход, използван по-рано от него, но изоставен след възникването на идеята за Ойлеровата система. Този път той успява да завърши своето доказателство при предположението, че известни алгебри на Хеке са локални пълни сечения. Тази идея и заключителната част на идеите, разказани от Уайлс в Кеймбридж, са описани в първия ръкопис. Необходимото свойство на алгебрите на Хеке е доказано съвместно от Тейлър и Уайлс във втория ръкопис. В общи линии аргументите са подобни на тези от лекциите на Уайлс в Кеймбридж. Новият подход се оказва значително по-прост и по-кратък от първоначалния, тъй като избягва Ойлеровата система (както изглежда, след като се е запознал с тези ръкописи, Фалтингс е измислил нови значителни опростявания на тази част от разсъжденията).

Различни варианти на тези ръкописи бяха на разположение на малък брой хора за (в някои случаи) няколко седмици. Въпреки, че е разумно за известно време да бъдем предпазливи, има сигурни основания за оптимизъм.

Карл Рубин

Четейки последното изречение на горното съобщение, ми се иска силно да вярвам, че този път най-известният осемхилядник в математическите Хималаи е действително под краката на Ендрю Уайлс (и Ричард Тейлър).

Д-р М. Плюс

КАНДИДАТСТВАНЕ В КОЛЕЖИТЕ НА ОБЕДИНЕНИЯ СВЯТ

Фондация "Св. Св. Кирил и Методий" предоставя възможност на добре подготвени български ученици от девети клас да продължат образованието си в Колежите на Обединения Свят (КОС). През последните 6–7 години интересът от страна на учениците (и естествено — родителите им) към тази чудесна възможност е изключително голям. С цел да се подберат най-добре подготвените кандидати, всяка година през зимната ваканция се провежда конкурсен изпит. Той се състои от първоначален изпит по английски език, а за издържалите го — и от тестове по математика, физика, химия и биология. Тестовете се провеждат в два последователни дни (обикновено събота и неделя) и всеки тест е с времетраене 2 часа и 30 минути. Най-добре представилите се ученици се допускат до интервю със специална комисия; чак след това се определят победителите. Тези, които искат да получат повече информация за следващата учебна година, могат да направят това във Фондацията на адрес: София 1504, ул. Оборище 19.

Тестът по математика обхваща учебния материал до осми клас и този от първия срок на девети клас. Предлагат се по пет задачи. За решаването им (както ще се убедите по-долу) е достатъчно да познавате много добре учебния материал, както и да можете да го прилагате в разнообразни ситуации.

Темите, които обикновено (но не задължително) се застъпват в теста, са измежду следните: линейни и квадратни уравнения и неравенства, функции и графиките им, преобразуване на изрази, еднаквости, подобия, геометрични преобразувания, вписани и описани фигури, елементарна делимост на числата, логически и комбинаторни задачи.

За тези читатели, които са заинтригувани от изложеното дотук, предлагаме (може би) най-интересното от тазгодишния тест по математика, проведен на 04 февруари 1995 г. — самите задачи. Опитайте силите си! Работете по задачите в продължение на 2 часа и 30 минути, а след това сверете отговорите (на стр. 49).

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\frac{|x^2-2x-3|+3}{x^2+2x+1+|x-4|}=1.$$

Задача 2. Към хипотенузата AB на правоъгълния триъгълник ABC е спусната височината CD (точката D лежи на AB). Точките M и N са съответно средите на отсечките BC и CD. Правите AM и CD се пресичат в точката P, а правите AN и BC — в точката Q. Да се докаже, че около четириъгълника $PMQN$ може да се опише окръжност.

Задача 3. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$2x|x|+(a-1)x+18=0$$

има точно две реални и различни решения.

Задача 4. Окръжностите k_1 и k_2 имат радиуси, равни на 1 см, и се пресичат в точките B и M. Точките A и C лежат съответно на окръжностите k_1 и k_2 и правата AC не съдържа B. Нека D е такава точка, че четириъгълникът $ABCD$ е успоредник.

а) Ако точката P е средата на BM и точката K е симетричната на C спрямо P, да се докаже, че триъгълниците AMD и MKA са еднакви.

б) Да се намери радиусът на окръжността, описана около триъгълника AMD.

Задача 5. Да се намери най-малкото шестцифрено число, на което (в десетична бройна система) четвъртата цифра съвпада с първата, петата — с втората и шестата — с третата и което има точно шестнадесет различни делителя, включително 1 и самото число.

доц. И. Тонов, кмн Пл. Кошлуков

ОЛИМПИАДИ + ПОДГОТОВКА

В този брой ви предлагаме задачи от проведените през учебната 1993–1994 г. национални олимпиади в различни страни. Тези задачи са подходящи при подготовката ви за предстоящите III и IV кръг на Националната ни олимпиада, както и за Пролетния турнир по математика в гр. Казанлък в края на м. март 1995 г.

Алгебра

Задача 1. Да се пресметне сумата

$$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n \cdot \frac{n^2+n+1}{n!}.$$

(Канада)

Задача 2. На всеки две ненулеви реални числа a и b се съпоставя реално число $a*b$, така че $a*(b*c)=(a*b)*c$ и $a*a=1$. Да се реши уравнението $x*36=216$.

(Швеция)

Задача 3. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функция, за която $f(f(x))=f(x)+1994x$ за всяко $x\in\mathbb{R}$.

а) Да се докаже, че $f(x)=0 \iff x=0$.

б) Намерете поне една такава функция.

(Естония)

Задача 4. Нека $x_1,x_2,\ldots,x_n$ $(n\geq 2)$ са:

а) неотрицателни реални числа;

б) естествени числа,

за които $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$. Да се намери най-голямата стойност на сумата $S=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n$.

(Македония)

Задача 5. Да се намерят всички полиноми $p(x)$ с реални коефициенти, за които $(x-1)^2p(x)=(x-3)^2p(x+2)$.

(Израел)

Комбинаторика

Задача 6. Едно крайно множество S от точки с целочислени координати в равнината се нарича 2-съседно, ако за всяка точка (p,q) от S точно две от точките $(p+1,q)$, $(p,q+1)$, $(p-1,q)$ и $(p,q-1)$ са от S. За кои естествени числа n съществува 2-съседно множество, съдържащо точно n точки?

(Норвегия)

Задача 7. Да се намери броят на не еднаквите триъгълници с периметър 1994, чиито страни са цели числа.

(Великобритания)

Задача 8. Нека $V=\{1,2,\ldots,24,25\}$. Да се докаже, че всяко подмножество на V, имащо поне 17 елемента, съдържа две различни числа, чието произведение е точен квадрат.

(Холандия)

Задача 9. Полетата на квадратна таблица с размери 10×10 са номерирани с числата от 1 до 100 по следния начин: първият ред съдържа числата от 1 до 10 в растящ ред отляво надясно, вторият ред съдържа числата от 11 до 20 в растящ ред отляво надясно, ..., последният ред съдържа числата от 91 до 100 в растящ ред от ляво надясно. Да се променят знаците на 50 от числата, така че всеки ред и всеки стълб да съдържа 5 положителни и 5 отрицателни числа. Да се докаже, че след такава смяна на знаците сумата на всички числа в таблицата е 0.

(Италия)

Задача 10. В изпъкнал 1994-ъгълник M са прекарани част от диагоналите, така че от всеки връх излиза точно един диагонал. Под дължина на диагонал ще разбираме броя на страните, които той отделя от M (по-малкото от двете възможни числа). Нека $(d_1,d_2,\ldots,d_{997})$ са дължините на прекараните диагонали, подредени в не растящ ред. Могат ли диагоналите да се прекарат така, че:

а) $(d_1,d_2,\ldots,d_{997})=(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{991},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{6})$;

б) $(d_1, d_2, \ldots, d_{997}) = (\underbrace{8,8,8,8}_{4}, \underbrace{6,6,\ldots,6}_{985}, \underbrace{3,3,\ldots,3}_{8})$?

(Чехия)

Задача 11. Играчите A и B последователно извършват по един ход с коня върху шахматна дъска с размери 1994×1994. Играчът A може да премества коня само на съседен хоризонтал, а B само на съседен вертикал. Играта започва, като играчът A поставя коня на някакво поле и прави първия ход. При това е забранено конят да се поставя върху поле, на което вече е бил. Губи този играч, който не може да направи ход. Да се докаже, че играчът A има печеливша стратегия.

(Русия)

Геометрия

Задача 12. Нека Q е средата на страната AB на вписания четириъгълник $ABCD$, а S е пресечната точка на диагоналите му. Означаваме с P и R ортогоналните проекции на S върху AD и BC съответно. Да се докаже, че $PQ = QR$.

(Словения)

Задача 13. Нека AD е ъглополовящата на $\triangle ABC$ $(D \in BC)$, E е симетричната точка на D относно средата на BC и F е точка върху BC, за която $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAC$. Да се докаже, че

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c^3}{b^3}.$$

(Испания)

Задача 14. Нека AA_1, BB_1 и CC_1 са височините на остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър V. Ако лицата на $\triangle AC_1V$, $\triangle BA_1V$ и $\triangle CB_1V$ са равни, следва ли, че $\triangle ABC$ е равностранен?

(Чехия)

Задача 15. В равнината са дадени две успоредни прави k и l и окръжност, която не пресича k. От произволна точка A върху k се прекарват двете допирателни към окръжността, които пресичат l в точките B и C. Нека m е правата през A и средата на отсечката BC. Да се докаже че така получените прави m (при изменение на A върху k) имат обща точка.

(Полша)

Задача 16. Всяка от окръжностите S_1, S_2 и S_3 се допира външно до някаква окръжност S в точките A_1, B_1 и C_1 съответно и до две от страните на $\triangle ABC$ – S_1 до AC и AB, S_2 до BA и BC, S_3 до CA и CB. Да се докаже, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

(Русия)

Задача 17. През върховете A, B и C на $\triangle ABC$ се прекарват прави, които пресичат срещуположните им страни и дъги от описаната окръжност, съответно в точките M', M; N', N и P', P. Да се докаже, че ако

$$T = \frac{AM'}{MM'} + \frac{BN'}{NN'} + \frac{CP'}{PP'}$$

е минимално, то AM, BN и CP се пресичат в една точка. Да се докаже, че $T \geq 12$.

(Иран)

Теория на числата

Задача 18. Да се намерят всички тройки от положителни рационални числа (x, y, z), за които $x + y + z$, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$ и xyz са цели числа.

(Полша)

Задача 19. Да се намери най-малкото естествено число $n > 1$, за което средното аритметично на числата $1^1, 2^2, \ldots, n^2$ е точен квадрат.

(Великобритания)

Задача 20. Разликата от кубовете на две последователни естествени числа е равна на n^2. Да се докаже, че n е сума от квадратите на две последователни естествени числа.

(Иран)

Задача 21. Нека k е естествено число. Да се докаже, че уравнението $y^2 - k = x^3$ не може да има 5 решения от вида (x_1, y_1), $(x_2, y_1 - 1)$, $(x_3, y_1 - 2)$, $(x_4, y_1 - 3)$, $(x_5, y_1 - 4)$. Да се докаже, че ако уравнението има 4 решения от вида (x_1, y_1), $(x_2, y_1 - 1)$, $(x_3, y_1 - 2)$, $(x_4, y_1 - 3)$, то $k \equiv 17 (\mathrm{mod}\, 63)$

(Южна Корея)

Задача 22. Да се докаже, че ако естественото число n е свободно от квадрати (т.е. не се дели на точен квадрат $\neq 1$) и x, y са взаимно прости числа, то $(x + y)^3 \nmid x^n + y^n$.

(Румъния)

Задача 23. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е редица от естествени числа, за която a_1 не се дели на 5 и за всяко n е в сила равенството $a_{n+1} = a_n + b_n$, където b_n е последната цифра на a_n. Да се докаже, че редицата съдържа безбройно много степени на двойката.

(Русия)

КЕНГУРУ В БЪЛГАРИЯ

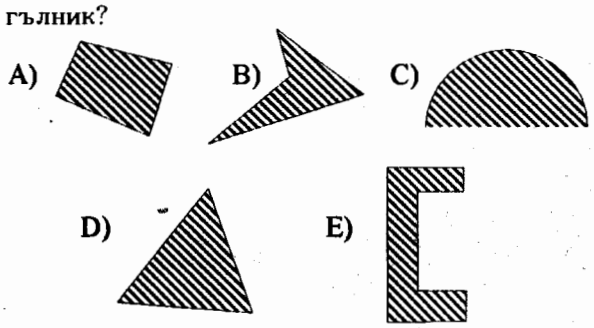
КЕНГУРУ е математическа игра-състезание за ученици и студенти от цял свят. Българското участие в него датира от 1993 г. Тази година то ще се проведе на 23 март. Най-важната особеност на състезанието е, че условията на задачите са на френски език. В продължение на 1 ч. 15 мин. се отговаря на 30 въпроса, като се избира един от посочените 5 отговора. Въпросите с номера от 1 до 10 се оценяват с 3 т., от 11 до 20 с 4 т., а от 21 до 30 с 5 т. Всеки погрешно посочен отговор получава отрицателна оценка, която е една четвърт от предвидената за правилния отговор. При непосочване на отговор точки не се присъждат. Всеки участник стартира с 30 т., за да се избегнат отрицателни крайни резултати. През миналата година българските участници бяха разделени на 6 групи с отделни въпроси и класирания: I група – 4 и 5 клас; II група – 6 и 7 клас; III група – подготвителен, 8 и 9 клас, без деветокласници от езикови и математически гимназии; IV група – всички ученици, които не попадат в предните групи, без 11 и 12 клас на езиковите и математическите гимназии; V група – 11 и 12 клас на езиковите и математическите гимназии; VI група – студенти.

НЕ ЗАБРАВЯЙТЕ ДАТАТА НА СЪСТЕЗАНИЕТО — 23 МАРТ 1995 Г.! ОЧАКВАТ ВИ ГОЛЕМИ НАГРАДИ, ВКЛЮЧИТЕЛНО ЕКСКУРЗИИ ДО ФРАНЦИЯ.

По-долу ви предлагаме примери със съответните им номера от теста през миналата година. Отговорите ще намерите в края на този брой.

I група

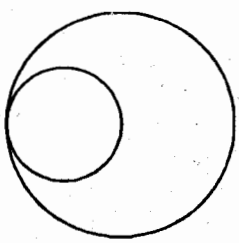
10. Коя от посочените фигури не е многоъгълник?



18. За кое от посочените числа цифрата на стотиците е равна на сбора от цифрите на десетиците и единиците?

A) 531 B) 2321 C) 311 D) 2010 E) 3111

25. Радиусът на големия кръг е 2 пъти по-голям от радиуса на малкия. Лицето на големия кръг е ...



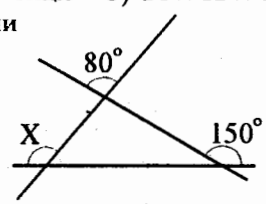
A) 3,14 пъти по-голямо B) 2 пъти по-голямо C) 1,5 пъти по-голямо D) 4 пъти по-голямо E) равно на лицето на малкия кръг.

II група

10. Чупим 6 дузини от по дузина яйца. Колко яйца са в омлета?

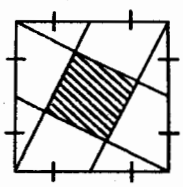
A) 60 дузини B) 12 десетици C) $24 \times 12 \times 3$ D) $6 \times (12 + 2)$ E) 18 дузини

17. Три прави се пресичат, както е показано на фигурата. Каква е мярката на ъгъл X?



A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) 110°

21. Големият квадрат има лице 1. Колко е лицето на централното защриховано квадратче?

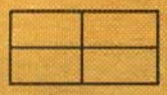


A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{6}$

E) нито един от посочените отговори

III група

6. Колко правоъгълника има на фигурата?

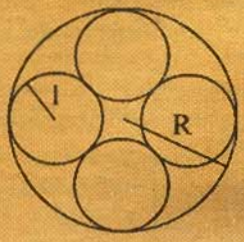


A) 4 B) 5 C) 6 D) 9 E) 16

14. В окръжността е вписана правилна звезда. Определете ъгъл γ.

A) 144° B) 30° C) 36° D) 72° E) друг отговор

22. На дъното на тенджера с формата на кръг са поставени четири цилиндрични чаши, както е показано на рисунката. Ако радиусът на дъното на една чаша е 1, колко е радиусът R на дъното на тенджерата?



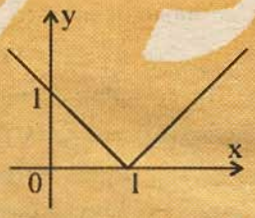
A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ C) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ D) $1+\sqrt{2}$ E) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

IV група

5. Кой от посочените четириъгълници в равнината има винаги четири оси на симетрия?

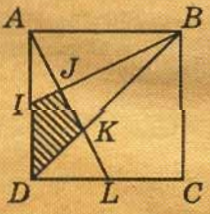
A) правоъгълника B) ромба C) квадрата D) равнобедрения трапец E) такъв четириъгълник не съществува

16. На коя функция е посочената графика?



A) $|x|+1$ B) $|x|-1$ C) $|x-1|$ D) $|x+1|$ E) $1-|x|$.

22. Намерете лицето на четириъгълника $IJKD$, ако $ABCD$ е квадрат със страна 2, I е средата на AD и L е средата на DC.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{7}{15}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{3}{5}$

V група

10. Даден е триъгълник ABC. Коя точка в равнината е барицентър на: $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$?

A) центърът на вписаната окръжност B) центърът на тежестта C) ортоцентърът D) центърът на описана окръжност E) нито една точка в равнината

17. Кое от посочените имена не е име на математик?

A) Лайбниц B) Нютон C) Архимед D) Лавоазие E) Ойлер

29. Адам, който живял преди 4000 години в Тексас, вложил един долар в Биг Бенг Банка при лихва 0,025%. Какво е приблизителното богатство на Адам към днешна дата?

A) 1,5 $ B) 2500000 $ C) 0,002 $ D) 2,7 $ E) 40 $

VI група

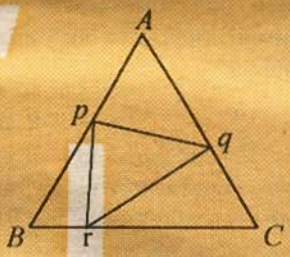
8. Колко решения има уравнението $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ в $[0, 2\pi]$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8

12. Една монета се хвърля последователно 4 пъти. Каква е вероятността да се паднат два пъти "стотинка" и два пъти "герб"?

A) 1 B) $\frac{9}{10}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{2}$

27. Триъгълникът ABC е равностранен със страна 1, а триъгълникът pqr е получен след прегъване на $\triangle ABC$ така, че точката A попада върху страната BC в точка r, където $Br = \frac{1}{4}BC$. Каква е дължината на отсечката pq?



A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{7}{20}\sqrt{21}$ C) $0,25(1+\sqrt{5})$ D) $\frac{13}{140}\sqrt{39}$ E) $0,4\sqrt{3}$.

КЕНГУРУ' 94

Международното състезание по математика КЕНГУРУ се проведе на 10 май 1994 г. Победителите за България от 4 до 7 клас бяха: 4 клас – Добромир Рахнев от Пловдив (63 т.); 5 клас – Лъчезар Аладжов от София (121 т.); 6 клас – Петър Рашков от София (110,4 т.); 7 клас – Георги Дзивков от Кърджали (87 т.). Наградите бяха екскурзии до Франция за 5 дни. Тръгнахме на 25 август със самолет на "Балкан" за Париж. На другия ден заминахме за гр. Бурж. Там се провеждаше Фестивалът на Космоса и ние бяхме включени в него. Имаше специални експериментални изстрелвания на ракети, балони и др. Бурж е малко градче с много замъци, катедрали, красиви къщи и затова се посещава от много туристи. Много ни хареса. На връщане през Париж посетихме музея по естествена история. Там видяхме праисторически животни. Разделихме се с пожелания за нови срещи с Франция.

Петър Рашков, ученик от София.

М+ постър

(Що ли значи? - На стената п задачи!!!)

5 клас

1. Естествените числа от 1 до 1995 са написани едно до друго. Да се определи броят на цифрите на полученото число и коя от цифрите е използвана най-много, а коя — най-малко.

2. Вместо буквите да се напишат цифри, така че да е вярно равенството:

ДВЕ.ДВЕ+ТРИ.ТРИ=ЧЕТИРИ+ДЕВЕТ,

като на различните букви съответстват различни цифри, а на еднаквите букви — еднакви цифри.

6 клас

3. Да се напишат двуцифрените и трицифрените числа, които са квадрати на цели числа и след разместване на някои от цифрите пак са квадрати на цели числа.

4. Вътре в изпъкнал петоъгълник със страни 1 и лице 9 е взета точка P така, че разстоянието ѝ до едната страна на петоъгълника е 1. Да се определят разстоянията от P до останалите страни, ако те се изразяват чрез различни прости числа.

7 клас

5. Да се реши уравнението

$$(x^2+x+1)^3=(x^2-x+1)^3+6x(x^2+1)^2.$$

6. Успоредниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ са разположени така, че страните AB и CD пресичат страната A_1B_1 съответно в точки A_2 и B_2, а страната C_1D_1 — съответно в точки C_2 и D_2, като $A_2B=C_2D$ и $A_2B_1=C_2D_1$. Да се докаже, че правите AC, BD, A_1C_1, B_1D_1, A_2C_2, B_2D_2 се пресичат в една точка.

8 клас

7. Да се намери най-голямото цяло число, за което е изпълнено неравенството

$$\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{2}.x+0.5}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8. Върху хипотенузата AB на правоъгълен $\triangle ABC$ е взета точка D и са построени окръжности с диаметри AD и BD, които пресичат страните AC и BC съответно в точки E и F. Да се докаже, че точките A, B, E, F лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато EF е допирателна към двете окръжности.

9 клас

9. Да се намерят реалните решения на системата

$$\begin{cases} 5x^2-4xy+y^2=2(3x-y-1) \\ x^5+y^4=2xy. \end{cases}$$

10. Да се докаже, че изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е правоъгълник тогава и само тогава, когато за всяка вътрешна за него точка P е изпълнено равенството $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$.

10 клас

11. Да се докаже, че за всички допустими стойности на x е в сила неравенството

$$\operatorname{tg}(\sin^2 x)<\operatorname{cotg}(\cos^2 x).$$

12. Разстоянията на ортоцентъра на остроъгълен триъгълник до страните му са 1, $\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Да се намери лицето на триъгълника.

11 клас

13. Да се сравнят по големина без таблици и калкулатор числата $\cos\frac{\pi}{7}$ и $0,9$.

14. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 1. Да се определи видът и лицето на сечението на куба с равнина, минаваща през медицентъра на $\triangle BC_1D$ и перпендикулярна на A_1B.

12 клас

15. Нека x и y са реални числа, за които

$$\log_{(y+1)}(x+1)=\log_y x.$$

Вярно ли е че $x=y$?

16. Върху страните BC и AC на $\triangle ABC$ са взети съответно точки A_1 и B_1. Отсечките AA_1 и BB_1 се пресичат в точка P, като $S_{A_1PB_1C}=S_{\triangle ABP}$. Да се докаже, че

$$S_{\triangle A_1B_1C}\leq\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}.$$

Кога се достига равенството?

Задачите са предложени от Румен Козарев, Светлозар Дойчев и Христо Лесов.

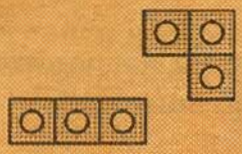
Конкурс, подготвен съвместно с

За вас, почитатели на ЛЕГО и МАТЕМАТИКА ПЛЮС!

В четирите броя на списанието от тази година се публикува по една занимателна задача. Фирма COMSED осигурява по 3 сувенирни награди за всеки брой. Наградите са за тези, които изпратят в срок вярно решение на съответната задача. Ако правилните решения са повече от 3, наградите ще бъдат разпределени чрез жребий. Читателите, които решат задачите и от четирите броя на списанието, ще участват в томболата за голямата награда ЛЕГО – конструктор 8837.

Очакваме вашите писма!

Ето и задачата за бр. 1, 1995 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС



Разполагате с по 5 правоъгълни и „ъглови“ елементи от игрите ЛЕГО. Видът им е показан вляво. Покрийте с тях дъното на правоъгълна кутия с размери 6×5.

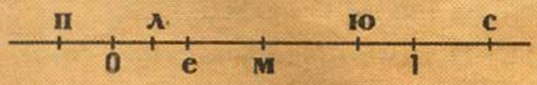
Краен срок за изпращане на решения 20 април 1995 г.

М+ томбола

ПОПЪЛНЕТЕ ВАШИТЕ ОТГОВОРИ, ЗА ДА УЧАСТВАТЕ В ТОМБОЛАТА М+

1. На чертежа е показана цифрата 8 от циферблат на електронен часовник. Цифрите от 0 до 9 се получават, като се махат някои от отсечките на осмицата. Отбележете отсечката, която се среща най-често при изписване на всички цифри.

2. На числовата ос са отбелязани числата **0**, **1**, **е**, **м**, **п**, **л**, **ю**, **с**, както е показано на чертежа. Едно от числата **п**, **л**, **ю**, **с** е произведението на числата **е** и **м**. Кое е това число?



а) **п** б) **л** в) **ю** г) **с**

$\mathcal{M}+$ ИГРА

Ако желаете да се включите в разпределението на наградите ЛЕГО за брой 1 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете този фиш, изрежете го и заедно с решение на задачата го изпратете не по-късно от 20 април 1995 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име ..... Фамилия .....

код ..... Селище .....

ул. .....

Изпращайте на адрес:
София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" № 49
Мадлен Николова Петрова (за $\mathcal{M}+$ ИГРА)

ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ: В разпределение на наградите участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!

$\mathcal{M}+$ томбола

Ако желаете да се включите в лотарийното разпределение на предметните награди за томболата $\mathcal{M}+$ в брой 1 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете лицевата страна на фиша, изрежете го и го изпратете не по-късно от 20 април 1995 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име ..... Фамилия .....

код ..... Селище .....

ул. .....

Изпращайте на адрес:
София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" № 49
Мадлен Николова Петрова (за $\mathcal{M}+$ ТОМБОЛА)

ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ: В томболата участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!

М+ томбола

Наградите за бр. 3, 1994 г.

Apple Center All Ltd.

Софтуер за Macintosh

Валентин Герджиков, Русе

Наградите са осигурени от фирма "Орион-3 ООД", Благоевград

Маратонки

1. Диана Пеева, Враца
2. Людмила Благоева, Разград

Електронен калкулатор

1. Васил Шейтанов, София
2. Ева Обрешкова, Габрово

Електронен часовник

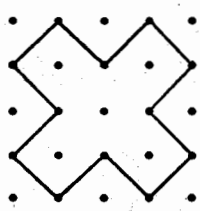
1. Йорданка Андреева, София
2. Гергана Тилева, София

Книги с математическа тематика

1. Ангелина Фурджева, с. Ивайло
2. Ясен Сидеров, София
3. Антон Кавалов, Смолян
4. Емилиан Сарайдаров, с. Присово
5. Светла Върбанова, Казанлък
6. Васил Андреев, Добрич
7. Анелия Парапанова, Ст. Загора
8. Стефка Върбанова, Казанлък
9. Екатерина Костадинова, Благоевград
10. Димитър Георгиев, Ямбол

Наградите бяха изтеглени на 10.12.1994 г. в гр. Стара Загора по време на Математическия турнир „Иван Салабашев".

Ето и верните отговори на задачите:
1 зад. — 3; 2 зад. — вж. чертежа



Конкурс ЛЕГО

До изтичане на крайния срок в редакцията бяха получени 328 верни отговора на задачата от бр. 3, 1994 г. на МАТЕМАТИКА ПЛЮС. Верният отговор е 5.
Ето имената на петимата, които след теглене на жребий бяха определени да получат сувенирните награди ЛЕГО:

1. Надежда Димитрова, Ст. Загора
2. Александър Великов, Русе
3. Красимир Пенчовски, София
4. Калоян Петков, Плевен
5. Стефан Миревски, Ловеч

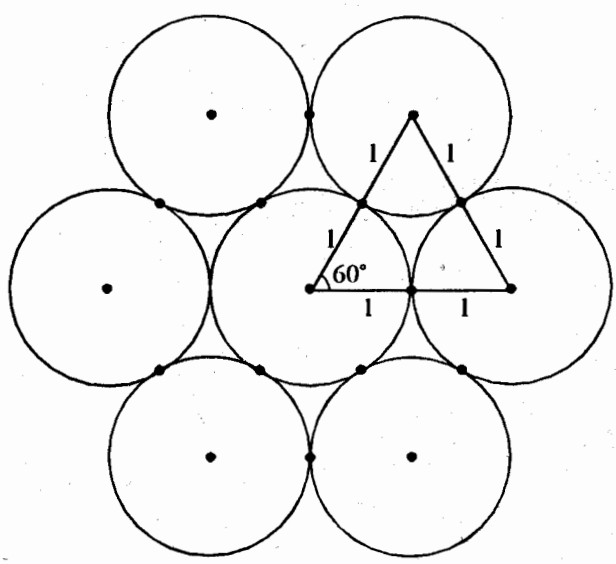
ЗАДАЧА ЗА КОНТАКТНИТЕ ЧИСЛА

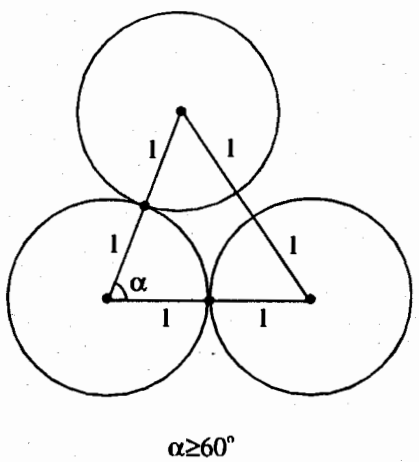
н.с. Петър Бойваленков, Институт по математика – БАН

ВЪВЕДЕНИЕ

Задачата за определяне на максималния възможен брой непресичащи се сфери с радиус 1, които се допират едновременно до сфера с радиус 1 в пространството, има дълга история. Този брой се бележи с τ_3 и е известен в литературата като kissing number (още: контактно число или число на Нютон). Задачата за намиране на τ_3 е известна като Thirteen Spheres Problem или Задача за тринайсетте сфери: ***Възможно ли е в тримерното пространство 13 сфери с радиус 1 да се допират едновременно до сфера с радиус 1 и да не се пресичат помежду си?*** Нютон е твърдял, че това е невъзможно (т.е. $\tau_3 = 12$, виж Пример 3 по-долу), а Грегъри е настоявал, че $\tau_3 = 13$. Правилният отговор на този въпрос е $\tau_3 = 12$, но това е доказано около 200 години по-късно. По-нови (но не тривиални) доказателства са получени от Шюте и Ван дер Варден [3] и Васерман [4].

Аналогичната задача в равнината е тривиална, защото най-много 6 окръжности с радиус 1 могат едновременно да се допират до единична окръжност, като не се пресичат помежду си. Това следва от фиг. 1).





Фиг. 1. $\tau_2 = 6$

Тук ще разгледаме едно обобщение на Задачата за тринайсетте сфери, известно в литературата като Задача за контактните числа (Kissing Number Problem).

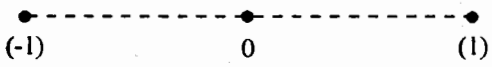
СФЕРИЧНИ КОДОВЕ

Нека n е естествено число. Дефинираме Евклидовата сфера $\mathbf{S}^n$ като множеството от всички наредени $n-$орки реални числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такива, че

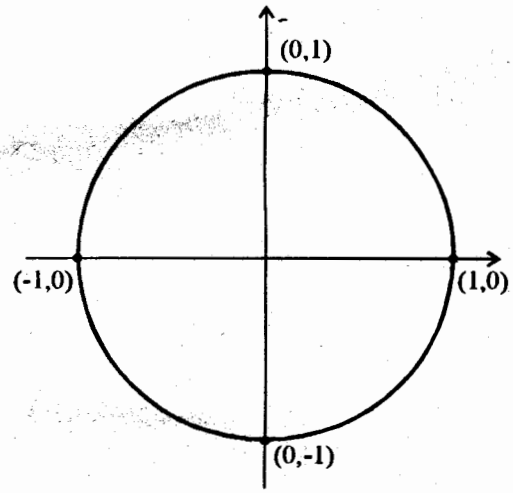
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Самите $n-$орки $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{S}^n$ ще наричаме точки.

Пример 1. Сферата $\mathbf{S}^1$ се състои от две точки — (1) и (-1), а сферата $\mathbf{S}^2$ е окръжност с център началото на равнинна координатна система и радиус 1 (т. н. единична окръжност). Аналогично $\mathbf{S}^3$ е сфера с център началото на пространствена координатна система и радиус 1.



Фиг. 2. Сферата $\mathbf{S}^1$



Фиг. 3. Сферата $\mathbf{S}^2$

Ако $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ са точки от $\mathbf{S}^n$, дефинираме тяхното скаларно произведение

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

и Евклидовото разстояние между x и y по формулата

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Тъй като $d(x, y) = \sqrt{2(1 - (x, y))}$ и $|(x, y)| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2) = 1$ (използваме неравенството $|x_iy_i| \leq \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2)$), получаваме $0 \leq d(x, y) \leq 2$.

Всяко непразно крайно подмножество W на $\mathbf{S}^n$ се нарича сферичен код. Сферичните кодове имат изключително важни приложения в теорията и практиката на кодирането, предаването и декодирането на информация.

За всеки сферичен код $W \subset \mathbf{S}^n$ дефинираме неговото минимално разстояние

$$d(W) = \min\{d(x, y) | x, y \in W\}$$

като на най-малкото възможно разстояние между точки от кода. Специален интерес представляват сферичните кодове с минимално разстояние $d(W) = 1$, които ще наричаме за краткост $1-$кодове.

Пример 2. Върху тривиалната сфера $\mathbf{S}^1$ има само три сферични кода: множествата $\{1\}$, $\{-1\}$ и $\{1, -1\}$. Върховете на многоъгълник, вписан в единичната окръжност $\mathbf{S}^2$, образуват сферичен код. Неговото минимално разстояние е равно

на най-малката страна на многоъгълника. Не е трудно да се покаже, че максималният брой точки на 1–код върху $\mathbf{S}^2$ е 6 и такъв код образуват само върховете на правилен шестоъгълник, вписан в $\mathbf{S}^2$.

Пример 3. Точките от вида $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ за всевъзможните знаци + и – и всевъзможните позиции на ненулевите елементи са 12 на брой и образуват сферичен код върху сферата $\mathbf{S}^3$.

Пример 4. Точките от вида $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ за всевъзможните знаци + и – и всевъзможните позиции на ненулевите елементи са 24 на брой и образуват сферичен код върху сферата $\mathbf{S}^4$.

Задача 1. Да се докаже, че кодовете от Примери 3 и 4 са 1–кодове.

ЗАДАЧАТА ЗА КОНТАКТНИТЕ ЧИСЛА

От казаното по-горе се вижда, че Задачата за контактните числа е всъщност задача за определяне на максималния възможен брой точки на сферичен 1–код върху $\mathbf{S}^n$. Действително, ако няколко сфери с радиус 1 се допират до $\mathbf{S}^n$ без да се пресичат помежду си, то допирните точки образуват сферичен 1–код. Обратно, ако $W \subset \mathbf{S}^n$ е 1–код, то сферите с радиус 1, които се допират до $\mathbf{S}^n$ в точките от W, не се пресичат помежду си.

Максималният брой точки на сферичен 1–код върху $\mathbf{S}^n$ се бележи с τ_n и е известен в литературата като kissing number (още: контактно число или число на Нютон). Съответно задачата за определянето на τ_n е известна като kissing number problem или задача за контактните числа.

Понастоящем са известни само пет точни стойности на τ_n: тривиалните $\tau_1 = 2$ и $\tau_2 = 6$; знаменитият обект на спор между Нютон и Грегъри през 17-ти век $\tau_3 = 12$ (доказано в средата на 19-ти век); $\tau_8 = 240$ и $\tau_{24} = 196560$, получени през 1978 г. независимо от Левенщейн [1] и Одлизко-Слоен [2].

В общия случай са известни редица долни и горни граници за числата τ_n, $n \geq 4$. Например, известно е [2], че: $24 \leq \tau_4 \leq 25$, $40 \leq \tau_5 \leq 46$, $72 \leq \tau_6 \leq 82$ и т.н.

Долните граници за τ_n се получават чрез конкретни конструкции. Така например оценката $\tau_4 \geq 24$ следва от пример 4. Главният ни интерес обаче ще е насочен към намирането на горни граници за контактните числа τ_n. Основният метод за тяхното получаване използва така наречените полиноми на Гегенбауер.

ГОРНИ ГРАНИЦИ ЗА КОНТАКТНИТЕ ЧИСЛА

Полиномите на Гегенбауер $\{P_i^{(n)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ се дефинират рекурентно чрез равенствата

$$P_0^{(n)}(t) = 1, \;\; P_1^{(n)}(t) = t,$$

$$(i+n-2)P_{i+1}^{(n)}(t) = (2i+n-2)tP_i^{(n)}(t) - iP_{i-1}^{(n)}(t), \;\; i = 1, 2, \ldots .$$

Лесно може да се докаже по индукция, че полиномите $P_{2i}^{(n)}(t)$ имат ненулеви коефициенти само пред четните степени на t, а $P_{2i+1}^{(n)}(t)$ – само пред нечетните. Също по индукция се вижда, че старшият коефициент на $P_i^{(n)}(t)$ е положителен, $P_i^{(n)}(1) = 1$ и $P_i^{(n)}(-1) = (-1)^i$.

Нека $f(t) = a_k t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ е полином с реални коефициенти. Лесно се вижда, че съществуват еднозначно определени реални числа $f_0, f_1, \ldots, f_k$

такива, че

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} f_i P_i^{(n)}(t). \tag{1}$$

Действително, от сравняването на коефициентите пред еднаквите степени на променливата получаваме триъгълна система от $k+1$ линейни уравнения с $k+1$ неизвестни $f_k, f_{k-1}, \ldots, f_1, f_0$, които определяме последователно по единствен начин.

Както ще видим по-долу, най-голям интерес за нас представлява коефициентът f_0 в развитието (1). Затова привеждаме (без доказателство) следната формула:

$$f_0 = a_0 + \frac{a_2}{n} + \frac{3a_4}{n(n+2)} + \frac{3.5a_6}{n(n+2)(n+4)} + \cdots. \tag{2}$$

Най-добрите известни горни граници за контактните числа τ_n, $n \geq 4$ са получени от Левенщейн [1], от Одлизко и Слоен [2] и от Додунеков и автора [6] с помощта на следната теорема [1,2]:

Теорема 1. Нека $n \geq 3$ и $f(t)$ е полином с реални коефициенти, за който са изпълнени следните условия:
(A1) $f(t) \leq 0$ за $-1 \leq t \leq 1/2$;
(A2) коефициентите в развитието (1) удовлетворяват неравенствата $f_0 > 0$, $f_1 \geq 0$, $\ldots$, $f_k \geq 0$.

Тогава $\tau_n \leq \dfrac{f(1)}{f_0} = \dfrac{f_0 + f_1 + \cdots + f_k}{f_0}$.

Ще се спрем на някои приложения на Теорема 1 с полиноми от вида $f(t) = A^2(t)(t-1/2)$ или $f(t) = A^2(t)(t+1)(t-1/2)$. Разглеждането на тези полиноми е естествено, защото те автоматично изпълняват условието (A1), а при подходящ избор на $A(t)$ – и условието (A2). Намирането на добри горни граници с помощта на полиноми от по-общ вид води до значителни усложнения [6], които се преодоляват с помощта на компютър.

Да се опитаме да намерим горна граница за третото контактно число τ_3 с помощта на полином от вида

$$f(t) = (t+a)^2(t+1)(t-\frac{1}{2}) = t^4 + (2a+\frac{1}{2})t^3 + (a^2+a-\frac{1}{2})t^2 + (\frac{a^2}{2}-a)t - \frac{a^2}{2}.$$

По формулата (2) за f_0 получаваме

$$f_0 = a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} = \frac{-a^2+2a+1/5}{6}.$$

Да разгледаме функцията

$$F(a) = \frac{f(1)}{f_0} = \frac{6(1+a)^2}{-a^2+2a+1/5}.$$

В интервала, където $F(a) > 0$, тази функция има минимум при $a = 2/5$ и този минимум е равен на 14. Тъй като полиномът $f(t) = (t+2/5)^2(t+1)(t-1/2)$ удовлетворява и условието (A2) (проверете!), получаваме $\tau_3 \leq 14$ (виж [5, Задача 21.9]).

По подобен начин се намират и следните оценки:

Задача 2. Покажете, че $\tau_4 \leq 26$, като използвате полинома $f(t) = (t^2+t+1/6)^2(t-1/2)$.

Задача 3. Покажете, че $\tau_5 \leq 48$, като използвате полинома $f(t) = (t^2 + 2t/7 + 5/49)^2(t - 1/2)$.

СПЕКТЪР НА СФЕРИЧНИ КОДОВЕ

За да подобрим получените оценки за τ_3, τ_4 и τ_5, ще е необходимо да изследваме по-внимателно възможностите за тяхното достигане. Затова е необходимо да въведем понятието спектър на сферичен код.

Нека $W \subset \mathbf{S}^{n-1}$ е сферичен код и $x \in W$. Системата от цели неотрицателни числа $\{A_t(x) | -1 \leq t < 1\}$, където $A_t(x) = |\{y \in W | (x,y) = t\}|$ е броят на точките от W на разстояние $\sqrt{2(1-t)}$ от x, се нарича спектър на W по отношение на x. Системата от числа $\{A_t | -1 \leq t < 1\}$, където

$$A_t = \frac{1}{|W|} \sum_{x \in W} A_t(x),$$

се нарича спектър на кода W ($|W|$ е броят на елементите на W).

Пример 3 – Продължение. Сферичният 1–код от Пример 3 има спектър $A_{-1} = 1$, $A_{1/2} = A_{-1/2} = 4$ и $A_0 = 2$.

Пример 4 – Продължение. Сферичният 1–код от Пример 4 има спектър $A_{-1} = 1$, $A_{1/2} = A_{-1/2} = 8$ и $A_0 = 6$.

Очевидно числата A_t са рационални, неотрицателни и имат знаменател, който дели $|W|$. Ако W е сферичен 1–код, за неговия спектър имаме $A_t = 0$ за $1/2 < t < 1$, тъй като не съществуват точки от W, чието скаларно произведение е в интервала $(1/2, 1)$.

По-нататъшното подобряване на получените чрез Теорема 1 граници може да стане след изследване на спектъра на кодове, които биха достигнали тези граници. В сила е следната теорема:

Теорема 2. Нека $f(t)$ удовлетворява условията на Теорема 1 за някое $n \geq 3$ и $W \subset \mathbf{S}^n$ е сферичен 1–код, такъв че $|W| = f(1)/f_0$. Тогава всевъзможните скаларни произведения на точки от кода W са корени на полинома $f(t)$. Нещо повече, спектърът на кода W удоволетворява системата линейни уравнения

$$\sum_{t<1} A_t P_i^{(n)}(t) = -P_i^{(n)}(1) = -1, \tag{3}$$

където се разглеждат само тези i, за които $f_i > 0$.

Ако броят на ненулевите коефициенти f_i в развитието на $f(t)$ от Теорема 2 е по-голям или равен на броя на корените от $f(t)$, то линейната система (3) има поне толкова уравнения, колкото неизвестни. Следователно в този случай спектърът на кода W може да бъде пресметнат. В частност, ако системата (3) няма решение или нейното решение е такова, че за някое $t \in [-1, 1)$ числото A_t е отрицателно, ирационално или рационално със знаменател, който не дели $|W|$, то кодът W не съществува. Да приложим този подход за получените по-горе оценки за τ_3, τ_4, τ_5.

Да допуснем, че съществува сферичен 1-код W върху сферата $\mathbf{S}^3$ с 14 точки (т.е. $\tau_3 = 14$). Прилагайки Теорема 2 за този код и за полинома $f(t) = (t + 2/5)^2(t + 1)(t - 1/2)$, получаваме, че $A_t = 0$ за $t \notin \{-2/5, -1, 1/2\}$. Нещо повече, числата $A_{-1} = x, A_{-2/5} = y, A_{1/2} = z$ удоволетворяват системата (3):

$$-x - \frac{2y}{5} + \frac{z}{2} = -1$$
$$x - \frac{13y}{50} - \frac{z}{8} = -1$$

$$-x + \frac{11y}{25} - \frac{7z}{16} = -1.$$

Оттук намираме $x = 105/81$, $z = 448/81$, $y = 500/81$. Тъй като знаменателите на A_{-1}, $A_{-2/5}$ и $A_{1/2}$ не делят $|W| = 14$, кодът W не съществува. Следователно $\tau_3 \leq 13$.

Задача 4. Покажете, че $\tau_4 \leq 25$ с помощта на полинома от Задача 2.

Задача 5. Покажете, че $\tau_5 \leq 47$ с помощта на полинома от Задача 3.

ОСМОТО КОНТАКТНО ЧИСЛО

Ще конструираме сферичен 1–код върху $\mathbf{S}^7$ с 240 точки.

Задача 6. Докажете, че кодът $W_1 = \left\{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)\right\} \subset \mathbf{S}^7$, образуван при всевъзможните знаци + и − и всевъзможните позиции на двата ненулеви елемента, има минимално разстояние $d(W_1) = 1$.

Задача 7. Докажете, че кодът $W_2 = \left\{\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \ldots, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right\} \subset \mathbf{S}^7$, образуван при всевъзможните знаци + и −, има минимално разстояние $d(W_2) = 1$.

Задача 8. Докажете, че кодът $W = W_1 \cup W_2 \subset \mathbf{S}^7$ има минимално разстояние $d(W) = 1$.

От задача 8 следва, че $W \subset \mathbf{S}^7$ е сферичен 1–код. Тъй като $|W_1| = 2\binom{8}{2} = 112$ и $|W_2| = 2^8 = 128$, имаме $|W| = 112 + 128 = 240$. Следователно $\tau_8 \geq 240$.

От друга страна, с помощта на Теорема 1 и полинома

$$f(t) = t^2(t + \frac{1}{2})^2(t + 1)(t - \frac{1}{2})$$

може да се докаже (проверете!), че $\tau_8 \leq 240$. Следователно $\tau_8 = 240$. От системата (3) можем да пресметнем и спектъра на получения код. Имаме $A_{-1} = 1$, $A_{1/2} = A_{-1/2} = 56$ и $A_0 = 126$.

Подобни кодове могат да бъдат построени и в други случаи, но за съжаление те се оказват далеч от горните граници, получени по Теорема 1 или Теорема 2. Така, че задачата за контактните числа остава (и дълго време ще стои) като един предизвикателен отворен проблем.

Литература

[1] V.I.Levenshtein, On bounds for packings in n–dimensional Euclidean space, *Soviet Math. Doklady*, **20**, 1979, 417-421.

[2] A.M.Odlyzko, N.J.A.Sloane, New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions, *J. Comb. Theory A*, **26**, 1979, 210-214.

[3] K.Schutte, B.L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Annalen*, **125**, 1953, 325-334.

[4] A.J.Wasserman, The thirteen spheres problem, *Eureka*, **39**, 1978, 46-49.

[5] Й.Табов, К.Банков, Математически състезания по света, Наука и изкуство, София, 1988.

[6] P.G.Boyvalenkov, S.M.Dodunekov, Some new bounds on the kissing numbers, Sixth Joint Swedish-Russian Intern. Workshop on Inform. Theory, Möele, 1993, 389-393.

[7] J.H.Conway, N.J.A.Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer – Verlag, New York, 1988.

М+ ПРАКТИКУМ

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛАС
в езикови училища,
математически гимназии,
техникуми

В два последователни броя МАТЕМАТИКА ПЛЮС ще публикува задачи за подготовка на ученици, които ще кандидатстват в езикови училища, математически гимназии и техникуми. В този брой ви предлагаме задачи по геометрия. Те са подбрани и подредени така, че да илюстрират основните факти и "хватки", необходими за изпита.

След задачите по геометрия ви предлагаме примерни изпитни теми. Първите две от тях са предназначени за езикови и математически гимназии, както и за техникуми с разширено изучаване на западен език. Третата тема е предназначена за техникуми след 8 клас, а след нея публикуваме примерна тема за Националната природо-математическа гимназия. Препоръчваме ви да работите по всяка тема в продължение на 4 часа – толкова, колкото е времето и на самия изпит.

По всички възникнали въпроси можете да се обръщате към редакцията. Ние сме готови да ви помогнем за успешното ви представяне на изпита.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС!

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

Юлия Георгиева, учителка в 151-во СОУПИ, София
Пенка Нинкова, експерт по математика в РИ на МОНТ, София

Ъгъл. Съседни и противоположни ъгли. Ъглополовяща на ъгъл.

1. Точките A, B и C лежат на една права a, като B е между A и C, а M и N са точки от двете полуравнини с контур правата a, такива че $\sphericalangle MBN = 90°$. Ако $\sphericalangle MBA = 48°$, на колко градуса е равен $\sphericalangle NBC$?

2. Единият от четирите ъгъла, образувани от две пресичащи се прави, е с 264° по-малък от сбора на останалите три. Определете градусната мярка на всеки един от тези четири ъгъла.

3. Даден е $\sphericalangle AOB = 54°$ и лъч $OM^{\rightarrow}$ вътрешен за него, такъв че $\sphericalangle AOM : \sphericalangle MOB = 1 : 5$. Лъчът $ON^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на съседния ъгъл на $\sphericalangle AOB$. Намерете отношението на $\sphericalangle MOB$ и $\sphericalangle BON$.

4. Единият от два съседни ъгъла е с 40 % по-голям от другия. Да се намерят градусните мерки на двата ъгъла.

5. Ъгълът AOB е разделен от вътрешен лъч $OC^{\rightarrow}$ на два ъгъла, разликата между които е 50°. Каква е градусната мярка на ъгъла заключен между $OC^{\rightarrow}$ и ъглополовящата OL на $\sphericalangle AOB$?

Сбор от ъглите и външен ъгъл на триъгълник. Равнобедрен триъгълник.

6. Да се определят ъглите на равнобедрен триъгълник, ако единият от външните му ъгли е: а) 98°; б) 72°.

7. Нека с γ е означен ъгълът между бедрата на един равнобедрен триъгълник. Да се определи

ъгълът, заключен между височината към бедрото и основата на този равнобедрен триъгълник.

8. Височината към бедрото на един равнобедрен триъгълник сключва с другото бедро ъгъл с 6° по-малък от ъгъла, който тя сключва с основата. Да се определят:

а) ъглите на триъгълника;

б) ъгълът между тази височина и ъглополовящата към другото бедро на триъгълника.

9. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. През върха C е построена права, пресичаща страната AB в точка P, така че $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACP = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCP$. Да се докаже, че CP е височина в $\triangle ABC$.

10. В $\triangle ABC$ ъглите при върховете A, B и C са означени съответно с α, β и γ. Да се докаже, че:

а) ако O е пресечната точка на ъглополовящите през върховете A и B, то $\sphericalangle AOB = 90° + \frac{\gamma}{2}$;

б) ако L е пресечната точка на външните ъглополовящи през върховете A и B, то $\sphericalangle ALB = 90° - \frac{\gamma}{2}$;

в) ако CC_1 е ъглополовяща през върха C и $\alpha > \beta$, то $\sphericalangle CC_1B - \sphericalangle CC_1A = \alpha - \beta$;

г) ако H е пресечна точка на височините през върховете A и B, то $\sphericalangle AHB = \alpha + \beta$.

11. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle ACB = 90°$ и $AC \neq BC$. Да се докаже, че:

а) височината към хипотенузата разделя правия ъгъл на ъгли, равни на острите ъгли на триъгълника;

б) ъгълът заключен между височината към хипотенузата и ъглополовящата на правия ъгъл е с 45° по-малък от един от острите ъгли на триъгълника.

12. Да се докаже, че ако един от външните ъгли на триъгълник е два пъти по-голям от несъседен на него ъгъл на триъгълника, то този триъгълник е равнобедрен.

13. Върху основата AB и бедрото CB на равнобедрения $\triangle ABC$ са взети точки M и N така, че $\sphericalangle ACM$ е два пъти по-голям от $\sphericalangle BMN$. Докажете, че $\triangle CMN$ е равнобедрен.

Свойство на катет в правоъгълен триъгълник, лежащ срещу ъгъл 30°. Симетрала на отсечка.

14. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90°$) с остър $\sphericalangle B = 30°$. Ако ъглополовящата AL е 3см, да се определи големината на катета BC.

15. В правоъгълния $\triangle ABC$ ъгъл A е 60°, а CH е височина към хипотенузата. Ако $AH = 2$ см, да се определи големината на хипотенузата.

16. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с остър $\sphericalangle A = 30°$ и височина CH. Ако хипотенузата AB и катетът AC са означени съответно с c и b, да се изразят чрез b и c:

а) другият катет и височината CH на $\triangle ABC$;

б) частите, на които височината разделя хипотенузата на триъгълника.

17. В $\triangle ABC$ през средата M на страната AB е издигнат перпендикуляр към AB, който пресича страната AC във вътрешна точка Q. Ако $AQ = 5$ см и периметърът на ABC е по-голям от периметъра на $\triangle CQB$ с 4 см, да се намери периметърът на $\triangle ABQ$.

18. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle C = \sphericalangle A + \sphericalangle B$. Върху страната AC е взета точка L, такава че $CL = \frac{1}{3}CA$. Ако $\sphericalangle CAB$ е равен на $\sphericalangle ABL$, да се определят градусните мерки на ъглите на $\triangle ABC$.

19. Симетралите S_1 и S_2 на страните AC и BC на тъпоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C > 90°$, $AC < BC$) пресичат страната AB съответно в точките M и N. Ако P е пресечната точка на S_1 и S_2, да се докаже, че CP е ъглополовяща на $\sphericalangle MCN$.

Еднакви триъгълници. Признаци за еднаквост на триъгълник.

20. Докажете, че:

а) перпендикулярът към ъглополовящата на един ъгъл отсича равни отсечки от раменете му;

б) всяка точка от ъглополовящата на един ъгъл е на равни разстояния от раменете му;

в) разстоянията от трите върха на един триъгълник до правата, съединяваща средите на две негови страни, са равни;

г) медианата, минаваща през който и да е връх на триъгълника, е на равни разстояния от другите му два върха.

21. Докажете, че два триъгълника са еднакви, ако имат съответно равни:

а) два ъгъла и ъглополовяща на единия от тях;

б) два ъгъла и ъглополовяща на третия;

в) две страни и медиана към едната от тях;

г) два ъгъла и височина през върха на единия от тях;

д) два ъгъла и височина, спусната през върха на третия ъгъл;

е) една страна, един прилежащ към нея ъгъл и неговата ъглополовяща;

ж) една страна, един от прилежащите ѝ ъгли и височината, минаваща през върха на този ъгъл.

22. Да се провери верността на следните твърдения:

а) два триъгълника са еднакви, ако имат съответно равни по две страни и височина към третата;

б) два триъгълника са еднакви, ако имат съответно равни по две страни и височина към една от тях.

23. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ са построени квадратите $ACPQ$ и $BCMN$ извън $\triangle ABC$. Да се докаже, че:
а) ако $\sphericalangle ACB$ не е $90°$, то $\triangle CAM \cong \triangle CPB$;
б) ако $\sphericalangle ACB = 90°$ и CT е медианата в $\triangle ABC$, то $CT \perp PM$.

24. Ъгълът при върха C на равнобедрен $\triangle ABC$ е $120°$. Върху страната AB е взета точка M, така че $AM : MB = 1 : 2$ и CD е медиана в $\triangle ABC$ ($D \in AB$).
а) Докажете, че разстоянията от точка M до CA и CD са равни.
б) Намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACM$.

Успоредник и трапец.

25. Диагоналите на успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O. Точките M и P са от отсечките AO и CO, такива че $DM \| BP$. Докажете, че:
а) $MBPD$ е успоредник;
б) ако $2AM = AC - BD$, то $MBPD$ е правоъгълник.

26. Ако в четириъгълника $ABCD$ диагоналите са ъглополовящи на ъглите му, да се докаже, че този четириъгълник е:
а) успоредник;
б) ромб.

27. В $\triangle ABC$ ъгъл ACB е $120°$. Върху продължението на страната CB в посока от B към C е взета точка M, така че $CM = CA$. Ъглополовящите на $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle AMC$ се пресичат в точка P. Докажете, че $APCM$ е ромб.

28. Диагоналите на ромб $ABCD$ се пресичат в точка O, като $AB = 2.OB$.
а) Намерете големините на ъглите на ромба.
б) Ако P и Q са точки съответно от страните AB и BC, такива че $BP = CQ$, докажете, че $\triangle PQD$ е равностранен.

29. Даден е $\triangle ABC$ ($AC > BC$), в който ъглополовящите на вътрешния и външния ъгъл при върха C пресичат лъча $\overrightarrow{AB}$ съответно в точките P и Q. Върху страната CA е избрана точка M, такава че $CM = CB$.
а) Докажете, че $MBQC$ е трапец.
б) През средата F на BC е построена права, която пресича бедрата на трапеца $MBQC$ в точките T и R. Докажете, че F не е среда на TR.

30. През точка P от основата CD на равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB > CD$) е построена права l, успоредна на диагонала BD, която пресича лъча $\overrightarrow{AB}$ в точка M. Докажете, че $AMCP$ е равнобедрен трапец.

31. В равнобедрения $\triangle ABC$ с височина към основата 9 см и основа 24 см е вписан правоъгълник $MNPQ$ ($M \in AB$, $N \in AB$, $P \in BC$ и $Q \in AC$), така че диагоналите MP и QN са успоредни на страните AC и BC на $\triangle ABC$. Намерете дължините на страните на правоъгълника $MNPQ$.

Неравенства между страни и ъгли в триъгълника.

32. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовяща CL ($L \in AB$). Докажете, че ако $AC > BC$, то $AL > BL$.

33. Докажете, че в разностранния триъгълник ъглополовящата е между височината и медианата, построени през един и същи връх.

ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТВАНЕ СЛЕД 7 КЛАС

Тема 1

Пенка Нинкова и Асен Александров, експерти по математика в РИ на МОНТ, София

Задача 1. а) Ако при $x = -1$ стойността на израза $\frac{1}{2}(n+1) - \frac{3n - |x|}{3} - |2 - x|$ е равна на $-\frac{13}{6}$, то да се намери n.
б) Да се реши уравнението $a^2x + 5a = 25x + a^2$, където a е параметър, и да се провери дали уравнението има решение при $a = \frac{(-15)^4.3^{2n-4}.4^n}{6^{2n}.5^3}$.

Задача 2. Ученици купили 25 билета за кино и 20 билета за театър и платили общо 1050 лв.
а) Колко лева струва един билет за театър и един билет за кино, ако 5 билета за кино струват с 10 лв повече, отколкото струват 4 билета за театър?
б) С колко процента 1 билет за кино е по-евтин от един билет за театър?

Задача 3. Даден е петоъгълникът $ABCDE$, за който $\sphericalangle DEA = \sphericalangle BCD = 90°$, $AB = CD = DE = 1$ и $EA + BC = 1$.
а) Докажете, че AD е ъглополовяща на $\sphericalangle EAB$.
б) Намерете лицето на дадения петоъгълник.

Задача 4. Даден е правоъгълникът $ABCD$. Върху страната BC е избрана вътрешна точка M така, че $\sphericalangle AMD = \sphericalangle AMB = \alpha$.
а) Докажете, че $\triangle AMD$ е равнобедрен.
б) Ако $BC = 2.AB$, да се намери градусната мярка на α.

Тема 2.

Ирина Шаркова и Румяна Караджова, учителки по математика в СМГ

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = |2x - 4| + |\frac{x}{3} - \frac{2}{3}| + |2 - x|$.

а) Да се построи графиката на $f(x)$ при $x < 2$ и да се намери за кои стойности на b точката $B(b;5)$ лежи на графиката на дадената функция $f(x)$.
б) За кои стойности на параметъра a уравнението $a^2x+a = 25x-5$ е еквивалентно на уравнението $f(x+2) = -1$?

Задача 2. В триъгълник ABC са построени ъглополовящите при върховете C и B, които се пресичат в точка O. Дадено е, че

$$\sphericalangle ABC : \sphericalangle BAC : \sphericalangle COB = 1 : 4 : 7.$$

а) Да се намири ъгълът между височината и медианата в триъгълника, построени през върха C.
б) Върху страната AB е взета точка C_1 такава, че $AC = AC_1$. От точката C_1 е издигнат перпендикуляр към AB, който пресича страната BC в точка M. Да се докаже, че точките A, O и M лежат на една права.

Задача 3. Даден е трапец $ABCD$ $(AB \| CD)$. През върха D и произволна точка M от основата AB е построена права a. Върху правата a е избрана точка N, така че M е среда на отсечката DN. Пресечната точка на правите AB и CN е означена с P.
а) Да се докаже, че P е среда на отсечката CN.
б) Да се намери лицето на $\triangle MPN$, ако лицето на $\triangle ABD$ е равно на 6 и се отнася към лицето на $\triangle BDC$, тъй както $3:2$.

Задача 4. Един автобус изминава по разписание разстоянието от град A до град B със скорост 45 км/ч. При едно пътуване, след като изминал $\frac{2}{5}$ от разстоянието, автобусът бил задържан на ж.п. прелез 20 мин. След това увеличил скоростта си с $11\frac{1}{9}\%$ и пристигнал в B 10 мин. по-рано от определеното време.
а) Да се намери разстоянието между A и B и времето, за което трябва да бъде изминато това разстояние по разписание.
б) С каква най-малка скорост, която да е цяло число, трябва да се движи автобусът, за да измине останалата част след ж.п. прелеза, така че да пристигне не по-късно от определеното време в град B?

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТВАНЕ СЛЕД 8 КЛАС

Светлозар Дойчев,
учител по математика в ПМГ, Стара Загора

Задача 1. Да се реши системата:

$$\begin{cases} |4x-1| < x \\ 9x^2 + 2x(x-1) \le (x-1)^2 \end{cases}$$

и да се провери дали числото

$$A = \frac{(3+2\sqrt{2})(15\sqrt{2}-21)}{2\sqrt{50} - \sqrt{(-10)^2}}$$

е нейно решение.

Задача 2. Една тръба сама може да напълни басейн за 4 часа по-бързо отколкото втора. За времето, за което първата тръба ще напълни половината от басейна, двете тръби биха напълнили такава част, каквато втората тръба може да напълни сама за 10 часа. За колко часа всяка от тръбите сама може да напълни басейна?

Задача 3. Върху бедрата AD и BC на трапеца $ABCD$ са взети съответно точки M и N, така че отсечката MN е успоредна на основите на трапеца. Ако е известно, че $AB = 12$ см, $MN = 7$ см и $CD = 4$ см, да се намерят отношенията, в които точките M и N делят бедрата на трапеца.

Задача 4. Даден е ромбът $ABCD$, чиито диагонали $AC = d_1$ и $BD = d_2$ се пресичат в точката S. Да се докаже, че четириъгълникът с върхове медицентровете на триъгълниците $\triangle ABS$, $\triangle BCS$, $\triangle CDS$ и $\triangle DAS$ е правоъгълник и да се намерят страните му.

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА НАЦИОНАЛНАТА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

Надка Попова и Боянка Савова,
учителки по математика в НПМГ

I изпит (за всички специалности)

Задача 1. Дадени са функциите $f(x) = 1 - 3x$ и $g(x) = 5x - 2$.
а) Да се намерят координатите на пресечните точки на графиката на функцията $g(x)$ с координатните оси и да се изчисли лицето на фигурата, ограничена от графиката на $g(x)$ и от двете координатни оси.
б) Да се реши уравнението

$$2x - (0,5.f(x) + g(x) : 3) = 2.$$

в) За кои стойности на параметъра k коренът на уравнението $\frac{f(x)-k}{5} = 1 + 2k$ е равен на 6?

Задача 2. Две момчета, Асен и Борис, могат да боядисат заедно една ограда за 2 часа. Асен може да боядиса оградата сам за 3 часа.
а) Ако Асен започне работата в десет часа сутринта, а един час по-късно към него се присъедини Борис, в колко часа ще бъде боядисана оградата?
б) За колко часа Борис може да боядиса оградата сам?

Задача 3. Триъгълниците ABD и ABC са разположени в една и съща полуравнина относно правата AB, като $AD = BC$, $BD = AC$ и $AD < BD$.

а) Да се докаже, че $ABCD$ е равнобедрен трапец или правоъгълник.

б) Да се докаже, че ако O е пресечната точка на правите AC и BD, то лицата на триъгълниците ADO и BCO са равни.

в) Да се изчисли периметърът на $ABCD$, ако AC е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$ и $AB = 2AD = 3$ см.

II изпит

(за специалност математика и информатика)

Задача 1. Дадени са изразите: $A = 2x^2 + ax - a^2$ и $B = 2x^2 - ax - a^2$.

а) Да се разложат A и B на множители.

б) Да се докаже, че $A^2 - 8ax^3 = B^2 - 4a^3x$.

в) Да се реши уравнението $|A - B - x| = a$, където a е параметър, а x е неизвестно.

Задача 2. Турист смятал да измине 20 км за определено време. Изминавайки 15 км, той направил 15 мин. почивка и за да стигне навреме, увеличил скоростта си с 1 км/ч.

а) Да се определи първоначалната скорост на туриста.

б) С колко минути по-рано от предвиденото би пристигнал, ако след почивката увеличи скоростта си с 2 км/ч?

Задача 3. Ъглополовящите на външните ъгли на ΔABC се пресичат в точките A_1, B_1 и C_1, така че $A \in B_1C_1$, $B \in A_1C_1$ и $C \in A_1B_1$. Нека L е пресечната точка на AA_1 и BC.

а) Намерете ъглите на ΔABC, ако ъглите на $\Delta A_1B_1C_1$ са α, β и γ.

б) Докажете, че ако $S_{\Delta ABC} = 4S_{\Delta ALC}$, то $BL = 3LC$.

в) Докажете, че ако $CL = \frac{1}{2}CB$, то правата AA_1 е симетрала на отсечката BC.

Математически турнир "Иван Салабашев"

Атанас Баджаков, директор на II ОУ – гр. Стара Загора

На 10 декември 1994 г. в град Стара Загора се проведе третият ежегоден математически турнир на името на Иван Салабашев — патрон на старозагорската секция на Съюза на математиците в България, организатор на турнира.

Иван Салабашев (1853 – 1924) е виден български математик, политик и общественик, пръв председател на физико-математическото дружество. Той завършва математика в Пражкия университет и в продължение на няколко години е учител. Научните му изследвания намират реализация в няколко публикации, от които ще споменем изучаването на кривите линии, описвани от върха C на даден ΔABC, когато върховете A и B се движат по определени пътища. Три пъти Ив. Салабашев е бил министър на финансите и два пъти министър на правосъдието. Бил е и пълномощен министър във Виена. Най-интересният епизод от политическата кариера на Ив. Салабашев е свързан с участието му като депутат в Областното събрание на Източна Румелия. При избора на ръководния орган на събранието, Постоянния комитет, той проявява изключителна математическа изобретателност. Съгласно тогавашния устав всеки депутат имал право да гласува само за 6 кандидата, като по този начин се целяло да не влизат само българи в Постоянния комитет, съставен от 10 души. Ив. Салабашев изготвил бюлетините на всичките 30 българи-депутати (от общо 47 участника в избора), като по подходящ начин съставил 30 комбинации от по 6 имена измежду предварително избрани 10 българи. В резултат точно тези 10 българи били избрани за членове на Постоянния комитет и по този начин била спасена българщината в Източна Румелия.

В турнира взеха участие около 400 ученика от цялата страна. Ще отбележим доброто представяне на по-малките ученици от Стара Загора, на по-големите от Габрово, София, Пловдив, Казанлък, Карлово, Лясковец, Димитровград и Хасково, както и на най-големите от Ямбол и Велико Търново. Темите бяха подготвени от жури в състав: Христо Лесов – председател, Олег Мушкаров, Сава Гроздев и Светлозар Дойчев. В продължение на 120 минути участниците решаваха по 6 задачи, първите пет от които бяха под формата на тест. Между посочените отговори трябваше да се посочи единствено верният. На тези, които не са участвали в турнира, предлагаме да проверят знанията си и да поработят върху темите за съответния клас. Надяваме се, че това ще им помогне в подготовката за предстоящите олимпиади и състезания. Условията на задачите и отговорите ще намерите в притурката. И не забравяйте следващия турнир "Ив. Салабашев" през м. декември 1995 г. За подробности се обръщайте на адреса на редакцията или към Евтим Кънчев, ул."Сава Силов" № 106, вх. Б, ап. 39, 6000 Стара Загора, тел. (042)-2-55-28.

М+ ПРАКТИКУМ

ПОДГОТОВКА ЗА ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В ТЕХНИКУМИТЕ И СОУ

В два последователни броя на МАТЕМАТИКА ПЛЮС ще публикуваме задачи и теми в помощ на всички, които ще се явяват на зрелостен изпит по математика. Ако един зрелостник иска да е спокоен, когато се явява на изпит, той трябва да може да решава тези задачи. Разбира се, ако той е решил само предложените тук задачи и теми, това не означава, че е готов за изпита, а по-скоро че познава сравнително добре основните факти от училищния материал.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС.

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

1. Да се решат уравненията:

а) $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{2x+3}{x+2} = \dfrac{6+x-x^2}{x^2+x-2}$;

б) $\sqrt{3x-2} - 3\sqrt{x-1} = 1$;

в) $1 + \log_2(x^2-1) = \log_2(5x-4)$;

г) $3^{x+1} - 3^{x-1} - 3^x = 5$;

д) $\sin 3x = 4\sin 2x - \sin x$.

2. Да се решат неравенствата:

а) $9^{x+1} - 13.6^x + 4^{x+1} \leq 0$;

б) $\log_2(x+1) < 1 - 2\log_4 x$.

3. Да се решат системите

а) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x^2 - y^2 = 20; \end{array} \right.$

б) $\left| \begin{array}{l} x + y + 2xy = 7 \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{array} \right.$

4. Да се намерят първият член a_1 и разликата d на аритметичната прогресия, за която:

$$\left| \begin{array}{l} a_5 - 3a_3 = 4,5 \\ a_1 + a_6 - 5a_4 = 8,5. \end{array} \right.$$

5. Да се намерят първият член a_1 и частното q $(q \neq 0, -1)$ на геометрична прогресия, за която

$$\left| \begin{array}{l} a_7 - a_5 = 12 \\ a_6 + a_5 = 12. \end{array} \right.$$

6. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - mx + m - 1$, където m е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на m, за които допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса $x = \sqrt{3}$ образува с абсцисната ос ъгъл $30°$.

б) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$, да се намери най-малката стойност на израза $P = m(x_1^2 + x_2^2 - 6)$, когато m се изменя в интервала $[0, 2]$.

7. Дадена е функцията $f(x) = mx^4 + nx^2 + 3$, където m и n са реални параметри.

а) Да се намерят коефициентите m и n, ако за $x = 1$ функцията $f(x)$ има минимум, равен на 2.

б) Да се изследва изменението и се построи графиката на функцията $f(x)$ при $m = 1$ и $n = -2$.

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

8. Даден е правоъгълен триъгълник с катет, равен на 12 см, и медиана към хипотенузата, равна на 10 см.

а) Да се намерят дължините на хипотенузата, другия катет и височината към хипотенузата.
б) Да се намерят лицата на частите, на които се разделя дадения триъгълник от ъглополовящата на правия му ъгъл.
в) В дадения триъгълник е вписана окръжност и е прекарана допирателна към нея, успоредна на хипотенузата. Да се намери дължината на отсечката от тази права, заключена между катетите на триъгълника.

9. Даден е $\triangle ABC$, в който $AB = 4$ см, $BC = 13$ см, $CA = 15$ см.
а) Намерете дължината на най-голямата височина на триъгълника.
б) Във вътрешността на триъгълника е отбелязана точка O на разстояние 5 см от AB и 1 см от BC. Намерете разстоянието от O до CA.

10. Даден е ромб $ABCD$ с остър ъгъл DAB.
а) Ако $\sphericalangle DAB = 30°$, да се докаже, че страната на ромба е средногеометрична на диагоналите му.
б) Ако дължината на страната на ромба е 10 см, а лицето му е 96 см^2, да се намерят дължините на диагоналите му.

11. Около окръжност с радиус 4 см е описан равнобедрен трапец с бедро 10 см. Намерете:
а) дължините на основите и диагоналите на трапеца;
б) лицето на трапеца;
в) дължината на окръжността, описана около трапеца.

12. Диагоналът BD_1 с дължина l на правоъгълния паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образува със стените ADD_1A_1 и DCC_1D_1 равни ъгли с големина α.
а) Да се докаже, че основата $ABCD$ е квадрат и диагоналът AC е перпендикулярен на BD_1.
б) Да се намери обемът на паралелепипеда.
в) Да се докаже, че $2\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 2$, където β е ъгълът, определен от диагонала BD_1 и основата на $ABCD$.

13. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$, основата ABC на която е равнобедрен правоъгълен триъгълник с хипотенуза $AB = 2$. Ръбът DA е перпендикулярен на основата и е с дължина 2.
а) Да се докаже, че околните стени са правоъгълни триъгълници и да се пресметне пълната повърхнина на пирамидата.
б) През точката M върху отсечката AB, на разстояние $\frac{3}{2}$ от A, е прекарана равнина, перпендикулярна на AB. Да се пресметне лицето на полученото сечение.

14. Основата на пирамида е правоъгълник. Две околни стени са перпендикулярни на основата, а другите две образуват с нея ъгли с големини α и β. Ако дължината на височината на пирамидата е h, да се намерят:
а) обемът на пирамидата;
б) лицето на околната повърхнина на пирамидата.

15. Даден е прав кръгов пресечен конус с височина h, ъгъл α между образувателната на конуса и голямата му основа и ъгъл β между диагоналите на осното му сечение. Да се намери обемът V и лицето на околната повърхнина S на конуса.

16. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с дължина на катетите $BC = 4$ см, $AC = 3$ см. Върху катета BC е взета точка M, така че $CM = x$. През точка M е построена права, успоредна на AC, която пресича AB в точка N. През N е построена права, успоредна на BC, която пресича AC в точка P.
а) Да се изрази лицето на четириъгълника $CMNP$ като функция на x.
б) Да се намери за коя стойност на x лицето на $CMNP$ е най-голямо и да се пресметне тази най-голяма стойност

ТЕМА

за писмен зрелостен изпит по математика в СОУ и техникумите

(зададена на 23 юни 1994 г.)

Задача 1. Да се реши:
а) уравнението $\cos 2x - \sin x = 1$;
б) системата

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{x+2y} = 2y \\ x - 5y = 5. \end{array} \right.$$

Задача 2. Даден е трапец $ABCD$, в който $AB \| CD$.
а) Да се намери височината на трапеца, ако $AB = 15$ см, $BD = 13$ см и $AD = 4$ см.
б) Диагоналите на трапеца се пресичат в точка O. Да се намери лицето на триъгълника ABO, ако лицето на трапеца е S и $AB = k.CD$, където k е дадено положително число.

Задача 3. Дадена е функцията

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + a},$$

където a е реален параметър.
а) Ако $a = 2$, да се намерят интервалите на растене и намаляване на функцията.
б) Да се намерят стойностите на a, за които функцията е дефинирана за всяко реално x. За

тези стойности на a да се намери най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[0; a]$.

Задача 4. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа квадрат $ABCD$. Околният ръб MD е перпендикулярен на основата на пирамидата.
а) Да се намери лицето на околната повърхнина на пирамидата, ако $MD = h$ и двустенният ъгъл, образуван от равнините (ABC) и (ABM), има големина α.
б) Ако $\sphericalangle AMC = \gamma$ и двустенният ъгъл, образуван от равнините (ACM) и (ADM), има големина β, да се докаже, че $\cos\gamma = \operatorname{cotg}^2\beta$.

ТЕМА
за писмен зрелостен изпит по математика в СОУ и техникумите
(зададена на 8 септември 1994 г.)

Задача 1. а) Да се реши системата

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 5 \end{cases}.$$

б) Да се докаже тъждеството

$$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{4\cos^2\alpha - 2}{1 + \cos 2\alpha},$$

$\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Задача 2. Окръжностите k и k_1 с радиуси съответно 2 см и 6 см се допират външно в точка M. Общите им допирателни t и t_1 се допират до k и k_1 съответно в точките A, A_1 и B, B_1. Да се намери:
а) ъгълът, определен от допирателните t и t_1;
б) лицето на фигурата, определена от дъгите AMB, A_1MB_1 и допирателните t и t_1.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = ax^3 + bx + c$, която има локален максимум при $x = -1$.
а) Да се намерят стойностите на коефициентите a, b и c, ако те в този ред образуват геометрична прогресия и локалният максимум на функцията е равен на 11.
б) Да се докаже, че ако функцията има локален минимум, той е равен на $a + b + c$.

Задача 4. Дадена е триъгълна пирамида $ABCM$.
а) Равнината, успоредна на основата ABC, пресича пирамидата в триъгълника $A_1B_1C_1$. Да се намери отношението на обемите на пирамидите $ABCM$ и $A_1B_1C_1M$, ако отношението на лицата на триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ е 3:2.
б) Основата ABC е равностранен триъгълник със страна a. Два от околните ръбове на пирамидата сключват с основата ъгъл φ, а стената, в която те лежат, сключва с основата ъгъл α. Върхът на пирамидата се проектира в точка, вътрешна за основата. Да се намери обемът на пирамидата.

ТЕМА
за писмен зрелостен изпит по математика в СОУ и техникумите
(зададена на 17 януари 1995 г.)

Задача 1. а) Да се реши уравнението

$$\log_x(x^2 - 4x + 4) = 1.$$

б) Да се пресметне стойността на израза

$$A = 4\operatorname{cotg}\alpha - \sqrt{5}\cos\frac{\alpha}{2} + 7\operatorname{tg}2\alpha,$$

ако $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$.

Задача 2. Дадена е функцията

$$f(x) = \frac{ax+2}{x+1} + \sqrt{3x^2+1},$$

където a е реален параметър.
а) Да се реши уравнението $f(x) = x^2 - 7$ при $a = 2$.
б) Да се намери най-голямата стойност на функцията

$$g(a) = \sqrt{f'(1) + f(0) - a^2 - 3}.$$

Задача 3. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с катети $AC = 20$ см и $BC = 15$ см. Окръжността с диаметър височината CD $(D \in AB)$ на дадения триъгълник пресича AC и BC съответно в точките M и P.
а) Да се докаже, че $DM \perp AC$ и $\sphericalangle ADM = \sphericalangle ACD$.
б) Да се намери лицето на четириъгълника $ABPM$.

Задача 4. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е ромб със страна a и остър ъгъл $BAD = \alpha$. Стените ADM и CDM са перпендикулярни на равнината на основата, а стената ABM образува с нея ъгъл, равен на β. Да се намери:
а) обемът на пирамидата;
б) лицето на сечението на пирамидата с равнината, която минава през ръба AB и образува с ранината на основата ъгъл γ $(0 < \gamma < \beta)$.

М+ ПРАКТИКУМ

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ

В два последователни броя на МАТЕМАТИКА ПЛЮС ще публикуваме задачи и примерни теми в помощ на всички, които ще се явяват на кандидатстудентски изпит по математика. В този брой ще намерите "типични" задачи по алгебра, а в следващия – по геометрия. Решаването им е задължителен елемент от подготовката за изпит на един кандидатстудент. Разбира се преодоляването им не е достатъчно условие, за да станете студенти, но със сигурност значи, че владеете кандидатстудентския минимум по математика.

Сред предлаганите задачи умишлено не са включени тези от конкурсните изпити за 1994 г., понеже те бяха публикувани в брой 4 за 1994 г. на списанието.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС.

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

доц. Любомир Давидов, Институт по математика – БАН

Алгебрични уравнения

1. Да се решат уравненията:

а). $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{3x+4}{x^2-2x}$;

б). $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7} + \dfrac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$;

в). $|x-3| + |x+2| - |x-4| = 3$;

г). $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + |x| = \dfrac{x^2}{|x-1|}$.

2. Да се решат параметричните уравнения относно неизвестното x:

а). $ax^4 - x^3 + a^2x - a = 0$;

б). $x^3 + ax^2 + \left(a - 1 + \dfrac{1}{a-1}\right)x + 1 = 0$,

($a \neq 1$ е реален параметър).

Алгебрични неравенства

3. Да се решат неравенствата:

а). $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} \leq 2$; б). $|x^2 - x - 6| > 3 + x$.

4. Да се решат системите неравенства:

а). $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} - \dfrac{7}{8} > \dfrac{3x}{4} - \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x+1}{4} < 2 - \dfrac{1-2x}{3}; \end{array}\right.$ б). $\left|\begin{array}{l} |x| \geq 1 \\ |x-1| < 3. \end{array}\right.$

5. В зависимост от стойностите на реалния параметър a да се реши неравенството:

$$|x+a| \leq x.$$

6. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, при които неравенството

$$|a^3 + x| + |1 + x| \leq 1 - a^3$$

има поне четири решения, които са цели числа.

Системи алгебрични уравнения

7. Да се решат системите:

а). $\left|\begin{array}{l} \dfrac{39}{x} - \dfrac{44}{y} - 5x + 10y = 0 \\ \dfrac{7}{x-2y} + x - 2y + 8 = 0; \end{array}\right.$

б). $\left|\begin{array}{l} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0 \\ \dfrac{x+y}{x-y} + y^2 = 5x + y; \end{array}\right.$

в). $\left|\begin{array}{l} x^4 + y^4 = 82 \\ xy = 3; \end{array}\right.$

г). $\left|\begin{array}{l} \dfrac{3}{x^2+y^2-1} + \dfrac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22. \end{array}\right.$

8. Да се намерят стойностите на реалните параметри a и b, при които системата

$$\left|\begin{array}{lcl} a^2x - ay & = & 1-a \\ bx + (3-2b)y & = & 3+a \end{array}\right.$$

има единствено решение $x = y = 1$.

Формули на Виет

9. Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2 + px + q = 0$, да се пресметнат стойностите на изразите:

а). $\dfrac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2+x_2^2}$; б). $\dfrac{x_1^3+x_2^3-2x_1^2x_2-2x_1x_2^2}{x_1^4+x_2^4}$.

10. Да се състави квадратно уравнение, корените x_1 и x_2 на което удовлетворяват условията:

$$x_1^2+x_2^2=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=51.$$

11. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2-2k(x-1)-1=0$ удовлетворяват условието $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$.

12. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $2x^2-(k+1)x+k-1=0$ удовлетворяват условието $x_1-x_2=x_1x_2$.

13. Нека $S_n=x_1^n+x_2^n$, където n е произволно цяло число, а x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $ax^2+bx+c=0$. Да се докаже, че за всяко цяло n е изпълнено равенството:

$$aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0.$$

(*Формули на Нютон*)

14. Дадено е уравнението $x^2-x+1=0$, корените на което са означени с α и β.

а). Да се намерят коефициентите a, b и c на полинома $f(x)=ax^2+bx+c$, ако е известно, че са в сила равенствата $f(1)=1$, $f(\alpha)=\beta$ и $f(\beta)=\alpha$.

б). Да се докаже, че числата $1,\alpha$ и β са корени на уравнението $\varphi(x)=0$, където

$$\varphi(x)=a.(f(x))^2+b.f(x)+c-x.$$

в). Да се разложи на множители с реални коефициенти полиномът $\varphi(x)$.

Квадратна функция

15. Да се докаже, че ако числата a,b и c са дължини на страни на триъгълник, то квадратното уравнение $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ няма реални корени.

16. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които корените на квадратното уравнение $(k-3)x^2-2kx+5k=0$ са реални и положителни.

17. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които квадратното уравнение

$$(k-1)x^2+(k^2-7k)x-5k+5=0$$

има два реални корена, единият от които е по-малък, а другият е по-голям от 5.

18. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които квадратното уравнение

$$(k^2+1)x^2+(3k-4)x+k^2+5=0$$

има два реални корена x_1 и x_2, удовлетворяващи условието: $x_1<2<x_2<3$.

19. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които квадратното уравнение

$$x^2-(3k+1)x+k=0$$

има два различни реални корена, които принадлежат на интервала $(-1,2)$.

20. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които неравенството

$$k.9^x+4(k-1).3^x+k-1>0$$

е изпълнено за всяко реално x.

21. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които неравенството

$$x^2+(3k+1)x+k^2-6k<0$$

е изпълнено за всяко x, принадлежащо на интервала $[-2,-1]$.

22. Нека

$$f(x)=x^4+(m-4)x^3+(m+4)x^2+(m-4)x+1=0,$$

а y_1 и y_2 са корените на уравнението

$$y^2+(m-4)y+m+2=0,$$

където m е реален параметър.

а). Да се докаже, че

$$f(x)=(x^2-y_1x+1)(x^2-y_2x+1).$$

б). Да се намерят стойностите на параметъра m, при които уравнението $f(x)=0$ няма реални корени.

23. Дадени са квадратните уравнения

$$x^2-2kx+4=0 \quad \text{и} \quad x^2-2(k-1)x+4=0,$$

където k е реален параметър.

а). Да се намерят стойностите на k, за които и двете уравнения имат реални корени.

б). Ако x_1, x_2 са корените на първото уравнение, а y_1, y_2 са корените на второто уравнение, да се намерят стойностите на k, за които $x_1<y_1<x_2<y_2$.

24. Да се реши неравенството:

$$\min\left\{2x-x^2,x-1\right\}>-\frac{1}{2}.$$

Ирационални уравнения и неравенства

25. Да се решат уравненията:

а). $\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}=4$; б). $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

26. Да се решат неравенствата:

а). $x+1>\sqrt{x+3}$; б). $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}>\sqrt{2-x}$.

Показателни и логаритмични уравнения и неравенства

27. Да се решат уравненията:

а). $3^x.8^{\frac{x}{x+1}}=36$; б). $(x^2-3)^{x^2+2x-3}=1$;

в). $\log_{x+1}(x^2-3x+1)=1$; г). $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$;

д). $\log_{2x}x+\log_{\frac{x}{2}}x=2\log_{\sqrt{2x}}x$.

28. Да се решат неравенствата:

а). $\log_{x-1}\dfrac{2(x-2)(x-4)}{x+5}\geq 1$;

б). $4x+8\sqrt{2-x^2}>4+(x^2-x).2^x+2^{x+1}.x\sqrt{2-x^2}$.

Тригонометрични уравнения

29. Да се решат уравненията:

а). $2\sin^2x+5\cos x=4$;

б). $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$;

в). $\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$;

г). $\left(1-2\sin\left(2x-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)(3\operatorname{tg}x-3\operatorname{cotg}x-4\sin 2x)=0$.

30. Да се реши уравнението
$$\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{6}.\operatorname{cotg} x = 4\cos x - 1.$$
Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = 2x - x^2$, когато x се изменя в множеството от решенията на горното уравнение.

Прогресии

31. Да се докаже, че ако числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуват аритметична прогресия, то
$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

32. Три числа образуват геометрична прогресия. Ако второто от тези числа се увеличи с 8, новополучените числа образуват аритметична прогресия. Ако след това третото число се увеличи с 64, отново се получават три числа, образуващи геометрична прогресия. Да се намерят първоначалните три числа.

33. Сумата на безкрайна геометрична прогресия е 12, а сумата от квадратите на нейните членове е равна на 48. Да се намери сумата от първите 10 члена на тази прогресия.

Изследване на функции

34. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$.
а). Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията $f(x)$.
б). Да се докаже, че за всяка реална стойност на параметъра k уравнението
$$\frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1} = x^2 + 2(2k-3)x + 5k^2 - 16k + 20$$
няма реални корени.

35. Да се намерят всички точки от графиката на функцията $f(x) = \dfrac{1}{3}.x^3 - 2x^2 - 22x - 28$, в които допирателната към графиката на тази функция отсича от положителните части на координатните оси отсечки с равни дължини.

36. Да се намери уравнението на права, минаваща през точката с координати $(\frac{1}{2}, 2)$, допираща се до графиката на функцията $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 2$ и пресичаща в две различни точки графиката на функцията $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

37. Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията
$$f(x) = 2^{-4\cos x} + 2^{2-3\cos x} - 2^{3-2\cos x}.$$

38. Да се докаже, че графиките на функциите
$$f(x) = \tfrac{x^2+1}{x} \quad \text{и} \quad g(x) = \log_2(2.3^{x+1} - 9^x - 5)$$
имат само една обща точка. Да се намерят координатите на тази точка.

39. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x) = \dfrac{|x^2 + x - 2| + |x^2 - x - 2|}{1 + x^2}$. Да се определят стойностите на x, за които $f(x) \le 1$. Да се намери $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

40. Дадена в функцията $f(x) = p + x + \dfrac{s}{px}$, където p и s са положителни числа, а x е независима положителна променлива.
а). Да се намери минимумът на функцията $f(x)$.
б). При фиксирано s да се намери за кое p този минимум е най-малък.
в). Да се докаже, че ако $p > 0$, $s > 0$ и $x > 0$, то
$$p + x + \frac{s}{px} \ge p + 2\sqrt{\frac{s}{p}} \ge 3\sqrt[3]{s}.$$
г). Да се докаже, че ако $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то
$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}.$$
Кога се достига равенството?

41. Да се докаже, че при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ са изпълнени неравенствата:
$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x \quad \text{и} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1.$$

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1.
доц. Л. Давидов, ИМ – БАН

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, при които уравнението
$$k.2^{x^2+x} - 2^{-x^2-x} = 1 - k$$
има точно един положителен корен.

Задача 2. Диагоналите на трапец имат дължини 3 и 5, а отсечката, съединяваща средите на основите му, има дължина 2. Да се пресметне лицето на трапеца.

Задача 3. Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$, всичките ръбове на която имат дължини равни на 1. (ABC и $A_1B_1C_1$ са основите, а AA_1, BB_1 и CC_1 са околните ръбове на призмата.) Точките O и M са съответно център на стената ABB_1A_1 и среда на ръба CC_1, а X е произволна точка от ръба BC. Лицето на сечението на дадената призма с равнината, определена от точките O, M и X, е означено с S. Да се докаже, че $\dfrac{\sqrt{6}}{4} \le S \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Кога в тези неравенства се достигат равенствата?

Задача 4. Нека $f(x) = \log_2(1 - x - x^2)$.
а) Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията $f(x)$, когато x се изменя в интервала $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър a, при които за всяко реално положително b уравнението $f(x) - a.\frac{1}{f(x)} - b = 0$ има корен в интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

ТЕМА 2.

доц. Димитър Иванчев – директор на Института по приложна математика при ТУ, София; ас. Александър Кючуков – ТУ, София

Задача 1. Да се намерят реалните решения на уравнението $2x^2 - 2(a+1)x + 5a^2 - 2a + 1 = 0$:
а) за онези стойности на параметъра a, за които $|2a| = \sqrt{1 - a(2-a)}$;
б) ако a е произволен реален параметър.

Задача 2. Да се реши неравенството:
а) $4^x - 6 > 0$;
б) $\log_x(\log_2(4^x - 6)) \geq 0$.

Задача 3. Лист ламарина има формата на трапец. Две от страните на трапеца имат дължини 2 см и 3 см и сключват прав ъгъл помежду си. Диагоналът на трапеца, излизащ от върха на този ъгъл, го разполовява. Да се намери радиусът на кръга с възможно най-голямо лице, който може да се изреже от този лист ламарина.

Задача 4. От ъглите на квадрат с дължина 60 см се изрязват квадратчета с дължина на страната x см така, че от останалата част след сгъване да се получи кутия (без капак) с форма на правилна четириъгълна призма и възможно най-голям обем. Да се намери x.

ТЕМА 3.

доц. Вл. Тодоров, гл.ас. П. Стоев, гл.ас. А. Хамамджиев, ВИАС, София

Задача 1. Дадено е уравнението

$$\lg^2 x + \alpha \lg x - \frac{1 + 2\alpha^2}{4\alpha^2} = 0,$$

където α е реален параметър.
а) Докажете, че уравнението има два реални различни положителни корена x_1 и x_2 при всяко $\alpha \neq 0$.
б) Ако $x_2 > x_1$, намерете най-малката стойност на частното $\frac{x_2}{x_1}$.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ с ъгъл при върха A, равен на $75°$, и страни $AB = 2$ и $AC = 2\sqrt{2}$. Нека M е точка от отсечката BC и да положим $BM = x$. Окръжността с диаметър AM пресича страните AB, BC и CA на $\triangle ABC$ съответно в точките P, H и Q (възможно е H да съвпада с M). Означаваме с X тази от точките M или H, която е по-близо до върха B, а с Y – другата точка.
а) Изразете като функция на $x = BM$ произведението на лицата на триъгълниците PBX и YCQ.
б) Намерете най-голямата стойност на тази функция.

Задача 3. Дадена е триъгълната пирамида $ABCD$ с основа равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) с ъгъл α при основата $AB = 1$. Околните стени на пирамидата сключват с основата един и същ ъгъл β, а височината ѝ DH е равна на $\frac{1}{2}\text{cotg}\,\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta$. Пресметнете тангенса на двустенния ъгъл при ръба CD.

Забележка: Задачите, които предлагаме тук са, по всяка вероятност, с по-голяма трудност от една типична кандидат — студентска тема във ВИАС. Това не бива да ви учудва; нали ги решавате при значително по-благоприятни условия от тези, които предлага приемният изпит!

ТЕМА 4.

проф. И. Райчинов, УНСС, София

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър m, при всяка от които функцията

$$f(x) = (m^2 - m)x^3 + mx^2 + 2x$$

е растяща в интервала $[-1, 0]$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Задача 2. Да се докаже неравенството

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| \geq \frac{3}{2}\sqrt{\left|\frac{\sin 8x}{\sin x}\right|},$$

$x \neq k\pi$, k – цяло число.

Задача 3. Да се построи равнобедрен триъгълник ABC ($AB = BC$), ако са дадени отсечките $CH = m$ и $HD = n$, на които ортоцентърът му H разделя височината CD. При $m : n = 3 : 1$ да се изрази чрез n лицето на онази част от триъгълника ABC, която е вън от вписаната му окръжност.

Задача 4. Основата на пирамида е равнобедрен трапец с дължини на основите a и b. Всички околни стени на трапеца са наклонени към основата под ъгъл φ, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Да се пресметне нейният обем V и да се докаже неравенството $48V \leq (a+b)^3$.

Забележка: До приключването на броя не беше установен точният брой на задачите за приемния изпит в УНСС.

Внимание !

Организира се кандидат-студентски курс по МАТЕМАТИКА с ръководител проф. И. Райчинов (УНСС). Справки и записвания на тел. 70-28-22, вечер.

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика се публикуват задачи, достъпни за ученици от горните класове на средното училище, за студенти от първите курсове на университетите и за учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. По-широкият смисъл на оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие.

Рубриката разчита на Вашето активно участие както с решения, така и с предложения за задачи. Изпращайте ги на адрес:

1113 София,
ул. "Акад. Г. Бончев", блок 8,
Институт по математика при БАН,
Ваня Хаджийски

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. След условията ще бъдат отбелязвани имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес.

Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани. Ще се публикуват Ваши коментари по повод на задачите и техните решения (обобщения, интересни частни случаи и т.н.).

M^+55. Числата от 1 до 18 са разпределени в 9 двойки, така че сумата на числата във всяка двойка е квадрат на естествено число. Коя е двойката, съдържаща числото 1?

(В. Хаджийски, О. Мушкаров, София)

M^+56. Върху окръжност са взети точки A, B и C, така че C е среда на по-малката дъга $\overset{\frown}{AB}$. Да се намери геометричното място на точките P в равнината, за които PC е ъглополовяща на $\sphericalangle APB$.

(Хр. Лесов, Казанлък)

M^+57. Нека k и n са естествени числа. Да се докаже, че съществуват n различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в десетичния запис на които не участва цифрата 0 и такива, че сумите от цифрите на числата $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k$ са едни и същи.

(В. Дренски, София)

M^+58. Общата част на $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ е шестоъгълник с равни страни. Ако R и r (R_1 и r_1) са радиусите на описаната и вписаната окръжности за $\triangle ABC$ ($\triangle A_1B_1C_1$), да се докаже, че $\dfrac{r}{R} = \dfrac{r_1}{R_1}$.

(П. Макулев, Пловдив)

M^+59. В изпъкнал четириъгълник с периметър P е вписана окръжност с радиус R. Нека α е ъгълът, който сключват отсечките, свързващи допирните точки, лежащи върху срещуположните страни. Да се докаже неравенството $\dfrac{P}{R} \geq \dfrac{8}{\sin\alpha}$. Кога се достига равенството?

(Л. Зикатанов, София)

M^+60. Нека $f(x)$ е полином от степен n със старши коефициент 1, всички корени на който са реални числа. Да се докаже, че за всяко реално число x, по-голямо от най-големия корен на полинома, е в сила неравенството

$$\frac{f^{(1)}(x)}{1^1} \cdot \frac{f^{(2)}(x)}{2^2} \cdots \frac{f^{(n)}(x)}{n^n} \geq (f(x))^{\frac{n-1}{2}},$$

където $f^{(k)}(x)$ е k-тата производна на $f(x)$.

(Б. Михайлов, Пловдив)

Срок за изпращане на решения – 15 август 1995 г.

M^+37. Да се докаже, че за всяко неотрицателно цяло число n, числото $32.21^n + 2.47^n + 1$ е съставно.

(Св. Дойчев, Ст. Загора)

Решение на Г. Пламенов, 9 кл. ПМГ, Враца. Нека $A_n = 32.21^n + 2.47^n + 1$. За $n = 0$, $A_0 = 35 = 5.7$. При $n \geq 1$ има три възможности:

I. $n = 2k$, $k \geq 1$. Ще докажем, че $3/A_n$. Наистина имаме, че $32.21^n \equiv 0(\text{mod } 3)$ и $47^n = (47^2)^k \equiv 1(\text{mod } 3)$. Тогава $A_{2k} \equiv 2.1 + 1 \equiv 0(\text{mod } 3)$.

II. $n = 4k + 1$, $k \geq 0$. Сега от $21^4 \equiv 1(\text{mod } 13)$ и $47^4 \equiv 1(\text{mod } 13)$ следва, че $A_{4k+1} = 32.(21^4)^k.21 + 2.(47^4)^k.47 + 1 \equiv 6.8 + 2.8 + 1 \equiv 0(\text{mod } 13)$.

III. $n = 4k + 3$. В този случай е изпълнено $21^3 \equiv -4(\text{mod } 17)$, $21^4 \equiv 1(\text{mod } 17)$, $47^3 \equiv 4(\text{mod } 17)$ и $47^4 \equiv 1(\text{mod } 17)$. Оттук получаваме, че $A_{4k+3} = 32(21^4)^k.21^3 + 2(47^4)^k.47^3 + 1 \equiv (-2).(-4) + 2.4 + 1 \equiv 0(\text{mod } 17)$.

Следователно за всяко неотрицателно цяло число n числото A_n е съставно.

Задачата е решена и от А. Асенов – гара Бов; Д. Цветков, 10 кл. ПМГ – Монтана; Л. Каменова, 10 кл. СМГ – София и Ст. Миревски, 8 кл. ПМГ – Ловеч.

M^+38. Ще разберете КОЙ ТАМ ДРАЩИ, като решите ребуса КОЙ + ТАМ + ДРАЩИ = 20527. В него на различните букви отговарят различни цифри, а числото КОЙ приема най-малката възможна стойност.

(Ив. Тонов, София)

Решение на Л. Каменова. Очевидно Д= 2 или Д= 1. При Д= 2 имаме Р= 0 и най-малкото КОЙ е 134. Тогава ТАМ + АЩИ = 393. Но Т + А $\geq 5 + 6 = 11$ и значи предното равенство не е възможно. Следователно Д= 1 и най-малкото КОЙ е 203, поради което ТАМ + РАЩИ = 10324. За Р има две възможности:

I. Р= 9 $\Rightarrow$ ТАМ + АЩИ = 1324 $\Rightarrow$ М + И = 4 или 14. Тъй като са използвани вече цифрите 0, 1, 2, 3, то М + И = 14, т.е. {М, И} = {6, 8}. Но тогава 10(ТА + АЩ) = 1310 $\Rightarrow$ ТА + АЩ = 131 $\Rightarrow$ А + Щ = 11, Т + А = 12 $\Rightarrow$ А=7, Т=5, Щ=4. Следователно 20527=КОТКА, в което няма нищо чудно.

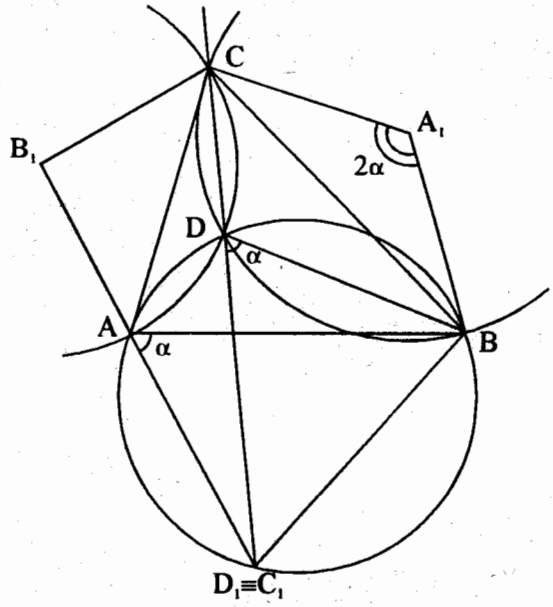
II. Р = 8 $\Rightarrow$ ТАМ + АЩИ = 2324, което не е възможно, тъй като 2.999<2324.

Задачата е решена и от Г. Пламенов.

M^+39. Върху страните на $\triangle ABC$ външно са построени $\triangle A_1BC$, $\triangle B_1AC$, $\triangle C_1AB$ така, че $A_1B = A_1C$, $B_1A = B_1C$, $\sphericalangle BAC_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle BA_1C$ и $\sphericalangle ABC_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle AB_1C$. Да се докаже, че $A_1B_1 \perp CC_1$.

(Б. Михайлов, Пловдив)

Решение. Нека окръжностите с центрове A_1 и B_1 и радиуси съответно A_1B и B_1A се пресичат в т. $D \neq C$, а правата CD пресича окръжността, описана около $\triangle ABD$, в т. D_1. Тъй като $A_1B_1 \perp CD$, достатъчно е да покажем, че $C_1 \equiv D_1$. Ще разгледаме случая, когато т. D е вътрешна за $\triangle ABC$ (вж. чертежа). Да положим $2\alpha = \sphericalangle BA_1C$ и $2\beta = \sphericalangle AB_1C$. Тогава $\sphericalangle BDC = 180° - \alpha$, $\sphericalangle ADC = 180° - \beta \Rightarrow \sphericalangle BDD_1 = \alpha$, $\sphericalangle ADD_1 = \beta$. Но $\sphericalangle BAD_1 = \sphericalangle BDD_1$ и $\sphericalangle ABD_1 = \sphericalangle ADD_1$. Следователно $\sphericalangle BAD_1 = \alpha = \dfrac{1}{2} \sphericalangle BA_1C$ и $\sphericalangle ABD_1 = \beta = \dfrac{1}{2} \sphericalangle AB_1C \Rightarrow D_1 \equiv C_1$.



Ако т. D не е вътрешна за $\triangle ABC$, доказателството не се променя съществено и го предоставяме на читателя.

Задачата е решена от А. Асенов, Г. Пламенов и Л. Каменова.

M^+40. Да се намерят всички естествени числа n, за които уравнението

$$\left[\frac{x^3 + y^3}{xy + x + y}\right] - \left[\frac{x}{y}\right] - \left[\frac{y}{x}\right] = n$$

няма решение в естествени числа (с $[a]$ е означено най-голямото цяло число, ненадминаващо a).

(Св. Дойчев, Ст. Загора)

Решение. Нека $f(x,y) = \left[\dfrac{x^3+y^3}{xy+x+y}\right] - \left[\dfrac{x}{y}\right] - \left[\dfrac{y}{x}\right]$. Използвайки неколкократно известното тъждество $[k+\alpha] = k + [\alpha]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ще пресметнем $f(n,n)$:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(n,n) &= \left[\frac{2n^3}{n^2+2n}\right] - 2 = \left[\frac{2n^2}{n+2}\right] - 2 = \\ &\left[2n - 4 + \frac{8}{n+2}\right] - 2 = 2n - 6 + \left[\frac{8}{n+2}\right]. \end{aligned}$$

Но при $n \geq 7$, $\dfrac{8}{n+2} < 1$, следователно $f(n,n) = 2n-6$. Това означава, че уравнението

$$(2)\qquad f(x,y) = n$$

има решение за всяко четно число, по-голямо от 6. Аналогично пресмятаме, че при $n \geq 3$ $f(n,n+2) = 2n - 3 + \left[\dfrac{16n+12}{n^2+4n+2}\right]$ и тъй като при $n \geq 13$, $\dfrac{16n+12}{n^2+4n+2} < 1$, то $f(n,n+2) = 2n-3$, $n \geq 13$. Ето защо (2) има решение за всяко нечетно число, по-голямо от 21. Лесно се проверяват равенствата: $f(3,1) = 1$; $f(3,2) = 2$; $f(4,1) = 3$; $f(5,2) = 5$; $f(5,1) = 6$; $f(6,3) = 7$; $f(7,3) = 9$; $f(8,4) = 11$; $f(8,3) = 13$, $f(7,1) = 15$; $f(10,4) = 17$; $f(12,7) = 19$; $f(9,2) = 21$. От всичко дотук следва, че (2) има решение за всяко цяло положително $n \neq 4$. Ще докажем, че уравнението

$$(3)\qquad \left[\frac{x^3+y^3}{xy+x+y}\right] - \left[\frac{x}{y}\right] - \left[\frac{y}{x}\right] = 4$$

няма решение в цели положителни числа. От (1) следва, че (3) няма решение, в което $x = y$. Тогава можем да предполагаме, че $x > y$, откъдето ще имаме, че $\left[\dfrac{y}{x}\right] = 0$. Нека $\left[\dfrac{x}{y}\right] = k \Rightarrow x \in [ky, (k+1)y)$. Така (3) приема вида

$$(4)\qquad \left[\frac{x^3+y^3}{xy+x+y}\right] = k+4.$$

Да разгледаме израза $\dfrac{x^3+y^3}{xy+x+y}$ като функция на x и да положим $g(x) = \dfrac{x^3+y^3}{xy+x+y}$. Тази функция расте в интервала $[ky, (k+1)y)$ (докажете!) и следователно $g_{\min} = g(ky) = \dfrac{y^2(k^3+1)}{ky+k+1}$. За да бъде изпълнено (4), е необходимо: $g_{\min} < k+5$, което ни дава

$$(5)\quad h(y) = (k^3+1)y^2 - (k^2+5k)y - (k^2+6k+5) < 0.$$

За да има решение (5), е необходимо квадратният тричлен $h(y)$ да има два различни реални корена. От формулите на Виет веднага следва, че един от тях ще е отрицателен. Но $h(1) = (k-5)(k^2+3k+4)+16 \Rightarrow h(1) > 0$ при $k \geq 5$ и следователно $h(y) > 0$ за всяко цяло положително y. Следователно (5) ще има цели положителни решения само при $k = 1,2,3$ и 4. Те са: $k = 1$, $y = 1,2,3,4$; $k = 2$, $y = 1,2$; $k = 3$, $y = 1$; $k = 4$, $y = 1$. Проверката ни убеждава, че в нито един от тези случаи не се получава решение на (4). С това задачата е решена

***M*+41**. Във всяка от $\binom{n}{k}$ на брой кутии ($1 \leq k \leq n$) има по k различни картички, върху всяка от които е написано число от 1 до n. Съдържанието на всеки две кутии е различно. Колко най-много картички може да премахне магьосникът Мерлин, така че след това сестра му Мирлен да може да възстанови съдържанието на всяка кутия?

(Я. Сидеров, 11 кл., СМГ, София)

Решение. Първо ще покажем, че както и Мерлин да премахне $\binom{n}{k-1}+1$ картички, сестра му не може да възстанови еднозначно съдържанието на кутиите.

Нека $A_1, A_2, \ldots, A_{\binom{n}{k-1}}$ са всички $(k-1)$-елементни подмножества на множеството от картички с номера $1, 2, \ldots, n$.

Да вземем всички кутии, които съдържат A_1. Те са точно $n-k$ на брой и всяка от тях съдържа освен A_1 и по още една картичка. Да оцветим тази картичка с цвят 1. Продължаваме по аналогичен начин с A_2 и оцветяваме $n-k$ картички в цвят 2 и т.н. Така оцветяваме всички картички в $\binom{n}{k-1}$ цвята (оставяме на читателя да съобрази, че всяка картичка е оцветена точно по веднъж).

Сега да допуснем, че Мерлин е извадил общо $\binom{n}{k-1}+1$ картички от кутиите. Тогава от принципа на Дирихле следва, че две от тях – нека това са a и b – ще са с еднакъв цвят i ($i \in \left\{1, 2, \ldots, \binom{n}{k-1}\right\}$). Нека a е извадена от кутията A, а b — от B. (Ясно е, че $A \neq B$, тъй като няма две едноцветни картички от една кутия). Тогава, възстановявайки съдържанието на кутиите, Мирлен ще се изправи през следната дилема: дали да сложи a в A и b в B (и всички други картички на място) или b в A и a в B. (Възможно е да има и други възможности, при което дилемата прераства в d-лема, $d \geq 2$). Тези две възможности са съществено различни,

тъй като числата, написани върху a и b са различни (иначе съдържанията на A и B щяха да съвпадат). Следователно Мирлен няма да може да възстанови еднозначно съдържанието на всяка кутия.

Остана да дадем пример, при който Мерлин премахва $\binom{n}{k-1}$ картички, така че Мирлен да може да възстанови съдържанието на кутиите.

Да разгледаме $\binom{n-1}{k-1}$-те кутии, в които има картичка с номер 1. Да премахнем тази картичка от всяка от тях. Сега във всяка от тези кутии има по $k-1$ картички (с номера от 2 до n), а съдържанията им съвпадат точно с всички $k-1$ елементни подмножества на множеството от картички с номера $2, 3, \ldots, n$. С тези кутии постъпваме по същия начин: да разгледаме $\binom{n-2}{k-2}$-те кутии **от тях**, които съдържат картички с номер 2. Да премахнем тези картички и т.н.

Така премахваме общо

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}+\cdots+\binom{n-k+1}{1}+\binom{n-k}{0}=$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}+\cdots+\binom{n-k+2}{2}+$$

$$\underbrace{\binom{n-k+1}{1}+\binom{n-k+1}{0}}=$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}+\cdots+\underbrace{\binom{n-k+2}{2}+\binom{n-k+2}{1}}=$$

$$\cdots=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-2}=\binom{n}{k-1}.$$

(Използвахме, че $\binom{p}{q}+\binom{p}{q-1}=\binom{p+1}{q}$, $1\le q\le p$).

След като тези картички са премахнати, Мирлен би могла да възстанови съдържанието на кутиите примерно със следните разсъждения: „Премахвани са картички от общо $\binom{n-1}{k-1}$ кутии, освен това $\binom{n-1}{k-1}$-те картички с номер 1 липсват. Следователно, тъй като не може да има две еднакви картички в една кутия, във всяка от тези $\binom{n-1}{k-1}$ кутии е имало картичка с номер 1.“

Нататък разсъжденията са аналогични: „След връщането на картичките с номер 1 по местата им, непълни остават $\binom{n-2}{k-2}$ кутии, а липсват $\binom{n-2}{k-2}$ картички с номер 2. Следователно във всяка от тези кутии е имало картичка с номер 2.“ и т.н., всичко е наред.

Окончателно отговорът е $\binom{n}{k-1}$.

***M*+42.** Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x,y)=|5x^2+24xy+5y^2|$, където x и y са цели числа, които не са едновременно нули.

(Р. Козарев, София)

Решение. Очевидно $f(1,0)=5$. Ще докажем, че $f(x,y)\ge 5$. Да отбележим най-напред, че тъй като $f(x,y)=f(y,x)$ можем да търсим най-малката стойност на $f(x,y)$ при условие, че $x\ge y$. Освен това $f(x,0)=5x^2\ge 5$ и значи можем да считаме, че $y\ne 0$, а следователно и $x\ne 0$. Също така, ако x и y са с еднакви знаци, имаме $f(x,y)=5x^2+24xy+5y^2=5(x+y)^2+14xy\ge 5.4+14>5$. Следователно можем да считаме, че x и y са с различни знаци. От всичко до тук заключаваме, че е достатъчно да покажем, че $|5x^2-24xy+5y^2|\ge 5$ за цели, положителни числа x, y. Нека $5x^2-24xy+5y^2=k$ и да допуснем, че $|k|\le 4$. Разглеждаме равенството $5x^2-24xy+5y^2-k=0$ като квадратно уравнение относно x. Тъй като x, y и k са цели, трябва дискриминантата му $D=119y^2+5k$ да бъде точен квадрат, т.е. $119y^2=z^2-5k$. (Да отбележим, че $k=0$ не е възможно.) Сега да забележим, че квадратичните остатъци по mod 7 са $0,1,2,4$. Следователно, ако $k=1,2,-3$ или 4, $7/119y^2$, но $7\nmid z^2-5k$. Също така квадратичните остатъци по mod 17 са $0,1,2,4,8,9,13,15,17$. Следователно ако $k=-1,-2$ или -4, $17/119y^2$, но $17\nmid z^2-5k$. Остана да разгледаме случая $k=3$, т.е. $119y^2=z^2-15$. Преди всичко, не е възможно y и z да са едновременно кратни на 3, така че трябва $3\nmid y$ и $3\nmid z$. Тогава $119y^2\equiv 2.1(\mathrm{mod}\ 3)$, а $z^2-15\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$. И в този случай достигаме до противоречие. Следователно най-малката стойност на $f(x,y)$ е 5.

Задачата е решена от Л. Каменова.

КОМПЮТЪР, УСТРОЕН ПО-ПРОСТО И ОТ МАШИНА НА ТЮРИНГ

Георги Георгиев, Стара Загора

В бр.1 от 1994г. бе публикувана конкурсна задача, отнасяща се до Машина на Тюринг (МТ) и Ограничена Машина на Тюринг (ОМТ). Вероятно любознателният ни читател знае, че машината на Тюринг е въображаемо устройство, което се използва в информатиката за определяне на понятието алгоритъм. Още през 30-те години на нашия век математиците забелязали, че различни формални системи за пресмятане имат еднакви възможности. Казано с други думи, колкото и мощен компютър да имаме (примерно PC 486 или Pentium) и някаква програма за този компютър, пресмятаща нещо, колкото си искаме сложно, можем да конструираме машина на Тюринг, която да извърши абсолютно същото пресмятане.

В задачата от бр.1/94г. се дава описание на ОМТ, която е устройство с по-проста конструкция дори от МТ. Целта на условие 3 е да се докаже, че МТ и ОМТ имат еднакви възможности, тоест, че ОМТ е също универсално изчислително устройство.

Условие 1 на задачата се решава за загрявка от опитни програмисти, работещи с МТ. Едно примерно решение е дадено в Листинг 1. То е вградено в програма на езика Pascal, като е ползвана реализацията му за компютър IBM PC, версия Turbo Pascal 7.0.

По-нататък за яснота работата на МТ ще описваме в редове от вида:

`i: A[0,i] B[0,i] C[0,i]/A[1,i]B[1,i]C[1,i]`,

където **i** е някое от допустимите състояния на главата на МТ, а **A**, **B** и **C** са матриците от дефиницията на МТ. Можем да си позволим удоволствието да заменим номерата на състоянията с думички (етикети). Използвайки този запис (който в програмирането се нарича обикновено "асемблерен език"), можем да опишем решението на Условие 1 така (състоянието 1 е заменено с етикета **pos**, а състоянието 0 с етикета **stop**):

```
pos:    0 1 start / 0 1 start
start:  1 1 move  / 1 1 start
move:   0 1 move  / 0 1 nul_j
nul_j:  0 0 stop  / 1 0 back
back:   0 0 back  / 1 1 start
```

Ето едно словесно описание на втория ред (или какво си мисли главата на МТ, докато е в състояние 2):

– Сега съм в състояние 2 (**start**). Ако на лентата има 0, трябва да запиша 1, да се преместя надясно и да премина в състояние 3 (**move**). Ако на лентата има 1, трябва да запиша 1, да се преместя надясно и да остана в състояние 2 (**start**).

За описание на работата на ОМТ ще използваме аналогичен запис:

`i> B[0,i] C[0,i] / B[1,i] C[1,i]`

Забележете, че при писането на програми за ОМТ не е необходимо да споменаваме за матрицата **A**, тъй като управляващата глава винаги обръща стойността на клетката под себе си, без да се интересува от състоянието си и прочетената стойност от лентата.

За да решим конкурсната задача, ще направим един често използван трик – най-напред ще докажем условие 3, а после, ползвайки плодовете от труда си, ще решим лесно условие 2.

Навсякъде с '?' ще отбелязваме, че не използваме съответната стойност от матриците на МТ или ОМТ.

Нека имаме дефинирана една МТ. Ще се опитаме да конструираме ОМТ, която да прави същото изчисление. Нека работата на МТ в състояние **i** се описва от командата:

`i: a0 b0 j / a1 b1 k`

Ще дефинираме няколко реда команди за ОМТ, които да свършат работата на състоянието **i**. Ще означаваме тези състояния с **i1, i2 ...**, като **i** ще е състоянието, от което започва имитацията на работата на състояние **i** на МТ от ОМТ. Тъй като работата на МТ е симетрична по отношение на 0 и 1, да анализираме ситуацията, когато лентата под главата съдържа 0. Да разгледаме два случая:

1. **a0=1**. Понеже в този случай МТ обръща клетката под себе си, имитацията на работата на състояние **i** на МТ от ОМТ може да се извърши с един ход: `i1> b0 j1 / ? ?`

2. **a0=0**. В този случай ще преместим главата на ОМТ на една стъпка в посоката, в която би тръгнала и главата на МТ, след това ще я върнем една клетка назад и накрая пак ще я пуснем да се премести един ход в правилната посока. Така клетката, над която е главата, ще бъде

обърната два пъти и окончателната ѝ стойност ще е 0. Главата на ОМТ ще се окаже на мястото, на което би отишла и главата на МТ. За жалост обаче клетката под новото положение на главата ще е с противоположна стойност. Ще наречем това състояние на лентата 'състояние с дефект'. Ето редовете, описващи имитацията в този случай:

```
i1> b0 i2 / ? ?
i2> 1-b0 i3 / 1-b0 i3
i3> ? ? / b0 j1'
```

Нека състоянието j на МТ има следното описание: `j: a2 b2 m / a3 b3 n`
Ако МТ се намира в 'състояние с дефект' и главата и е в състояние j, за да се оправи дефектът е необходимо да се изпълни не инструкцията с номер j, а нова – j', която ще наречем 'отражение' на j, и която има видът:

`j': a3 b3 n / a2 b2 m`

Лесно се вижда, че 'отраженията' решават проблема с дефектите, но при работата на МТ. Тъй като състоянията с дефект възникват при работата на ОМТ, необходимо е при възникването им да се изпълняват имитации на 'отражения', а не нормални инструкции за МТ. В този смисъл състоянието за ОМТ j1', получено при имитацията на подслучай 2, трябва да бъде имитация на 'отражението' на състоянието j.
След направените по-горе разсъждения ще опишем по-формално превода на състояние (ред от програма) на МТ до еквивалентна поредица състояния за ОМТ.
Състояние на МТ: `i: a0 b0 j / a1 b1 k`
Превод (в зависимост от стойностите на a0 и a1):

```
a) a0=0, a1=0 ->  i1> b0 i2 / b1 k1
                  i2> 1-b0 i3 / 1-b0 i3
                  i3> ? ? / b0 j1'
b) a0=0, a1=1 ->  i1> b0 i2 / b1 i3
                  i2> 1-b0 i4 / 1-b0 i4
                  i3> 1-b1 i4 / 1-b1 i4
                  i4> b1 k1' / b0 j1'
c) a0=1, a1=0 ->  i1> b0 j1 / b1 k1
d) a0=1, a1=1 ->  i1> b0 j1 / b1 i2
                  i2> 1-b1 i3 / 1-b1 i3
                  i3> b1 k1' / ? ?
```

След превода на всички нормални и 'отразени' състояния на МТ ще получим необходимото множество от състояния за ОМТ, които ни дават конструкцията, която търсим.
С това приключихме доказателството на Условие 3. Нашето доказателство е конструктивно – дадохме общи правила, съгласно които по дадена МТ се построява еквивалентна ОМТ. В математиката подобна еквивалентност на изчисляващи устройства се нарича 'сводимост'. За прилагането на общите правила за свеждането на изчисляващо устройство от един вид към друг има специален термин в програмирането - 'компилация'. 'Компилацията' може да се извършва и от компютър, тъй като представлява прилагане на общо правило и не се нуждае от творчески актове. В този случай програмата, която извършва компилация, се нарича 'компилатор'. Пример за хубав компилатор е програмата TPC.EXE за компютъра IBM PC. Тя превежда програми, описващи изчисления в термините на езика Pascal, до програми на машинен език за процесора 8086 или 80286.
Не представлява особена трудност да си направите собствен компилатор, който по дадена МТ да генерира еквивалентна ОМТ. За целта е достатъчно да следвате разсъжденията от доказателството на Условие 3.
Накрая ще се задоволим с една ръчна компилация на МТ от Условие 1 до ОМТ, като резултатът от работата ще е едно решение на Условие 2.
Най-напред ще изпишем всички нормални и 'отразени' състояния на сумиращата машина от решението на Условие 1:

```
pos:    0 1 start / 0 1 start
start:  1 1 move  / 1 1 start
move:   0 1 move  / 0 1 nul_j
nul_j:  0 0 stop  / 1 0 back
back:   0 0 back  / 1 1 start
pos':   0 1 start / 0 1 start
start': 1 1 start / 1 1 move
move':  0 1 nul_j / 0 1 move
nul_j': 1 0 back  / 0 0 stop
back':  1 1 start / 0 0 back
stop':  ? ? ?     / 0 0 stop
```

Ето и преводите им съгласно правилата от доказателството на Условие 2 (състоянията pos и pos' са идентични, затова превеждаме само pos):

```
pos1>   1 pos2    / 1 start1
pos2>   0 pos3    / 0 pos3
pos3>   ? ?       / 1 start1'
start1> 1 move1   / 1 start2
start2> 0 start3  / 0 start3
start3> 1 start1' / ? ?
move1>  1 move2   / 1 nul_j1
move2>  0 move3   / 0 move3
move3>  ? ?       / 1 move1'
nul_j1> 0 nul_j2  / 0 nul_j3
nul_j2> 1 nul_j4  / 1 nul_j4
nul_j3> 1 nul_j4  / 1 nul_j4
nul_j4> 0 back1'  / 0 stop1'
back1>  0 back2   / 1 back3
back2>  1 back4   / 1 back4
back3>  0 back4   / 0 back4
back4>  1 start1' / 0 back1'
start1'> 1 start1  / 1 start2'
start2'> 0 start3' / 0 start3'
start3'> 1 move1'  / ? ?
move1'>  1 move2'  / 1 move1
move2'>  0 move3'  / 0 move3'
move3'>  ? ?       / 1 nul_j1'
nul_j1'>  0 back1  / 0 stop1
back1'>   1 start1 / 0 back1
stop1'>   ? ?      / 0 stop1
```

Описаната по-горе ОМТ има 27 състояния (състоянието 0 е заменено с етикета **stop1**) и е решение на Условие 2 на задачата. Забележете, че използвахме състояние **stop1'**, което поправя дефект на лентата в самия край на изчислението. Тази машина може малко да се съкрати, ако слеем някои състояния с неизползвани позиции (**s3m3 = start3+move3** и **s3m3' = start3'+move3'**), а също и състояния, които правят едно и също (**nul_j2 = nul_j3**). След серия от такива замени и сливания получаваме ОМТ с 22 състояния:

```
pos1>   1 pos2    / 1 start1
pos2>   0 pos3    / 0 pos3
pos3>   ? ?       / 1 start1'
start1> 1 move1   / 1 s2m2
s2m2>   0 s3m3    / 0 s3m3
move1>  1 s2m2    / 1 nul_j1
s3m3>   1 start1' / 1 move1'
nul_j1> 0 nul_j2  / 0 nul_j2
nul_j2> 1 nul_j4  / 1 nul_j4
nul_j4> 0 back1'  / 0 stop1'
back1>  0 back2   / 1 back3
back2>  1 back4   / 1 back4
back3>  0 back4   / 0 back4
back4>  1 start1' / 0 back1'
start1'>1 start1  / 1 s2m2'
s2m2'>  0 s3m3'   / 0 s3m3'
move1'> 1 s2m2'   / 1 move1
s3m3'>  1 move1'  / 1 nul_j1'
nul_j1'>0 back1   / 0 stop1
back1'> 1 start1  / 0 back1
stop1'> ? ?       / 0 stop1
```

След заменяне на етикетите с поредни номера можем да построим матриците **B** и **C**, необходими за точното описание на решението на Условие 2. Листинг 2 демонстрира полученото решение, което ползва средствата от Листинг 1, отделени в библиотеката **MT_LIB**.

Заключение: Надявам се, че разсъжденията, изложени в статията, са ви докоснали отново до вечни философски въпроси като: *'Кому е нужно всичко това ?' 'Защо съществуват компютрите ?' 'Кой ден сме днес, не е ли четвъртък ?'* и пр.

Надявам се също така, че съм задоволил маниакалната нужда на определен контингент програмисти да пишат програми за Машина на Тюринг. Ще се радвам искрено, ако тези хора осъзнаят досегашните си заблуждения и се заемат в най-кратки срокове с разработката на програмни продукти за Ограничената Машина на Тюринг.

```
unit mt_lib;
interface
var T:array[-1000..1000] of byte; { Лента }
    pc,  текущо състояние
    pt,  позиция на главата върху лентата
    w:integer;
procedure Show;
procedure Init;
implementation
procedure Init;
 const K = 5; L = 4; x = K+5; { начално състояние на лентата }
 begin
  for w:=-1000 to 1000 do T[w]:=0;
  for w:=1 to K do T[w]:=1;
  for w:=x+1 to x+L do T[w]:=1;
  pt:=0; pc:=1; Show;
 end;
procedure Show;
 begin
  for w:=-2 to 52 do if T[w]=0 then write('0')
                                else write('1');
  writeln; for w:=-1 to pt do write(' ');
                              write(pc); readln;
 end;
end.
```

Листинг 1

```
program mt;
uses mt_lib;

const N = 5;
type  Map = array[0..1,1..N] of byte;

const A:Map = ((0,1,0,0,0),
               (0,1,0,1,1));
      B:Map = ((1,1,1,0,0),
               (1,1,1,0,1));
      C:Map = ((2,3,3,0,5),
               (2,2,4,5,2));
begin
 Init;
 while pc>0 do begin
  w:=T[pt]; T[pt]:=A[w,pc];
  if B[w,pc]=0 then dec(pt) else inc(pt);
  pc:=C[w,pc]; Show
 end;
end.
```

Листинг 2

```
program omt;
uses mt_lib;
const N = 21; U = 255;
type  Map = array[0..1,1..N] of byte;
const
 B:Map = ((1, 0, U, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0,
           1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, U),
          (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1,
           1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0));
 C:Map = ((2, 3, U, 6, 7, 5,15, 9,10,20,12,
           14,14,15, 4,18,16,17,11, 4, U),
          (4, 3,15, 5, 7, 8,17, 9,10,21,13,
           14,14,20,16,18, 6,19, 0,11, 0));
begin
 Init;
 while pc>0 do begin
  w:=T[pt];  T[pt]:=1-T[pt];
  if B[w,pc]=0 then dec(pt) else inc(pt);
  pc:=C[w,pc]; Show
 end;
end.
```

Скелет$^{+}$

М+ КОНКУРС ПО ИНФОРМАТИКА

В тази рубрика се предлагат задачи-теми за програмиране. Те няма да бъдат съвсем изчерпателно формулирани, за да може читателите да проявят своето творчество и в постановката им, което донякъде е естествено при задачите за програмиране. Основна тежест в нашия конкурс има създаването и обосноваването на ефективен алгоритъм за решаване, но задачата ще се счита за напълно решена, ако за нея има завършена и работеща програма. Най-добрите предложени алгоритми и програми ще бъдат съобщавани и обсъждани на страниците на списанието.

Решенията на конкурсните задачи трябва да съдържат описание на алгоритъма и текста на програмната реализация. Препоръчва се да се използва език за програмиране и компютърна среда, които са по-широко разпространени у нас. Желателно е текстът на програмата да е записан върху дискета с указания за използването му. Изпратената от Вас дискета ще Ви бъде върната по пощата. За да стане това по-бързо, дискетата трябва да бъде снабдена с подходяща опаковка, с надписан адрес за получаване и пощенска марка. За разполагащите с електронна поща адресът е:

`or@bgearn.bitnet subject: E.Kelevedziev`,

а за използващите традиционната поща:

1113 София
ул. Акад. Г. Бончев бл. 8
Институт по математика при БАН
Емил Келеведжиев

Задача 9. Една река пресича шосе на N места. Нито шосето, нито реката се самопресичат. Вървейки по шосето, номерираме пресечните точки последователно от 1 до N. Плувайки по реката, номерираме същите пресечни точки последователно пак с числата от 1 до N. Получава се следното съответствие: точката с номер 1 при първото номериране има номер $P(1)$ при второто номериране, точката с номер 2 – $P(2)$ и т.н., точката с номер N – $P(N)$. Съставете програма, която при зададено естествено число N:

1. Генерира всички възможни съответствия от описания вид.
2. При зададена пермутация $P(1), P(2), \ldots, P(N)$ на числата $1, 2, \ldots, N$ проверява дали това е съответствие от описания вид и изобразява графично как реката пресича шосето.

За колко голямо N вашата програма работи удовлетворително бързо?

(Емил Келеведжиев, София)

Срок за изпращане на решенията 15 август 1995 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ПО ИНФОРМАТИКА

Задача 5. За решението на задачата вижте статията от стр. 36. Тук ще коментираме писмата на **Иво Николов** от София и **Камен Петров** от Ловеч. Въпреки че задачата изисква съставяне на програми за МТ и ОМТ, както и доказателство за сводимостта на ОМТ към МТ, двамата участници са предпочели да добавят към решението (съвсем правилно) компютърни програми, моделиращи работата на тези машини. Това е естествен начин да се проверява правилността на програмите за МТ и ОМТ или да се наблюдава работата им, нещо което е много трудно без помощта на компютър. В моделиращата си част компютърните програми малко се различават от програмата в цитираната по-горе статия. Програмата на Иво Николов, реализирана със средствата на Turbo Vision, е доста приятна среда за програмиране на МТ и ОМТ. И двамата участници не са успели да достигнат до конструиране на оптималната (по брой тактове) машина на Тюринг. Иво използва 7, а Камен – 8 състояния (вместо авторовите 5) и това увеличава броя на тактовете. Машината на Иво дава по-добри резултати в това отношение при малки значения на $x - K$, докато машината на Камен е по-бърза, когато $x - K$ нараства. При построяване на ОМТ Камен е успял да се справи с 16 състояния, докато решението на Иво е по-близо до авторовото (без оптимизацията) – 26 състояния. Поведението на двете ОМТ в зависимост от значението на $x - K$ се запазва, тъй като двете машини са отражение на алгоритмите, реализирани при съответните МТ. Само Иво е опитал (неуспешно) да докаже твърдението на III задача с математическа индукция. Това едва ли е най-добрият метод за случая. Съветваме любознателния читател внимателно да се запознае с предложеното от автора решение, което макар и не много лесно за разбиране, разкрива математическата прелест на задачите за свеждане на един формализъм към друг.

доц. Кр. Манев

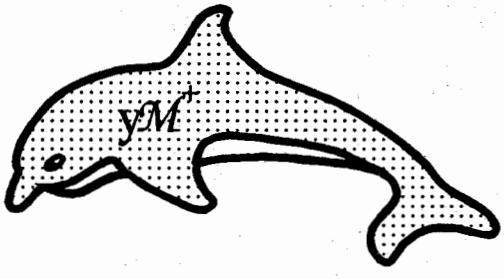
$\mathcal{M}$+конкурс

Драги читатели,

МАТЕМАТИКА ПЛЮС си поставя благородната задача да издирва и поощрява най-талантливите от вас чрез задочното математическо състезание **ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ у$\mathcal{M}^+$**. На следващите страници в този брой ще откриете четива за 4–5 и 6–7 клас, а след тях — конкурсните задачи от II кръг. Прочетете внимателно четивата и решете упражненията след тях. Поне една от конкурсните задачи е свързана с четивото за съответния клас, затова горещо ви препоръчваме да положите усилия, за да го разберете и изучите задълбочено. Ако нещо ви затруднява, обърнете се към учителя по математика или пишете до редакцията. Но задачите решавайте самостоятелно! Знаете ли колко голямо е удоволствието, когато успеете да намерите сами отговора? Не се отчайвайте, ако не се справите с всички задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. Допуска се и колективно участие.

В бр. 2 за 1995 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС очаквайте четивата и задачите от III кръг. Жури под председателството на известния български математик академик Благовест Сендов ще преглежда вашите решения. За най-добрите от вас и учителите ви подготвяме изненади. Те ще бъдат награда за положения през учебната година труд.

Побързайте! Очакват ви четивата и задачите от II кръг. Желаем ви успех!



Конкурсът се провежда със съдействието на

За инициативата на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС – ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ у$\mathcal{M}^+$ е създаден специален фонд. Желаещите да спонсорират или да направят дарение могат да използват банковата сметка на фонда:

586 180 0775 005, Банка за земеделски кредит АД, София,

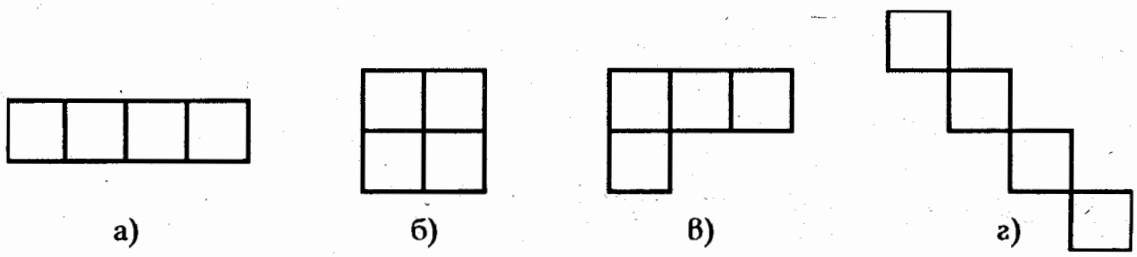
за фонд „ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ“.

НАЙ — НАЙ — НАЙ

Четиво за 4 и 5 клас

Често в задачите, които решаваме, се търси „най-малкото“, „най-голямото“, „най-евтиното“, най-икономичното“ решение. Задачи, в които се търси „най-...“ вариант при дадени условия, се наричат екстремални задачи (екстремален означава краен, а екстремум – крайност).

Задача 1. Страната на едно квадратче е 1 см. Определете лицето и обиколката на фигурите:



Сравнете лицата им. Коя фигура има най-малка обиколка?

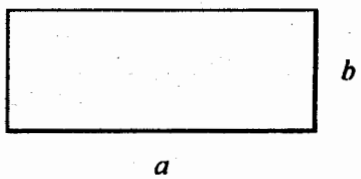
Решение:

	а)	б)	в)	г)
S (кв.см.)	4	4	4	4
P (см)	10	8	10	16

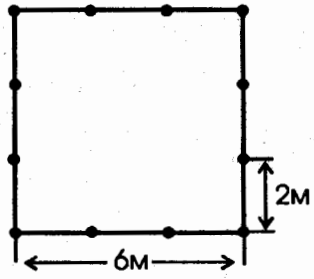
Получихме, че фигурите имат едно и също лице 4 кв.см., а най-малка е обиколката на квадрата – 8 кв.см.

Задача 2. Една зеленчукова градина има правоъгълна форма с площ 36 кв.м. Посочете какви са възможните размери на тази градина в метри, ако се знае, че те са естествени числа. При кои от тях обиколката на градината е най-малка? С какъв най-малък брой колове може да се направи ограда на градината, ако коловете се поставят на разстояние 2 м един от друг?

Решение: Тъй като лицето на правоъгълник с размери a и b е $S = ab = 36$, където a и b са естествени числа, то a и b са делители на 36. В таблицата са записани възможните размери на градината и обиколката P (в метри) за всеки от случаите



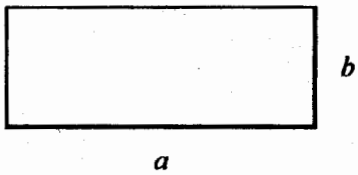
a (м)	1	2	3	4	6	9	12	18	36
b (м)	36	18	12	9	6	4	3	2	1
P (м)	74	40	30	26	24	26	30	40	74



От таблицата се вижда, че най-малка обиколка при даденото лице има градината с квадратна форма със страна 6 м. Следователно най-малък брой колове са необходими за оградата на тази квадратна градина и техният брой е 12.

Задача 3. Двор има форма на правоъгълник с обиколка 36 м. Посочете възможните размери на този двор в метри, ако знаем, че те са естествени числа. При кои от тях площта на двора ще бъде най-голяма? Какъв най-голям добив от ягоди ще получим, ако от 1 кв.м. площ се получават 1,2 кг ягоди?

Решение: За обиколката на правоъгълника с размери a и b имаме $P = 2(a + b)$. Ето защо $2(a + b) = 36$ или $a + b = 18$.



a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
b	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	...
S	17	32	45	56	65	72	77	80	81	80	...

От таблицата се вижда, че най-голяма площ има дворът с форма на квадрат със страна 9 м. Следователно от него ще получим най-голям добив от ягоди. Отговорът е $81.1,2 = 972$ кг ягоди.

Като ползваме резултатите от решените задачи, можем да направим два важни извода. Препоръчваме ви да ги запомните добре.

I. От всички правоъгълници с дадено лице най-малка обиколка има квадратът.

II. От всички правоъгълници с дадена обиколка най-голямо лице има квадратът.

Предлагаме ви още няколко задачи за самостоятелна работа.

Задача 4. При откриване на международен спортен турнир 48 спортисти „оформили“ правоъгълен блок. По колко начина могат да се подредят спортистите? Как да се оформи този блок, че цветната лента, която го огражда от всички страни, да бъде най-къса, ако предположим, че спортистите са подредени един до друг?

Задача 5. Нива има площ 65 кв.м. Посочете възможните размери (в метри) на нивата, ако се знае, че те са естествени числа. При кои от тях обиколката на нивата е най-малка? Най-малко колко метра бодлива тел е необходима, за да се направи ограда от 5 реда бодлива тел?

Задача 6. От ламарина трябва да се направи тава с правоъгълно дъно с обиколка 14 дм. При какви размери на тавата, тортата изпечена в нея, ще има най-голяма площ за украсяване?

Накрая ви предлагаме една забавна екстремална задача, известна като „задачата за сините очи“.

Задача 7. Двама познати, които били математици, се срещат и първият пита втория:

— Не сме се виждали дълги години, имаш ли деца?

— Да, имам три деца. Произведението на годините им е 36. Можеш ли да познаеш възрастта на всяко от тях?

— За съжаление не мога. Подскажи ми.

— Сборът от годините на трите деца е равен на номера на отсрещната къща.

— Подскажи ми още нещо.

— Най-малкото ми дете е със сини очи.

— Вече познах. Две от децата ти са на по 6 години, а третото е на 1 година.

Обяснете разсъжденията на втория познат.

Решение: Тъй като произведението на годините е 36, всичките възможности са следните:

I дете	1	1	1	1	1	2	2	3
II дете	1	2	3	4	6	2	3	3
III дете	36	18	12	9	6	9	6	4
сбор	38	21	16	14	13	13	11	10

От таблицата се вижда, че ако посоченият номер не е бил 13, то вторият познат би познал годините на децата. Следователно номерът на къщата е бил точно 13. Сега решението следва от условието, че между децата има само едно, което е най-малкото.

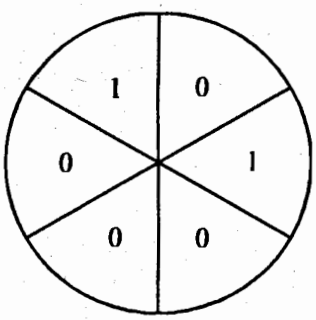
Автор на четивото Диана Раковска

ИНВАРИАНТИ

Четиво за 6 и 7 клас

Млади приятели, на математически състезания, конкурси и олимпиади често се дават задачи, подобни на следната:

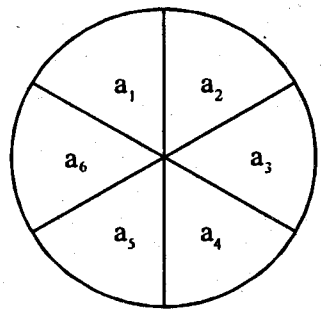
Задача 1. Кръг е разделен на 6 сектора, в които последователно са написани числата 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешава се едновременно да се увеличат с 1 числата в два съседни сектора. Може ли след няколко такива операции да се получат 6 равни числа?



Отличителната черта на тези задачи е, че в условието им е описана някаква операция – начин на действие (в задача 1 това е едновременното увеличаване с 1 на числата в два съседни сектора) и се пита може ли в резултат на неколкократно прилагане на операцията да се получи един или друг ефект (в задача 1 – да се получат 6 равни числа). Един начин за решаването им е намиране

на свойство на „началния“ обект, което не се променя при извършване на операцията от условието. Такова свойство се нарича инвариант. Ако „крайният“ обект, за разлика от „началния“, не притежава това свойство, той очевидно не може да бъде получен, колкото и операции да се извършат.

За да се изясни по-добре смисълът на казаното погоре, да решим задача 1. Нека след определен брой операции в секторите на кръга сме записали съответно числата a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Да разгледаме израза $A = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. Очевидно стойността му е инвариантна (не се променя) относно операцията от условието (прибавяне на 1 към две съседни числа). В началната позиция имаме $A = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2$, а при 6 равни числа $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$ очевидно $A = 0$. Понеже стойността на A не се променя, то колкото и операции да извършим, не можем да получим 6 равни числа.



А сега, приятели, опитайте се да решите сами следната

Задача 2. Дадена е редицата от 6 числа

$$1, 2, 3, 4, 5, 1994.$$

От нея избираме две произволни числа a и b. Разрешава се да се замести a с $a-1$ или с $a+1$ и b с $b-3$ или $b+3$. Останалите четири числа не се променят. Получената нова редица може да се измени по същото правило и т.н. Възможно ли е след няколко такива операции да се достигне до редицата

$$1995, 5, 4, 3, 2, 1?$$

Главното е да се намери инвариант, останалото е стандартно и лесно. Ако успеете — „Вие сте СУПЕР“, а ако не успеете – „Вие пак сте СУПЕР“, защото не се уплашихте, а опитахте. Сигурен съм, че ще мине време и ще успявате във всичко, с което се захванете. А сега да пристъпим към решаването на задачата.

Да забележим, че сумата от числата на дадената редица е нечетно число (тя съдържа 3 четни и 3 нечетни числа). Тази сума не променя четността си при прилагане на операцията от условието (четността на сумата на числата в редицата във всеки момент е инвариантна). Наистина, тя се променя или с $+1+3=4$, или с $+1-3=-2$, или с $-1+3=2$, или с $-1-3=-4$, т.е. с четно число. Но сумата на числата в редицата $1995, 5, 4, 3, 2, 1$ е четно число (тя съдържа 4 нечетни числа). Ето защо тя не може да се получи от първоначалната редица, колкото и пъти да прилагаме разрешената операция.

Вече разбрахте, че ако „крайният“ обект за разлика от „началния“ не притежава намерения инвариант, то той не може да се получи от „началния“, колкото и пъти да се приложи операцията от условието. А как стои въпросът, ако както и началният, така и „крайният“ обект притежават този инвариант? (Ще ме зарадват много тези от Вас, които сами са си задали този въпрос.) Можем ли да твърдим със сигурност, че прилагайки операцията от условието няколко пъти, ще получим „крайния“ от „началния“? Отговор на този въпрос в общия случай не може да се даде. Ако той е положителен, трябва да се даде пример, какъвто е случаят в следната

Задача 3. Разполагаме с три автомата, всеки от които прочита от картичка двойка цели числа и издава нова картичка по следните правила: след като

прочете картичка с двойка числа (a, b), I автомат отпечатва картичка с двойка числа $(a-b, b)$, II автомат – картичка с числа $(a+b, b)$, а III автомат – с числата (b, a). Нека първоначално разполагаме с картичка (19, 94). Може ли, използвайки автоматите, да получим от нея картичка с числата

а) (19, 96)

б) (19, 95)?

Трудностите свършват в момента, в който забележим, че с действията си всеки от автоматите запазва най-големия общ делител на числата a и b (НОД (a, b)). Тъй като НОД$(19, 94) = 1$, а НОД$(19, 95) = 19$, то отговорът на б) е отрицателен. В случая на а) имаме НОД$(19, 96) = 1$. Отговорът на въпроса е положителен, както се вижда от следния пример:

$$(19,94) \xrightarrow{\text{III}} (94,19) \xrightarrow{\text{I}_4} (18,19) \xrightarrow{\text{III}} (19,18) \xrightarrow{\text{I}} (1,18) \xrightarrow{\text{III}} (18,1) \xrightarrow{\text{II}} (19,1) \xrightarrow{\text{III}}$$

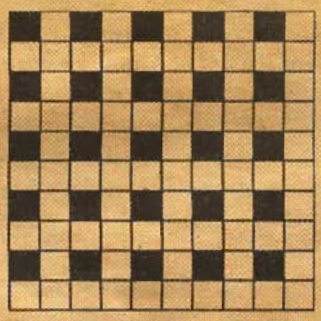
$$\xrightarrow{\text{III}} (1,19) \xrightarrow{\text{II}_5} (96,19) \xrightarrow{\text{III}} (19,96)$$

(тук I_4 означава пускане на картичката четири пъти последователно в автомата I, аналогично II_5 и т.н.).

Както видяхме, за инвариант могат да служат най-различни свойства: стойност на някакъв израз (задача 1), четност (задача 2), НОД (задача 3). Ще спомена още няколко възможни свойства-инварианти: остатък при деление с някакво число, произведение на няколко числа и т.н. В едни задачи инвариантите лесно ще „изплуват на повърхността“, а в други ще трябва да се „гмуркаме доста дълбоко“, за да ги открием, но затова пък удоволствието ни и удовлетворението ни ще са много по-големи.

Ето още една задача, която се решава с подобна идея

Задача 4. Дадена е квадратна дъска със страна 10 см., която е разделена на 100 малки квадратчета със страна 1 см. Разполагаме с 25 еднакви правоъгълни плочки с дължина 4 см и ширина 1 см, всяка от които е разделена на четири квадратчета със страна 1 см. Възможно ли е с плочките да покрием дъската?



Решение: Да оцветим дъската в бяло и черно, както е показано на рисунката. Получаваме 25 черни и 75 бели квадратчета. Да забележим, че както и да поставим плочката върху дъската, така че всяко квадратче от плочката да съвпадне с някое квадратче на дъската (това всъщност е операцията), тя ще покрива четен брой (2 или 0) черни квадратчета. Следователно, както и колкото и плочки да поставим върху дъската, така че всяко квадратче от плочките да е върху квадратче от дъската, те ще покриват четен брой черни квадратчета (това е инвариантът). От друга страна общият брой черни квадратчета е 25, което е нечетно число. Следователно отговорът на въпроса от условието на задачата е отрицателен.

И така, приятели, надявам се, че срещата ви с инвариантите е била приятна и полезна.

Иван Симеонов

Ум+конкурс

ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ

ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ е задочно математическо състезание. За победителите подготвяме страхотни изненади. Състезанието се провежда в 3 кръга. В този брой ви представяме задачите от II кръг и така наречената „Десета задача". Задачите от III кръг ще бъдат публикувани в бр. 2 за 1995 г. на списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС. Поне една от задачите е свързана с четивата за съответните класове от предните страници. Прочетете ги внимателно, решете задачите и едва тогава се захванете със задачите от състезанието. Не се отчайвайте, ако не се справите и с трите задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. В писмата отбелязвайте трите си имена, класа, училището, името на учителя ви по математика. Допуска се и колективно участие (ако например задачите се разглеждат в школата по математика). В този случай изпращайте само едно писмо с името на избран от вас капитан на отбора. Пишете на адрес

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
Институт по математика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев", бл. 8
1113 София

II КРЪГ

Задачи за 4 клас

4. Едно число е записано с четири различни цифри в ненамаляващ ред отляво надясно. Ако това число съберем с числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, ще получим 14553. Намерете числото.

5. Трите деца в едно семейство получили изненада за Великден — 8 сини, 8 червени и 8 жълти изкуствени яйца. Всяко синьо яйце съдържало по 5 лв, всяка червено – по 3 лв и всяко жълто – по 1 лв. Всяко дете взело по 8 яйца и всяко дете имало яйца от трите цвята. Оказало се, също така, че всяко дете събрало една и съща сума от всичките си яйца. Как са разпределени яйцата между децата? Обосновете отговора си!

6. В магазин се продават правоъгълни килими, чиито размери в метри са цели числа и обиколките им са 16 м. При какви размери на килима може да се твърди, че той ще покрива най-голяма площ?

Задачи за 5 клас

4. Тодор казал на чичо си: „Когато сестра ми Анна стане със 7 години по-голяма, отколкото аз бях на възрастта, на която тя е сега, аз ще бъда толкова голям, колкото си бил ти, когато татко е бил на възрастта, на която ти си сега." Ако Тодор сега е на 17 години и баща му е на 52, на колко години е чичо му?

5. Три момчета Иван, Антон и Георги отишли в сладкарница с майките си. Имената на майките са Мария, Жана и Елена, но в този ред не непременно съответстват на имената на момчетата. Антон изял два пъти повече пас-

ти, отколкото сока е изпила майката на Иван; а соковете на майката на Иван били два пъти по-малко от пастите, които изял синът на Жана. Жана не пила сок, но изяла два пъти по-малко сладоледа отколкото Елена, а сладоледите на Елена били два пъти повече от пастите на Антон. Майката на Иван изпила два пъти по-малко сокове отколкото сладоледи е изяла майката на Антон.

Определете името на майката на всяко момче.

6. От ленен плат са изработени няколко покривки с правоъгълна форма, чиито размери в дециметри са цели числа и имат лице 144 кв.дм. При какви размери на покривката ще е необходима най-малко дантела за обшиването ѝ от всички страни?

Задачи за 6 клас

4. В държавата Троп паричната единица е *бам* с нейното подразделение *кин*, като 1 бан има 24 кина. Известно е, че бамите за 10 лв са 15 пъти повече от стотинките за 1 кин. Намерете левовата равностойност на 1 бам (т.е. колко лева трябва да се дадат, за да се купи 1 бам).

5. Да се намерят всички правоъгълници с целочислени дължини на страните, периметърът на които е равен на лицето им.

6. На черна дъска са написани целите числа от 1 до 1000 включително. Разрешено е да се изтрият няколко числа и вместо тях да се запише остатъкът при деление на сумата им с 13. След няколко стъпки на дъската остават две числа, едното от които е 229. Кое е другото число?

Задачи за 7 клас

4. В началото на учебната година Петър се записал в кръжок по математика и в училищния хор. Сбирките на кръжока и на хора ставали по едно и също време, но на различни места. До мястото на кръжока Петър пътува с автобус А, а до мястото на хора – с автобус В. Петър трябвало да избере едно от двете места и оставил това на случайността. Той решил да отива на спирката на автобусите всеки ден в произволно време между 15 и 16 часа и да се качва на онзи автобус А или В, който пристигне пръв. След 20 дни проверил кое е посещавал повече: кръжока или хора – за да избере онова място, което е повече посетено. Оказало се, че е бил на кръжока по математика 15 пъти, а на хора 5 пъти. Известно е, че всеки от автобусите А и В се движи точно по разписание през интервал 20 минути (за всеки от тях). Автобусът А минава през спирката на Петър в 15^{00}, 15^{20}, 15^{40}, 16^{00}, ...

В кое време между 15 и 16 часа минава автобус В през същата спирка?

5. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5$ е петоъгълник. Срещуположна страна за върха A_1 ще наричаме страната A_3A_4. Срещуположна на A_2 е A_4A_5; на A_3 е A_5A_1; на A_4 е A_1A_2 и на A_5 срещуположна е A_2A_3.

Нека M е такава вътрешна точка за изпъкналия петоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$, че никои три от шестте точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, M не лежат на една права. Точката M е свързана с права с всеки от върховете на петоъгълника.

Да се докаже, че броят на онези от правите, които не пресичат съответната срещуположна страна, е четно число.

6. Дадена е квадратна дъска със страна 8 см, която е разделена на 64 малки квадратчета със страна 1 см. Г-тетрамино ще наричаме плочка във формата на буквата Г, съставена от четири квадратчета със страна 1 см, а квадратно-тетрамино – плочка във вид на квадрат, също съставена от четири квадратчета със страна 1.

Може ли с 15 Г-тетрамино и едно квадратно-тетрамино да се покрие дъската? Отговорите да се обосноват!

Задачите се предложени от К. Банков, Д. Раковска и Ив. Симеонов.

Краен срок за изпращане на решенията от II кръг – 30 април 1995 г.

Десета задача

Задочното математическо състезание ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ у$\mathcal{M}$+ се провежда в 3 кръга, като всеки кръг за учениците от всеки клас има по 3 задачи – общо 9 задачи. Към състезанието се включва още една по-трудна задача, наречена „десета задача". Десетата задача изисква по-продължителна работа и може да търпи известни обобщения. Очакваме от вас да я решите, да опишете решението, като обърнете внимание на забелязаните от вас обобщения, логически връзки между отделните пунктове и т.н. Не бързайте с изпращането на решенията на „десетата задача". Разполагате с много време, за да можете да се връщате към нея няколко пъти и да я оглеждате от различни страни. Материалите, изпратени по „десетата задача", ще имат важно значение за определяне на победителите.

4 клас

Едно естествено число x ще наричаме интересно, ако сумата от цифрите на x, както и сумата от цифрите на $x+1$ е четно число. Колко на брой са „интересните" естествени числа, които са по-малки от 1000?

5 клас

Да се намери най-малкото естествено число, произведението от цифрите на което е равно на 661 500

6 клас

Квадратът на едно естествено число има 22 цифри. Първите десет (отляво надясно) са равни на 1, а следващите 11 са равни на 2. Да се намери числото.

7 клас

Върху черна дъска са наредени една след друга в редица N звездички, $N \geq 3$. Двама играчи играят следната игра: отначало първият си избира произволни звездички, но не повече от $N-2$, и всяка от избраните заменя с цифра (на мястото на първата звездичка отляво надясно не може да се пише нула). След това вторият си избира произволна неизбрана звездичка и я заменя с цифра. Накрая първият заменя с цифри всички останали звездички. Той печели играта, ако полученото число е точен квадрат на естествено число. Да се намери най-малкото N, за което първият играч разполага с печеливша стратегия, т.е. може да спечели играта независимо от хода на втория играч. Какви изменения или обобщения на играта можете да предложите?

Краен срок за изпращане на решенията на Десетата задача 31 май 1995 г.

ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КОЛЕЖИТЕ НА ОБЕДИНЕНИЯ СВЯТ

(*от стр.* 5)

1. Знаменателят е положителен и получаваме уравнението $|x^2-2x-3|+3=x^2+2x+1+|x-4|$. Разглеждаме уравнението в интервалите $(-\infty,-1)$, $[-1,3]$, $(3,4)$ и $[4,+\infty)$. В първия случай получаваме $x=-5/3$; във втория — уравнението $2x^2-x-1=0$ с корени $x_1=-1/2$ и $x_2=1$; в третия случай намираме $x=-5/3$, което не е решение; в четвъртия случай намираме, че $x=3/5$, което отново не е решение. Окончателно решенията са $-\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, 1$.

2. Тъй като триъгълниците ADC и ACB са подобни, а AN и AM са медианите към съответните страни CD и BC, то триъгълниците ANC и AMB също са подобни. Следователно $\sphericalangle ANC = \sphericalangle AMB$, т. е. $\sphericalangle QNP + \sphericalangle PMQ = 180°$. Следователно четириъгълникът $PMQN$ е вписан в окръжност.

3. Ако $x<0$, то $|x|=-x$ и уравнението $-2x^2+(a-1)x+18=0$ има един положителен и един отрицателен корен. Следователно за всяко a уравнението от условието има точно един корен. Нека $x>0$. Уравнението става $2x^2+(a-1)x+18=0$ и то има само един положителен корен при $a>13$. Отново получаваме, че уравнението от условието има точно един корен. В случая $a<-11$ корените му са точно два. Окончателно решенията са $a<-11$.

4. а) Отсечката MK е равна и успоредна на BC от свойствата на симетрията. Следователно MK е равна и успоредна на AD и четириъгълникът $ADMK$ е успоредник. Тогава триъгълниците AMK и MAD са еднакви.

б) Понеже окръжностите k_1 и k_2 са симетрични спрямо P, точката K лежи на k_1. Следователно описаната около триъгълника AMD окръжност е k_1 и има радиус 1 см. От еднаквостта на триъгълниците AMK и MAD следва, че описаната около триъгълника MAD окръжност има радиус, равен също на 1 см.

5. Проверяваме, че $\overline{abcabc}=1001.\overline{abc}=7.11.13.\overline{abc}$. Следователно числата 1, 7, 11, 13, 7.11, 7.13, 11.13, 7.11.13, както и тези числа, умножени с числото $\overline{abc}$, са 16 различни делителя на даденото число. Следователно, числото $\overline{abc}$ е просто, а наймалкото трицифрено просто число е 101. Тогава търсеното число е 101101.

КЕНГУРУ

(*от стр.* 8)

I група: 10.C); 18.B); 25.D). II група: 10.C); 17.E); 21.A). III група: 6.D); 14.C); 22.D). IV група: 5.C); 16.C); 22.B). V група: 10.B); 17.D); 29.D). VI група: 8.D); 12.D); 27.D).

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛ...

(*от стр.* 20)

1. $\sphericalangle NBC$ е съседен на $\sphericalangle ABN \Rightarrow \sphericalangle NBC = 180° - \sphericalangle ABN$, $\sphericalangle ABN = 90° - 48° = 42° \Rightarrow \sphericalangle NBC = 138°$.

2. Означаваме с $x°$ големината на един от четирите ъгъла, образувани при пресичането на двете прави. Тогава двата му съседни ъгъла са $180° - x°$, а противоположният му ъгъл е също $x°$. Следователно $x° + 264° = 2(180° - x°) + x°$. Отг. 48°, 132°, 48°, 132°

3. Намерете големините на $\sphericalangle BOM$ и $\sphericalangle BON$. Отг. 5:7 или 5:13 в зависимост от това с кой от двата съседни ъгли на $\sphericalangle AOB$ се работи.

4. 75° и 105°

5. Използвайте, че ако означим с $x°$ единия от двата ъгъла, на които $\overrightarrow{OC}$ разделя $\sphericalangle AOB$, то другият е $x° + 50°$ и $\sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL = \frac{2x° + 50°}{2}$ $\Rightarrow \sphericalangle COL = \frac{2x° + 50°}{2} - x° = 25°$ Отг. 25°

6. а) 98° може да е външният ъгъл при основата или външният ъгъл при върха срещу основата на равнобедрения триъгълник и следователно задачата има две решения. Отг. 82°, 82° и 16° или 49°, 49° и 82°. б) сега отговорът е единствен 36°, 36° и 108°, защо?

7. $\frac{\gamma}{2}$ **8.** а) 58°, 58° и 64°. б) 61°.

9. I начин. $\sphericalangle APC = 180° - (\sphericalangle A + \sphericalangle ACP)$ – от $\triangle APC$, $\sphericalangle BPC = 180° - (\sphericalangle B + \sphericalangle BCP)$ – от $\triangle BCP$, откъдето $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$, но те са съседни ъгли $\Rightarrow$ са прави, т.е. CP е височина. II начин. $\sphericalangle A + \sphericalangle ACP + \sphericalangle PCB + \sphericalangle B = 180°$ – от $\triangle ABC$, но $\sphericalangle A + \sphericalangle ACP = \sphericalangle B + \sphericalangle BCP$ по условие и като заместим в първото равенство, получаваме $2\sphericalangle B + 2\sphericalangle BCP = 180° \Rightarrow \sphericalangle B + \sphericalangle BCP = 90° \Rightarrow \triangle BCP$ е правоъгълен, т.е. CP е височина в $\triangle ABC$.

11. а) Нека CH е височината в $\triangle ACB$. $\triangle ACH$ е правоъгълен $\Rightarrow \sphericalangle ACH = 90° - \sphericalangle A$. $\triangle ABC$ – правоъгълен $\Rightarrow \sphericalangle B = 90° - \sphericalangle A$. Следователно $\sphericalangle ACH = \sphericalangle B$. Аналогично $\sphericalangle BCH = \sphericalangle A$

б) Без ограничение нека $AC < BC$. Означаваме CL – ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$. $\sphericalangle HCL = 45° - \sphericalangle ACH = 45° - \sphericalangle B = 45° - (90° - \sphericalangle A) = \sphericalangle A - 45°$.

12. Нека $\sphericalangle CBM$ е външен ъгъл за $\triangle ABC$ и $\sphericalangle CBM = 2\sphericalangle A$. Означаваме $\sphericalangle A = x \Rightarrow \sphericalangle CBM = 2x$. Тогава от теоремата за външен ъгъл $\Rightarrow \sphericalangle C = \sphericalangle CBM - \sphericalangle A = 2x - x = x \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C \Rightarrow \triangle CAB$ – равнобедрен. По същия начин се разглежда и случаят $\sphericalangle CBM = 2\sphericalangle C$.

13. Да означим ъглите при основата на равнобедрения триъгълник с φ, а $\sphericalangle BMN$ с α. Тогава $\sphericalangle ACM = 2\alpha$. $\sphericalangle CNM$ – външен за $\triangle BMN \Rightarrow \sphericalangle CNM = \alpha + \varphi$. $\sphericalangle CMB$ – външен за $\triangle ACM \Rightarrow \sphericalangle CMB = 2\alpha + \varphi$, но $\sphericalangle CMN = \sphericalangle CMB - \sphericalangle NMB = 2\alpha + \varphi - \alpha = \alpha + \varphi \Rightarrow \sphericalangle CMN = \sphericalangle CNM \Rightarrow \triangle CMN$ е равнобедрен.

14. AL – ъглополовяща $\Rightarrow \sphericalangle CAL = \sphericalangle BAL = 30°$. $\triangle CAL$ – правоъгълен с ъгъл $30° \Rightarrow CL = \frac{1}{2}AL = 1{,}5$ см. $\triangle ABL$ – равнобедрен ($\sphericalangle LAB = \sphericalangle B = 30°$) $\Rightarrow AL = BL = 3$ см. $CB = BL + CL = 4{,}5$ см.

15. Намерете първо AC. Отг. 8 см.

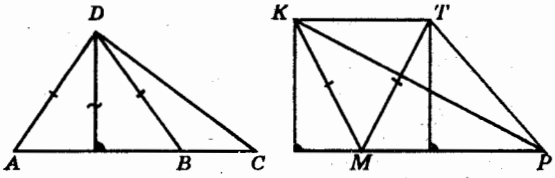
16. а) $CB = \frac{c}{2}$, $CH = \frac{b}{2}$; б) $BH = \frac{c}{4}$, $AH = \frac{3}{4}c$.

17. $P_{\triangle ABC} - P_{\triangle CQB} = AB + BC + CA - (BC + CQ + QB) = AB + QA_QB$. Но $QA = QB \Rightarrow P_{\triangle ABC} - P_{\triangle CQB} = AB \Rightarrow AB = 4$ см $\Rightarrow P_{\triangle ABQ} = 14$ см.

18. $\sphericalangle ACB = 90°$, $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle CBA = 60°$.

19. За да докажете, че $\sphericalangle MCP = \sphericalangle NCP$, докажете, че те са равни съответно на $\sphericalangle MAP$ и $\sphericalangle NBP$, които са равни.

22. Твърденията не са верни. За да се докаже, че дадено твърдение не е вярно, е достатъчно да се посочи поне един случай, в който то не е вярно. а) вижте $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$



б) вижте $\triangle MPT$ и $\triangle MPK$

25. а) Докажете, че $\triangle MOD \cong \triangle PBO$; б) от а) $MO = OP \Rightarrow AM = CP \Rightarrow AC - MP = 2AM$, но по условие $2AM = AC - BD \Rightarrow MP = BD$.

26. Означете равните ъгли при върховете A, B, C и D съответно с α, β, γ и φ. Ако O е пресечната точка на диагоналите, от $\triangle ABO$ и $\triangle DOC \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma + \varphi$, а от $\triangle AOD$ и $\triangle BOC \Rightarrow \beta + \gamma = \varphi + \alpha$. Като съберем двете равенства, получаваме $\alpha + 2\beta + \gamma = 2\varphi + \gamma + \alpha$, т.е. $\beta = \varphi$. Но те са кръстни ъгли $\Rightarrow BC \| AD$ и $AB \| DC$.

27. Използвайте, че $\triangle AMC$ е равнобедрен с ъгъл 60°, т.е. равностранен, за да докажете че $AM \| CP$.

28. а) 60°, 120°, 60°, 120°; б) За да докажете, че $\triangle PQD$ е равностранен, достатъчно е да докажете, че рой е равнобедрен с ъгъл 60°. Докажете, че $\triangle PBD \cong \triangle QCD$.

29. а) Докажете, че $CP \perp MB$ и $\sphericalangle PCQ = 90°$; б) Нека $T \in MC$ и $R \in BQ$. Ако допуснем, че F е среда на TR, ще следва, че $CTBR$ е успоредник, тъй като диагоналите му имат обща среда $\Rightarrow CT \| BR$, което е невъзможно.

30. Докажете, че $\triangle APD \cong \triangle CMB$.

31. Докажете, че $AMPQ$ и $NBPQ$ са успоредници, откъдето $AM = NB$ (равни на QP), но и $MN = QP$, откъдето $MN = 24 : 3 = 8$ см. Докажете, че пресечната точка O на диагоналите на правоъгълника принадлежи на височината CH на триъгълника и ако $CH \cap QP = R$, докажете, че $CR = RO = OH$. Следователно $RH = 6$ см.

32. Върху AC вземете точка N, така че $CN = CB$ и докажете, че $\sphericalangle ANL$ е равен на външния ъгъл при върха B на $\triangle ABC$, който е по-голям от $\sphericalangle NAL$.

33. Да разгледаме $\triangle ABC$, в който $AC > BC$. Ако CM, CL и CH са съответно медианата, ъглополовящата и височината през върха C, то от предната задача следва, че L е между M и B. Нека F е върху страната AC, така че $CF = CB$. Тогава $\triangle FLC \cong \triangle BLC \Rightarrow \sphericalangle ALC > \sphericalangle BLC$, т.е. $\sphericalangle ALC + \sphericalangle ALC > \sphericalangle BLC + \sphericalangle ALC = 180°$. Заключаваме, че $\sphericalangle ALC > 90°$ и L е между M и H.

Тема 1

1. а) От условието следва, че

$$\tfrac{1}{2}(n+1) - \tfrac{3n-|-1|}{3} - |2-(-1)| = -\tfrac{13}{6}$$

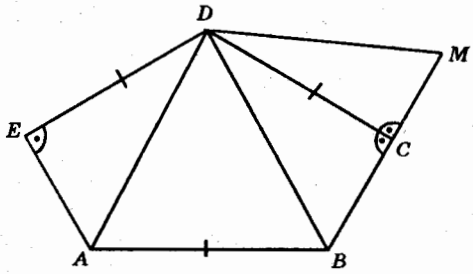
т.е. $\frac{n+1}{2} - \frac{3n-1}{3} - 3 = -\frac{13}{6}$. Като се освободим от знаменателя, получаваме $-3n = 0$, откъдето $n = 0$. б) След преобразуване получаваме уравнението $(a+5)(a-5)x = a(a-5)$. Ако $a \neq 5$ и $a \neq -5$, то уравнението има едно решение $x = \frac{a}{a+5}$. Ако $a = 5$, то всяко x е решение. Ако $a = -5$, то $0x = 50$ и уравнението няма решение. При дадената стойност на a всяко x е решение на уравнението, защото $a =$

$$\frac{(-15)^4.3^{2n-4}.4^n}{6^{2n}.5^3} = \frac{5^4.3^4.3^{2n-4}.2^{2n}}{2^{2n}.3^{2n}.5^3} = \frac{5^4.3^{2n}.2^{2n}}{2^{2n}.3^{2n}.5^3} = 5.$$

2. а) Нека един билет за кино струва x лв. Тогава един билет за театър струва $\frac{5x-10}{4}$ лв. (допустимите стойности за x са $x > 2$). Тъй като билетите струват общо 1050 лв., то $25x + 20\frac{5x-10}{4} = 1050$ и $x = 22$ лв., $\frac{5.22-10}{4} = 25$ лв.

б) Нека един билет за кино е с $y\%$ по-евтин от 1 билет за театър. Тъй като един билет за кино е с 3 лв. по-евтин от един билет за театър, то $3 = \frac{y}{100} \cdot 25$, т.е. $y = 12$.

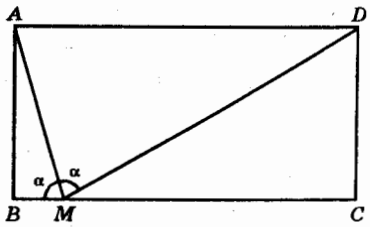
3. а) Върху лъча $\overrightarrow{BC}$ построяваме точка M,



така че $CM = AE$. Тогава $BM = BC + AE = 1$ и $\triangle DEA \cong \triangle DCM$ (I пр.). Следователно $DA = DM$ и $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DMB$. Тогава $\triangle ABD \cong \triangle MBD$ (III пр.) и $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DMB$. Значи $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAD$, т.е. AD е ъглополовяща на $\sphericalangle EAB$.

б) Тъй като $\triangle ABD \cong \triangle MBD$ и $\triangle DCM \cong \triangle DEA$, то $S_{ABD} = S_{MBD}$ и $S_{DCM} = S_{DEA}$. Следователно $S_{ABCDE} = S_{ABCD} + S_{DEA} = S_{ABCD} + S_{DCM} = 2S_{ABD} = 2S_{BMD} = 2\frac{BM.DC}{2} = 1$ кв.ед.

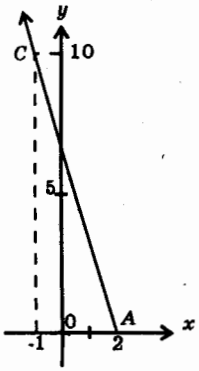
4. а) Тъй като $\sphericalangle MAD = \sphericalangle BMA$ (кръстни) и



$\sphericalangle BMA = \sphericalangle AMD$ по условие, то $\sphericalangle MAD = \sphericalangle AMD = \alpha$. Следователно $\triangle AMD$ е равнобедрен и $MD = AD$. б) От условието $BC = 2AB$ получаваме, че $AD = MD = 2CD$. Но $\triangle MCD$ е правоъгълен. Следователно $\sphericalangle CMD = 30°$ и понеже $\sphericalangle CMD = \sphericalangle MDA$ (кръстни), то от $\triangle AMD$ $\alpha + \alpha + 30° = 180°$, т.е. $\alpha = 75°$.

Тема 2

1. $f(x) = 2|x-2| + \frac{1}{3}|x-2| + |x-2| = \frac{10}{3}|x-2|$.

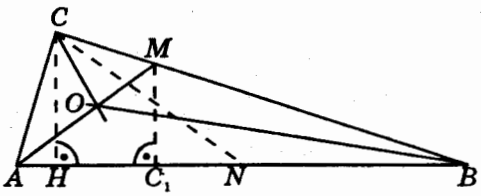


а) При $x < 2$ имаме $|x-2| = 2-x$ и $f(x) = \frac{10}{3}(2-x)$. Ясно е, че $A(2;0)$ и $C(-1;10)$ са от графиката на $f(x)$. Тъй като $x < 2$, то графиката представлява лъчът $\overrightarrow{AC}$ без началото A. Съгласно условието $B(b;5)$ лежи на графиката на $f(x)$. Тогава нейните координати удовлетворяват зависимостта $f(x) = \frac{10}{3}|x-2|$, откъдето получаваме уравнението

$$\frac{10}{3}|b-2| = 5 \iff |b-2| = \frac{3}{2} \iff b_1 = 3\frac{1}{2} \text{ и } b_2 = \frac{1}{2}.$$

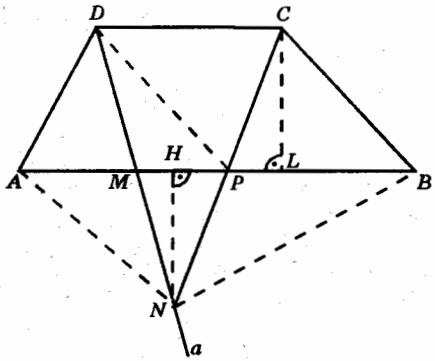
б) $a^2x + a = 25x - 5 \iff (a-5)(a+5)x = -(a+5)$. Ако $a \neq \pm 5$, уравнението има единствено решение $x = \frac{1}{5-a}$. При $a = 5$ уравнението няма решение, а при $a = -5$ всяко число x удовлетворява уравнението. $f(x+2) = -1 \iff \frac{10}{3}|x| = -1$, което очевидно няма решение. Следователно двете уравнения са еквивалентни при $a = 5$, когато множествата от решения са празни и очевидно съвпадат.

2. От условието $\frac{\sphericalangle ABC}{1} = \frac{\sphericalangle BAC}{4} = \frac{\sphericalangle COB}{7} = x$. Тогава $\sphericalangle ABC = x$, $\sphericalangle BAC = 4x$ и $\sphericalangle COB = 7x$. Тъй като CO и BO са ъглополовящи, то



$\sphericalangle OCB + \sphericalangle OBC = \frac{180° - 4x}{2} = 90° - 2x$. Тогава за $\triangle COB$ имаме $90° - 2x + 7x = 180° \Rightarrow 5x = 90° \Rightarrow x = 18°$. Така ъглите на $\triangle ABC$ са съответно $72°$, $18°$ и $90°$. а) Нека CH е височината, а CN е медианата от върха C. $\triangle AHC$ и $\triangle ABC$ имат общ ъгъл при върха A, $\sphericalangle AHC = \sphericalangle ACB = 90°$ и следователно $\sphericalangle ACH = \sphericalangle ABC = 18°$. От друга страна $CN = \frac{1}{2}AB$ и $\triangle ANC$ е равнобедрен $\Rightarrow$ $\sphericalangle ACN = 72°$. Следователно $\sphericalangle HCN - \sphericalangle ACH = 72° - 18° = 54°$. б) Достатъчно е да докажем, че т. O и т. M лежат на ъглополовящата през върха A. Точка O е пресечна точка на ъглополовящите от върховете C и B, и следователно е равноотдалечена от раменете на $\sphericalangle BAC$, което означава, че лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Сега разглеждаме $\triangle ACM$ и $\triangle AC_1M$. По условие имаме, че $AC = AC_1$, AM е обща страна и $\sphericalangle ACM = \sphericalangle AC_1M = 90°$. Тогава двата триъгълника са еднакви по катет и хипотенуза и $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAC_1$ като съответни елементи. Така доказахме, че и т. M лежи на ъглополовящата през върха A в $\triangle ABC$.

3. Ясно е, че $S_{AMD} = S_{AMN}$ (имат равни страни



DM и MN и обща височина от върха A). Тогава и височините им съответно от върховете D и N са равни и тъй като $DC \| AB$, то и разстоянията от точките C и N до правата AB са равни. Да означим петите им съответно с точките L и H. а) Триъгълниците CPL и NPH са еднакви по II признак, откъдето следва, че $CP = PN$. б) От условието е ясно, че $S_{ABD} = 6$, а $S_{BDC} = 4$, т.е. $AB > DC$ и чертежът е коректен. Ще докажем, че $S_{MPN} = \frac{1}{4}S_{DNC}$. Наистина $S_{MPN} = \frac{1}{2}S_{DPN}$, защото PM е медиана в $\triangle DPN$. Аналогично и $S_{DPN} = \frac{1}{2}S_{DNC}$, защото DP е медиана в $\triangle DNC$ (от подточка а)) $\Rightarrow S_{MPN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}S_{DNC} = \frac{1}{4}S_{DNC}$. Оттук следва, че $MP = \frac{1}{2} \cdot DC$, защото височината на $\triangle MNP$ е два пъти по-малка от височината на $\triangle DNC$. Тогава е ясно, че $S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$ кв.ед. Да забележим, че решението няма да се промени, ако M и P са външни точки за страната AB или пък, ако се знае само, че $S_{BDC} = 4$.

4. Нека x е определеното време за изминаване на AB, $x > 0$. Тогава $AB = 45.x$ км. В действителност автобусът е изминал $\frac{2}{5} \cdot 45 \cdot x$, след което спрял за $\frac{1}{3}$ ч. и продължил да се движи със скорост $45 + \frac{1}{9} \cdot 45 = 50$ км/ч. С тази скорост той се движил $(\frac{3}{5}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{6})$ ч. Тогава изминатото разстояние след спирането е $50(\frac{3}{5}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{6})$ км. Така разстоянието AB изразихме по два начина и получаваме уравнението

$$45x = \frac{2}{5} \cdot 45x + 50(\frac{3}{5}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}), \quad x > 0,$$

откъдето $x = 8\frac{1}{3}$ ч. Разстоянието $AB = 45.8\frac{1}{3} = 45 \cdot \frac{25}{3} = 375$ км. б) Нека y е скоростта на автобуса, с която трябва да се движи, за да пристигне точно на време в B. Тогава $\frac{3}{5} \cdot 375$ км автобусът изминава със скорост y за време $\frac{3}{5} \cdot 8\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{3} - \frac{1}{3} = 5 - \frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}$ ч. Тогава $\frac{3}{5} \cdot 375 = 4\frac{2}{3} \cdot y$, $y > 0$, откъдето $y = 48\frac{3}{14}$ км/ч и тъй като автобусът може да пристигне точно или по-рано, то $y \geq 48\frac{3}{14}$. Но съгласно условието y е цяло число и тогава $y = 49, 50, \ldots$, или $y \geq 49$ цяло число.

Тема за 8 клас

1. $x \in (\frac{1}{5}; \frac{1}{\sqrt{10}}]$, числото A е решение на системата. Упътване: Покажете, че $A = \frac{3}{10}$ и докажете неравенствата $\frac{1}{5} < \frac{3}{10} < \frac{1}{\sqrt{10}}$.

2. I тръба – за 8 часа; II тръба – за 12 часа. Упътване: Ако първата тръба пълни сама басейна за x часа, то втората прави същото за $(x+4)$ часа. Проверете, че от условието на задачата следва уравнението $\frac{x}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\right) = \frac{10}{x+4}$, което има единствен корен $x = 8$.

3. $\frac{DM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{3}{5}$. Упътване: Ако отсечката PQ е средна основа в трапеца $ABCD$, а отсечката KL е средна основа в трапеца $ABQP$, докажете, че отсечката MN е средна основа в трапеца $KLCD$.

4. Страните на правоъгълника са $\frac{1}{3}d_1$ и $\frac{1}{3}d_2$.

Тема за НПМГ – I изпит

1. а) $X\left(\frac{2}{5}; 0\right)$ и $Y(0; -2)$; $S = \frac{2}{5}$ кв.ед. б) $x = 1$; в) $k = -2$.

2. а) 12 ч 20 мин; б) 6 часа. **3.** в) 7,5 см.

Тема за НПМГ – II изпит

1. а) $A = (x+a)(2x-a)$ и $B = (x-a)(2x+a)$; в) при $a < 0$ или $a = \frac{1}{2}$: няма решение, при $a \geq 0$ и $a \neq \frac{1}{2}$: $x_1 = \frac{a}{2a-1}$ и $x_2 = \frac{a}{1-2a}$.

2. а) 4 км/ч; б) 10 мин.

3. а) $180° - 2\alpha$, $180° - 2\beta$, $180° - 2\gamma$; б) използвайте, че $\triangle ABC$ и $\triangle ALC$ имат обща височина през върха A; в) докажете, че лъчът $AA_1^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$.

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ

(*от стр.* 28)

1. а. Отг. $x = 4$; б. Понеже $x = 0$ не е корен на даденото уравнение, то то е еквивалентно на уравнението $\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1$, което може да се реши чрез полагането $y = 4x + \frac{7}{x}$.

Отг. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$.

в. $x_1 = 2$, $x_2 = -6$; г. $x = 0$ и всяко $x \geq 1$.

2. а. Ако $a = 0$: $x = 0$; ако $a \neq 0$: $x_1 = \frac{1}{a}$ и $x_2 = -\sqrt[3]{a}$; б. Записваме уравнението във вида:

$$(x^2 + x)a^2 + (x^3 - x^2 - 2x + 1)a - (x^3 - 2x + 1) = 0$$

и го решаваме относно параметъра a. Имаме: $a_1 = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x}$, $a_2 = 1 - x$. Тогава даденото уравнение е еквивалентно на уравнението: $(x^2+x)(a-(1-x))\left(a - \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x}\right) = 0$ или все едно на

$$(a-1)(x-(1-a))\left(x^2 + x + \frac{1}{a-1}\right) = 0.$$

Отг. $x_1 = 1 - a$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{a-1}}$.

3. а. Отг. $x \leq -1$ или $0 < x \leq \frac{1}{2}$ или $1 < x$; б. Отг. $x < 1 - \sqrt{10}$ или $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ или $x > 1 + \sqrt{10}$.

4. а. Отг. $-\frac{17}{5} < x < \frac{13}{4}$; б. $-2 < x \leq 1$ или $1 \leq x < 4$.

5. Ако $a \leq 0$, то $x \geq -\frac{a}{2}$, а ако $a > 0$, даденото неравенство няма решения.

6. Ясно е, че при $a > 1$ даденото неравенство няма решение (защото $1 - a^3 < 0$). Ако $a < 1$, лесно се намира, че решенията на неравенството са числата от интервала $[-1, -a^3]$. Следователно то има поне четири цели решения, ако $-a^3 \geq 2$. Отг. $a < -\sqrt[3]{2}$.

7. а. Отг. $x_1 = y_1 = 1$; $x_2 = -3, y_2 = 2$; $x_3 = -\frac{13}{5}$, $y_3 = \frac{11}{5}$; $x_4 = \frac{39}{5}$, $y_4 = \frac{22}{5}$; б. Очевидно едно решение на системата е $x_1 = y_1 = 0$. При

това системата няма решения, за които $x = 0$, $y \neq 0$ или $x \neq 0$, $y = 0$. Нека $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Разделяме първото уравнение на y^2 и получаваме: $3\frac{x^2}{y^2} + 5\frac{x}{y} - 2 = 0$. Тогава, ако $\frac{x}{y} = t$, то $3t^2+5t-2 = 0$, чиито корените са $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Ненулевите решения на дадената система са обединение от решенията на системите:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = -2 \\ \frac{x+y}{x-5} + y^2 = 5x + y \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{x+y}{x-5} + y^2 = 5x + y \end{array}\right.$$

Отг. $x_1 = y_1 = 0$; $x_{2,3} = \frac{23 \pm \sqrt{161}}{2}$, $y_{2,3} = -\frac{23 \pm \sqrt{161}}{4}$; $x_4 = 1, y_4 = 3$; $x_5 = \frac{44}{9}$, $y_5 = \frac{44}{5}$.

в. Ако положим $x + y = u$ и $xy = v$, за неизвестните u и v получаваме системата

$$\left|\begin{array}{lcl} (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 & = & 82 \\ v & = & 3 \end{array}\right.$$

Лесно се намира, че решенията на последната система са: $u_1 = 4, v_1 = 3$ и $u_2 = -4, v_2 = 3$. Тогава решенията на дадената система са обединение от решенията на системите:

$$\left|\begin{array}{lcl} x+y & = & 4 \\ xy & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{lcl} x+y & = & -4 \\ xy & = & 3 \end{array}\right.$$

Отг. $x_{1,2} = \pm 1, y_{1,2} = \pm 3$, $x_{1,2} = \pm 3, y_{1,2} = \pm 1$.

г. Отг. $x_{1,2} = \pm 14.\frac{\sqrt{106}}{53}, y_{1,2} = \pm 4.\frac{\sqrt{106}}{53}$, $x_{3,4} = \pm 3, y_{3,4} = \pm 1$.

8. Отг. $a = 1, b = -1$.

9. а. Отг. $\frac{p^4 - 4p^2q + 2q^2}{p^2 - 2q}$; б. Отг. $\frac{5pq - p^3}{p^4 - 2p^2q + 2q^2}$.

10. Отг. $x^2 + 7x - 1 = 0$ или $x^2 - 7x - 1 = 0$ или $x^2 + \sqrt{53}x + 1 = 0$ или $x^2 - \sqrt{53}x + 1 = 0$.

11. Отг. $k = \frac{1}{2}$. **12.** Отг. $k = 2$.

13. Исканото тъждество следва от веригата равенства: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = a(x_1^{n+2} + x_2^{n+2}) + b(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + c(x_1^n + x_2^n) = x_1^n(ax_1^2 + bx_1 + c) + x_2^n(ax_2^2 + bx_2 + c) = 0$.

14. а. Числата a, b, c са решения на системата:

$$\left|\begin{array}{lcl} a + b + c & = & 1 \\ a\alpha^2 + b\alpha + c & = & \beta \\ a\beta^2 + b\beta + c & = & \alpha \end{array}\right. .$$

Използвайки формулите на Виет, като съберем второто и третото уравнения на тази система и след това ги извадим, получаваме, че числата a, b, c са решения на системата:

$$\left|\begin{array}{lcl} a + b + c & = & 1 \\ -a + b + 2c & = & 1 \\ a + b & = & -1 \end{array}\right. ,$$

откъдето $a = 1, b = -2, c = 2$.

б. Лесно се вижда, че $\varphi(x) = f(f(x)) - x$. Тогава

$$\begin{array}{lcl} \varphi(1) & = & f(f(1)) - 1 = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0, \\ \varphi(\alpha) & = & f(f(\alpha)) - \alpha = f(\beta) - \alpha = \alpha - \alpha = 0, \\ \varphi(\beta) & = & f(f(\beta)) - \beta = f(\alpha) - \beta = \beta - \beta = 0. \end{array}$$

в. Ако γ е четвъртият корен на уравнението $\varphi(x) = 0$, то $\varphi(x) = (x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = (x-1)(x-\gamma)(x^2 - x + 1)$. При това $\gamma = \varphi(0) = f^2(0) - 2f(0) + 2 = 2$. Следователно $\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x^2 - x + 1)$.

15. Даденото уравнение няма реални корени, защото $(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 = (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) < 0$.

16. Отг. $3 \leq k \leq \frac{15}{4}$. **17.** Отг. $k < -1$ или $1 < k < 4$.

18. Отг. $-1 < k < -\frac{1}{2}$ или $-\frac{2}{5} < k < -\frac{1}{5}$.

19. Отг. $-\frac{1}{2} < k < \frac{2}{5}$.

20. Понеже $3^x > 0$ за всяко x, то трябва да се намерят тези k, за които неравенството $ky^2 + 4(k-1)y + k - 1 > 0$ е изпълнено за всяко $y > 0$. Отг. $k \geq 1$.

21. Отг. $6 - \sqrt{24} < k < 9$.

22. б. Уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени или когато числата y_1, y_2 не са реални, или когато те са реални, но $y_1^2 - 4 < 0$ и $y_2^2 - 4 < 0$. Отг. $\frac{2}{3} < m < 6 + 2\sqrt{7}$.

23. а. Отг. $k \leq -2$ или $k \geq 3$; б. Отг. $k > 3$.

24. Лесно се проверява, че

$$f(x) = \min\{2x - x^2, x - 1\} =$$

$$= \begin{cases} 2x - x^2 & \text{при} \quad x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x - 1 & \text{при} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 2x - x^2 & \text{при} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq x \end{cases} .$$

Като се начертае графиката на функцията $f(x)$, се получава, че решенията на даденото неравенство са $\alpha < x < \beta$, където α е коренът на уравнението $x - 1 = -\frac{1}{2}$, а β е по-големият корен на уравнението $2x - x^2 = -\frac{1}{2}$.

Отг. $\frac{1}{2} < x < 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}$.

25. а. Отг. $x = 52 - 8\sqrt{39}$;
б. Отг. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 10$.

26. а. Отг. $x > 1$; б. Отг. $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} < x \leq 1$.

27. а. Отг. $x_1 = 2$, $x_2 = -1 - \log_3 2$; б. Отг. $x_{1,2} = \pm 2$, $x_3 = -3$; в. Отг. $x = 4$; г. Отг. $x = 2$; д. Отг. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

28. а. Отг. $8 - \sqrt{43} \leq x < 2$ или $x \geq 8 + \sqrt{43}$;

б. Отг. $-1 < x \le \sqrt{2}$.

29. а. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (k е цяло число); б. $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$ и $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (k е цяло число); в. $x = \frac{\pi}{4} + k.\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}$ (k е цяло число); г. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ и $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$;

30. Решенията на даденото уравнение са: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ и $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ (k е произволно цяло число). Като вземем пред вид графиката на функцията $f(x) = 2x - x^2$, виждаме, че търсената най-голяма стойност е равна на по-голямото от числата $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ и $f\left(\frac{2\pi}{9}\right)$. Отг. $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}(6-\pi)$.

31. Ако d е разликата на аритметичната прогресия, то $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}.\frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}.\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$, откъдето следва исканото равенство.

32. $(4, 12, 36)$ или $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$. **33.** $\frac{3069}{256}$.

34. а. Ако m е стойност на функцията $f(x)$, това означава, че уравнението $f(x) = m$ или все едно уравнението $(20 - 3m)x^2 + 2(5 - m)x + 3 - m = 0$ има реален корен, т.е. неговата дискриминанта е неотрицателна. Оттук намираме, че $\frac{5}{2} \le m \le 7$, т.е. $f_{\min} = f(-\frac{1}{5}) = \frac{5}{2}$ и $f_{\max} = f(-2) = 7$.

б. Нека $\varphi(x) = x^2 + 2(2k-3)x + 5k^2 - 16k + 20$. Най-малката стойност на $\varphi(x)$ е при $x = 3 - 2k$, т.е. $\varphi(x) \ge \varphi(3-2k) = k^2 - 4k + 11 \ge 7$, като равенството се достигат при $k = 2$ и $x = -1$. Твърдението на задачата следва от а.

35. $(-3, 11)$. **36.** $y = -x + \frac{5}{2}$. **37.** $f_{\max} = 16$, $f_{\min} = -3$.

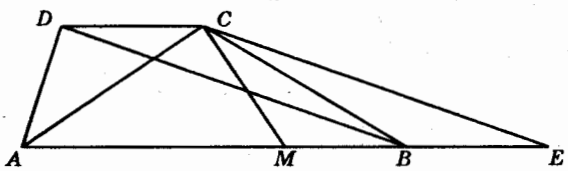
38. Функцията $g(x)$ е дефинирана при $x \in (0, \log_3 5)$, като $g_{\max} = g(1) = 2$. В същия интервал $f_{\min} = f(1) = 2$. Отг. $(1, 1)$.

39. Отг. $f_{\max} = f(0) = 4$; $f(x) \le 1$ за $-\sqrt{5} \le x \le -1$ или $1 \le x \le \sqrt{5}$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$.

40. а. Отг. $f_{\min} = p + 2\sqrt{\frac{s}{p}}$; б. Отг. $3\sqrt[3]{s}$. в. Следва от а) и б); г) В неравенството в) положете $p = a$, $x = b$, $s = abc$.

Тема 1

1. Полагаме $y = 2^{x^2+x}$. Тогава уравнение има точно един положителен корен, когато $ky^2 - (1-k)y - 1 = 0$ има точно един корен по-голям от 1. Тъй като неговите корени са $y_1 = -1$ и $y_2 = \frac{1}{k}$, това е изпълнено при $\frac{1}{k} > 1$. Отг. $0 < k < 1$.

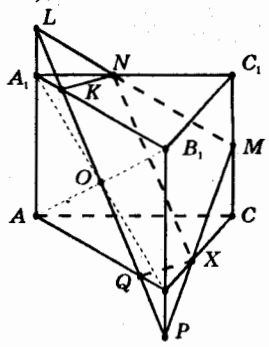


2. Построяваме през C права успоредна на DB. Тогава $CE = BD = 5$ и $BE = DC$. Значи

$$S(ABCD) = \frac{AB + DC}{2}.h = \frac{AB + BE}{2}.h = S(\triangle AEC).$$

Лесно се съобразява, че медианата CM на $\triangle AEC$ е равна на отсечката, съединяваща средите на основите на трапеца, т.е. $CM = 2$. От друга страна $CM^2 = \frac{1}{4}.(2.AC^2 + 2.EC^2 - AE^2)$, откъдето намираме $AE = 2\sqrt{13}$. Като използуваме Хероновата формула, вече лесно намираме, че търсеното лице е $S = 6$.

3. Нека първо X е вътрешна за ръба BC точка. Търсеното сечение е петоъгълникът $QXMNK$. При това $BQ = A_1K$, $QX \| KN$. Нека $XC = x$. Тогава $BX = 1 - x$. Освен това $\frac{BP}{MC} = \frac{BX}{XC}$, откъдето $BP = \frac{1-x}{2x}$ и $B_1P = \frac{1+x}{2x}$. Също $\frac{B_1P}{BP} = \frac{KB_1}{QB} = \frac{1 - QB}{QB} = \frac{1}{QB} - 1$, откъдето $QB = A_1K = \frac{1-x}{2} = \frac{BX}{2}$. И понеже $\sphericalangle ABC = 60°$, оттук следва, че $\sphericalangle BQX = 90°$, т.е. $XQ \perp AB$ и $QX = KN = (1-x).\frac{\sqrt{3}}{2}$, защото $\triangle A_1KN \cong \triangle BQX$. Щом $XQ \perp AB$, то и $NK \perp A_1B_1$. Но $NK \perp AA_1$ (защото $AA_1 \perp (A_1B_1C_1)$). Значи $NK \perp (ABB_1A_1)$. В частност $NK \perp KQ$, което показва, че $QXNK$ е правоъгълник. Не е трудно да се намери, че $KQ = \sqrt{1 + x^2}$ и $NM = MX = \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}$. Тогава за лицето S на сечението получаваме $S = S(QXNK) + S(\triangle XMN) = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{1 + x^2}.(2 - x)$, т.е.



$$(1) \qquad S = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f(x)},$$

откъдето

$$f(x) = (1 + x^2)(2 - x)^2.$$

В случая, когато $X = C$, сечението е правоъгълникът DCC_1D_1 (D и D_1 са средите на AB и A_1B_1) и неговото лице е равно на $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f(0)}$. Ако пък $X = B$, сечението е триъгълникът BA_1M и неговото лице е равно на $\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f(1)}$.

Тъй като $f'(x) = -2(2-x)(2x^2 - 2x + 1) < 0$ за всяко $x \in [0, 1]$, то функцията $f(x)$ е намаляваща в интервала $[0, 1]$. Следователно $\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f(1)} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f_{\min}} \le S \le \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f_{\max}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{f(0)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Равенствата тук се достигат, когато точката X съвпада с точките B или C.

4. а). Функцията $\varphi(x) = 1-x-x^2$ е намаляваща в интервала $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, т.е. $\frac{1}{4} = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \le \varphi(x) \le \varphi(0) = 1$. Тогава $-2 = \log_2 \frac{1}{4} \le f(x) \le \log_2 1 = 0$, което показва, че $f_{\max} = f(0) = 0$ и $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$. При това, тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната, то тя описва целия интервал $(0, -2)$, когато x описва интервала $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. С други думи, ако $\alpha \in (-2, 0)$, то съществува $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, такова че $f(\beta) = \alpha$.

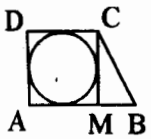
б). От горните разсъждения следва, че е достатъчно да се намерят стойностите на a, при които за всяко $b > 0$ уравнението $y - \frac{a}{y} - b = 0$ или все едно уравнението $g(y) = y^2 - by - a = 0$ има корен в интервала $(-2, 0)$. То има реални корени, ако $b^2 + 4a \ge 0$. Тогава неравенство е в сила за всяко $b > 0$, само ако $a \ge 0$. За тези стойности на a обаче корените на последното уравнение са с различни знаци. Следователно то има корен в интервала $(-2, 0)$ ако $g(-2) = 4-2b-a > 0$. Окончателно оттук намираме, че търсените стойности на a са $0 < a < 4$.

Тема 2

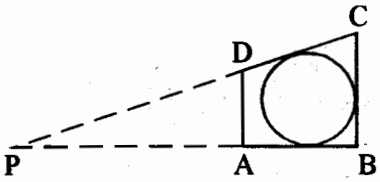
1. а) Отг. $a = \frac{1}{3}$, $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$. б) $D = -4(3a-1)^2$. Следователно уравнението има реални корени само при $a = \frac{1}{3}$.

2. а) Отг. $x > \log_4 6$. б) Отг. $x \ge \frac{3}{2}$.

3. Условието изпълняват два трапеца: 1) Трапецът $ABCD$ с основи $AB = 3$, $CD = 2$ и бедра $AD = 2$ и $CB = \sqrt{5}$; 2) Трапецът $ABCD$ с основи $AD = 2$, $BC = 3$ и бедра $AB = 3$ и $CD = \sqrt{10}$.



Черт. 1



Черт. 2

За първия трапец (черт.1) търсеният кръг е този, допиращ се до страните AB, AD и CD. Тъй като $AMCD$ е квадрат, неговият радиус е равен на 1. Разглеждаме втория трапец (черт.2). Нека AB и CD се пресичат в точката P. Тъй като $\Delta PAD \sim \Delta PBC$, то $\frac{PB-3}{PB} = \frac{2}{3}$, т.е. $PB = 9$. Радиусът на вписания кръг в ΔPBC е $r = \frac{12-3\sqrt{10}}{2}$. Той се съдържа в трапеца $ABCD$, защото $2r = 123 - 3\sqrt{10} < 3$. Следователно в този случай това е търсеният кръг.

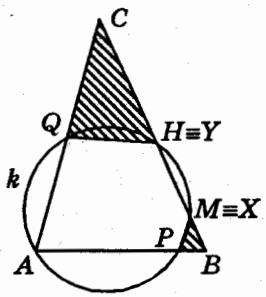
4. Отг. $x = 10$.

Тема 3

1. а) Свеждаме уравнението към квадратно посредством полагането $t = \lg x$: $t^2 + \alpha t - \frac{1+2\alpha^2}{4\alpha^2} = 0$. Тъй като дискриминантата на последното уравнение е $D = \alpha^2 + \frac{1+2\alpha^2}{\alpha^2} = (\alpha + \frac{1}{\alpha})^2 > 0$ при всяко $\alpha \ne 0$, то квадратното уравнение има два различни корена $t_2 > t_1$, което означава, че логаритмичното уравнение също има два различни корена $x_2 = 10^{t_2} > 10^{t_1} = x_1$.

б) Разглеждаме $\lg \frac{x_2}{x_1} = \lg x_2 - \lg x_1 = t_2 - t_1 = \sqrt{D}$. Значи $\lg \frac{x_2}{x_1} = |\alpha + \frac{1}{\alpha}|$, а както е лесно да се установи, $|\alpha + \frac{1}{\alpha}| \ge 2 \ \ \forall \alpha \ne 0$. Следователно най-малката стойност на $\frac{x_2}{x_1}$ е 10^2 и тя се достига при $\alpha = \pm 1$.

2. а) Тъй като AM е диаметър, то H е петата на височината през A, а P и Q са ортогоналните проекции на M съответно върху AB и AC. Следователно в зависимост от разположението на точката M върху BC имаме $X \equiv M$, $(Y \equiv H)$, ако $M \in BH$ и $X \equiv H$ $(M \equiv Y)$, ако $M \in HC$. След като решим триъгълника, установяваме, че $BC = 3$, $\sphericalangle ABC = 60°$ и $\sphericalangle BCA = 45°$. Оттук се получава, че $BP = BM \cos 60° = \frac{1}{2}x$, $CQ = MC \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)$, $BH = 1$.



Нека $M \in BH$, т.е. $x \in [0, 1]$. Тогава $BX = x$ и $YC = 2$. Получаваме последователно $S_{PBX} = \frac{1}{2} BP.BX \sin 60°$ и $S_{YCQ} = \frac{1}{2} CY.CQ \sin 45°$, откъдето следва, че $f(x) = S_{PBX}.S_{YCQ} = \frac{\sqrt{3}}{16} x^2(3-x)$. Аналогично за $x \in [1, 3]$ получаваме $S_{PBX}.S_{YCQ} = \frac{\sqrt{3}}{32} x(3-x)^2$. Тъй като при $x = 1$ изразите в десните страни приемат една и съща стойност $(= \frac{\sqrt{3}}{8})$, то търсената функция $f(x) = S_{PBX}.S_{YCQ}$ е:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{16} x^2(3-x) & x \in [0, 1] \\ \frac{\sqrt{3}}{32} x(3-x)^2 & x \in [1, 3] \end{cases}$$

б) Функцията f е растяща в интервала $[0,1]$ и намаляваща в $[1,3]$; следователно най-голямата ѝ стойност е $f_{\max} = f(1) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

3. От условието следва, че точката H е център или на вписаната в ΔABC окръжност или на някоя от външно-вписаните в ΔABC окръжности (допираши се до страна и продълженията на другите две страни). В първия случай $DH = r.\mathrm{tg}\beta$, където r е радиусът на вписаната окръжност. Тъй като $r = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, то $DH = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\mathrm{tg}\beta$. От условието получаваме, че $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}$, т.е. $\alpha = 90°$, което е невъзможно. Да предположим, че H е центърът на външно-вписаната окръжност, допираща се до страната BC (AC). Тогава $DH = r_a.\mathrm{tg}\beta$, където r_a е радиусът на тази окръжност. Известно е, че $r_a = p.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, където p е полупериметърът на ΔABC. Тъй като $AC = BC = \frac{1}{2\cos\alpha}$, получаваме, че

$$DH = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\cos\alpha}) \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.$$

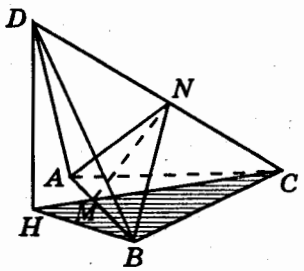
Сега от условието следва, че $(1 + \frac{1}{\cos\alpha}) \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} \iff \frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{cotg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \iff \cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \alpha = 60°$ и значи ΔABC е равностранен.

Нека сега H е центърът на външно-вписаната окръжност, допираща се до страната AB. Както по-горе получаваме, че

$$DH = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\cos\alpha})\mathrm{cotg}\,\alpha.\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \mathrm{tg}\beta.$$

От всичко казано до тук следва, че трябва да разгледаме само този случай.

Нека M е средата на AB и N е петата на перпендикуляра от M към CD в (CHD). Тъй като $CD \perp AB$ (теорема за трите перпендикуляра), то $CD \perp (ABN)$ и значи $\sphericalangle ANB = \varphi$ е двустенният ъгъл при CD.



От ΔBMN следва, че $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2MN}$, а от $\Delta CHD \sim \Delta MNC$ получаваме $MN = \frac{CM.DH}{CD}$. Тъй като $CM = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$ и $CH = \frac{\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha}$, лесно се пресмята, че

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}}{\sin\alpha.\sin\beta}.$$

Така

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}.\sin\alpha.\sin\beta}{2\sin^2\alpha.\sin^2\beta - 1}.$$

Тема 4

1. Ако $m^2 - m = 0$, т.е. $m = 0$ или 1, непосредствено се проверява, че условието удовлетворява само $m = 1$. При $m^2 - m \neq 0$ условието $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ е еквивалентно на $m^2 - m < 0 \iff 0 < m < 1$. Функцията $f(x)$ е растяща в $[-1,0]$ ако $f'(x) \geq 0$ за $x \in [-1,0]$. Тъй като $f'(x) = 3(m^2-m)x^2 + 2mx + 2$ е квадратна функция, последното е изпълнено, точно когато $f'(0) \geq 0$ и $f'(-1) \geq 0$. Окончателно за търсените стойности на m получаваме $m \in \left(0, \frac{2}{3}\right] \cup \{1\}$.

2. От неравенството между средно-аритметично и средно-геометрично на три неотрицателни числа $(\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc})$ следва, че $|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| \geq 3\sqrt[3]{|\cos x \cos 2x \cos 4x|}$. Но при $x \neq k\pi$ имаме, че

$$\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sin 2x.\cos 2x.\cos 4x}{2\sin x} =$$

$$= \frac{\sin 4x.\cos 4x}{4\sin x} = \frac{1}{8}\frac{\sin 8x}{\sin x},$$

откъдето следва неравенството.

3. От $\Delta ADH \sim \Delta ADC$ получаваме, че $AD^2 = (m+n)n$. Тази отсечка е построима като средногеометрична на две дадени отсечки. Тогава има единствен равнобедрен ΔABC с основа $AB = 2AD$ и височина $CD = m+n$. При $m = 3n$ за търсеното лице S_1 имаме, че $S_1 = S_{ABC} - \pi r^2$, където r е радиусът на вписаната в ΔABC окръжност. Тъй като $S_{ABC} = AD.CD = (AD+AC)r$, $AD = 2n$, $CD = 4n$ и $AC = 2\sqrt{5}n$, то $S_1 = [8 - 2\pi(3-\sqrt{5})]n^2$.

4. Нека $MABCD$ е пирамида с основа равнобедренят трапец $ABCD$ $(AB \| CD)$. От условието следва, че в него може да се впише окръжност и върхът M се проектира в центъра ѝ O. Ако означим с r радиуса на тази окръжност, то $V = \frac{1}{3}\frac{(a+b)}{2} \cdot 2r \cdot r\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3}(a+b)r^2\mathrm{tg}\,\varphi$. От правоъгълния ΔBOC намираме $r^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$, откъдето за обема получаваме

$$V = \frac{1}{12}(a+b).b.tg\varphi.$$

Исканото неравенство следва от очевидните неравенства $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ и $\mathrm{tg}\,\varphi \leq 1$.

По пощата направо във вашия дом, като спазваме
АКСИОМАТА ЗА ВАШИЯ ИЗБОР

ОБЕДИНЕНА ☺ КНИГОПОЩА ∫📖d✉

Математици от цялата страна, поръчвайте чрез всеки брой на $\mathcal{M}+$. Плащате само в твърда усмвка. СРОК ЗА ДОСТАВКА — до n дни от публикацията !!!

ОБУЧЕНИЕ

„СБОРНИК ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ, НЕКАНДИДАТСТВАЩИ В ЕЗИКОВИ И МАТЕМАТИЧЕСКИ ГИМНАЗИИ И ТЕХНИКУМИ СЛЕД 7 КЛ.“ от колектив учители, недаващи частни уроци
Състои се от 3 части: 1 – Задачи, които не илюстрират учебния материал за 6 и 7 кл. 2 – Общи задачи, аналогични на тези, които не са давани на кандидатски изпити. 3 – Решения без условия от конкурсните изпити 1988 до 1994 г. Допълнително са посочени 5 безпримерни теми. Всички задачи не са решени.
Цена: по 0,50 лв. на страница + 5 лв. R; за повече от 2 страници – големи отстъпки.

НАРЪЧНИЦИ

„ХИЛЯДА И ЕДИН ЛЮБИМИ ИНТЕГРАЛА“ от проф. Секиров
Сборник от неопределени интеграли, в които константите са заместени с броя на скъсаните с тяхна помощ студенти. Заглавието е от гледна точка на професори, чието хоби са поправителните сесии (без Тейлър).
Цена: примитивна.

„1000 СЛУЧАЙНИ ЧИСЛА ВЪВ ВЪЗХОДЯЩ РЕД“ от Миодраг Иванов
Прекрасен наръчник за любителите на ТОТО, ЛОТО, БИНГО и случайното издигане. Предлага задълбочен математически анализ на закона на Христо Стоичков.
Цена: 100 + Random(1000).

ЛИТЕРАТУРА

„ПОЛЕТ НАД БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА“ от Кен Киси
Пародия на известната книга на автора в частния случай („на кукуво лято“), когато кукувицата плаща наем на Банах.
Цена: по $1 на 3-мерно гнездо.

„УПАДАКЪТ НА e^{-x}“ от Кенет Кларк
Мрачна фантастика, визираща читатели, които не са се абонирали за $\mathcal{M}+$. (Непосредствено след 10-те най-четени трилъра в САЩ).
Цена: $\ln e^{100}$ лв.

„ЗАВЕЩАНИЕТО НА ФЕРМА“ от Ендрю Уайлс
Най-новите недоразумения около опитите да се открие несметното богатство, завещано от Ферма.
Цена: по договореност с ФАН или БАН.

СПРАВОЧНИЦИ

„КРАТЪК СПРАВОЧНИК НА НЕЧЕТНИТЕ ЧИСЛА“ в 2^n тома, Оксфорд Прес
Превод на известния MINI-REFERENCE-GUIDE OF THE ODD NUMBERS (По-правилният превод е „Справочник на странните числа“) – направен въз основа на анкета, показваща, че хората са склонни да четат само четни числа (откъдето вероятно идва и названието им на български).
Цена: „странен“ брой лв.

„ПРЕДИЗВИКАТЕЛНИ НЕРАВЕНСТВА БЕЗ ДЯСНА ЧАСТ“ от доц. Левакó
Обемен труд, в който са класифицирани всички известни на автора леви страни на неравнества.
Цена: $< \ldots$ лв.

100 ГОСПОЖИНИ РЕЦЕПТИ

„СТО ВКУСНИ ПЛЪНКИ ЗА ПРАЗНИ МНОЖЕСТВА“ от г-жа Канторова
Книга, която ще задоволи всяка домакиня по време на каквато и да е криза.
Цена: кардиналното число на множеството от плънките.
За кардинално слаби читатели изданието е безплатно.

Началник отдел $\mathcal{M}+$ книгопоща
ЖЕН И СЕН

Очаквайте в следващия брой:

* Ако кандидатствате във ВУЗ – подготовка и примерни теми
* Ако кандидатствате в езикови училища, математически гимназии и колежи – подготовка и примерни теми
* Подготовка за зрелостен изпит – задачи и примерни теми
* Национален конкурс за 4, 5, 6 и 7 клас – ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ уМ+ III кръг
* М+ свят – задачник Кванта
* Олимпиади + подготовка
* Обобщение на една задача от Международната олимпиада в Хонконг – ст.н.с. Г. Ганчев
* М+ компютър
* Конкурс по информатика
* М+ томбола и М+ игра с награди ЛЕГО
* Притурка М+ „Пролетен турнир по математика“

ISSN 0861–8321

Цена 60 лв.