

# MATEMATIKA MIOC

# Математика и информатика

списание за математика и информатика

2 1994

# МАТЕМАТИКА плюс

**списание за математика и информатика  
 одобрено от Министерството на науката и  
 образованието за класна и извънкласна работа**

**Редакционна колегия:**

Сава Гроздев и Олег Мушкаров - **главни редактори**

Евгения Сендова, Георги Ганчев, Иван Тонов, Емил Келеведжиев, Петър Миланов, Яни Арнаудов, Ваня Хаджийски, Кирил Банков, Кристиян Янков, Светозар Дойчев, Христо Лесов

**Компютърен дизайн:**

Татяна Пархоменко, Николай Киров, Огнян Тунтев, Владимир Ангелов

**Директор:**

Мадлен Петрова

**Адрес на редакцията:**

София, Подуене, ул. Ангел Войвода N 49  
тел. 45-13-13 (всеки работен ден от 15 ч. до 19 ч.)  
e-mail: SAVAGROZ@BGEARN.BITNET

Материалите за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на адрес: Институт по математика - БАН,  
ул. Акад. Г. Бончев бл. 8, 1113 София

Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници, да са напечатани на пишеща машина (листове формат А4, 30 реда по 60 знака) или на компютър.  
Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

© МАТЕМАТИКА ПЛЮС®

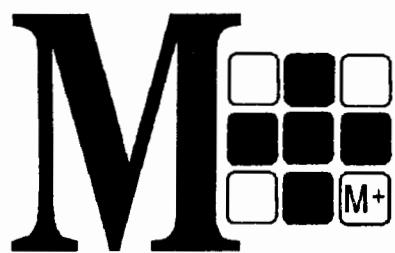
Формат: 600 x 340/3

Печатни коли 9

Дадена за печат на 14.04.1994 г.

Подписана за печат на 24.04.1994 г.

**ISSN 0861-8321**



**МАТЕМАТИКА ПЛЮС** е списание за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и информатиката направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езиковите училища, математическите гимназии и техникумите, отразяват се международните олимпиади, балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представлят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

<b>В БРОЯ:</b>	
<b>М+ЕКСПРЕС - НАЦИОНАЛНИЯТ ОТБОР ЗА БАЛКАНИАДАТА В НОВИ САД</b>	<b>3</b>
<b>ЗА ИТЕРАЦИИТЕ НА ДРОБНО-ЛИ- НЕЙНАТА ФУНКЦИЯ - Ваня Хаджийски</b>	<b>4</b>
<b>М+СВЯТ - ЗАДАЧНИК КВАНТА</b>	<b>8</b>
<b>Конкурс с награди ЛЕГО</b>	<b>9</b>
<b>М+ПОСТЪР (ЗАДАЧИ 4-11 КЛАС)</b>	<b>11</b>
<b>Томбола <math>\mathcal{M}^+</math> (НАГРАДИТЕ ОТ БР. 4, 1993 Г.)</b>	<b>12</b>
<b>ЗАДАЧИ <math>\mathcal{M}^+</math></b>	<b>13</b>
<b>Една нереешена задача от теория на игрите - Емил Колев</b>	<b>16</b>
<b>Ако кандидатствате във вуз</b>	<b>21</b>
<b>Подготовка за зреолостен изпит</b>	<b>26</b>
<b>Ако кандидатствате след 7 клас</b>	<b>28</b>
<b>Ако кандидатствате в американския колеж</b>	<b>33</b>
<b>Лесно ли се покоряват крепости в геомландия - Божидар Сендов и Евгения Сендова</b>	<b>35</b>
<b>Конкурс по информатика</b>	<b>40</b>
<b>МАТЕМАТИКА + ХИМИЯ = HIMMEL-KREUZSACKSCHWERENOTKRUZITURKEN - проф. Иван Чобанов</b>	<b>42</b>
<b>М+ НАЙ-МАЛКИТЕ - ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ (КОНКУРС у<math>\mathcal{M}^+</math>)</b>	<b>45</b>
<b>Олимпиади + Подготовка</b>	<b>52</b>
<b>Отговори, упътвания, решения</b>	<b>54</b>
<b>М+ КРЪСТОСЛОВИЦА</b>	
<b>ПРИТУРКА <math>\mathcal{M}^+</math> - ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР "АТАНАС РАДЕВ"</b>	

Драги читатели,

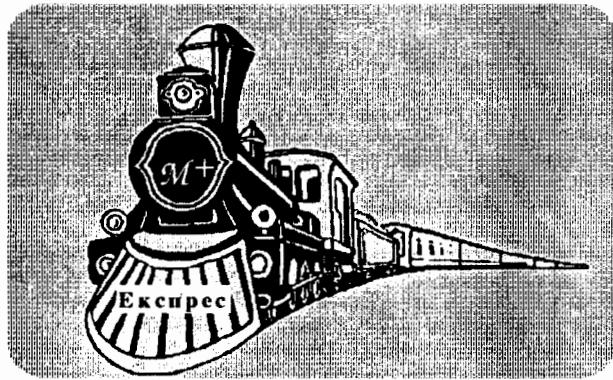
В отговор на многобройните писма и телефонни обаждания бих искал да ви информирам, че абонирането за МАТЕМАТИКА ПЛЮС за 1994 г. продължава. Това можете да направите в клоновете на РЕП или на адреса на редакцията. За съжаление тазгодишният първи брой е вече изчерпан и закъснелите ще могат да получават списанието от бр. 2 нататък. Редакцията разполага с кн. 1 от Библиотека МАТЕМАТИКА ПЛЮС "Балкански олимпиади по математика" и нека тези, които желаят да я получат, да побързат със заявките си.

В последно време бяхме свидетели на интересни математически изяви. В края на м. март в гр. Ямбол се състоя традиционният Пролетен турнир по математика "Атанас Радев". В притурката на този брой ви предлагаме всички задачи от турнира, придружени с решения и класиране. На стр. 3 ще намерите темата и резултатите от контролното състезание за определяне на представителния отбор на България за XI Балканска олимпиада по математика, 8 - 14 май 1994 г., гр. Нови Сад. Една от най-внушителните математически прояви у нас е ежегодната Пролетна конференция на Съюза на математиците в България (СМБ). Тази година конференцията се проведе в гр. Стара Загора в началото на м. април. Участваха повече от 100 учители, ученици, преподаватели от ВУЗ, научни работници и др. Една от кулминациите на конференцията беше обявяването на наградите на Фондация "Св. св. Кирил и Методий", за които се състезаваха изявени учители по математика и информатика от цялата страна. При определяне на победителите се взеха предвид постиженията за последните пет години: класирания на ученици на кандидата на международни, национални и



регионални състезания и олимпиади; публикации на кандидата или на негови ученици; изява на кандидата в научни и методически конференции, семинари и др. Комисия на СМБ в състав доц. Чавдар Лозанов - председател на СМБ (председател на комисията), Диана Григорова (представител на Фондация "Св. св. Кирил и Методий"), доц. Иван Тонов, доц. Павел Азълов, ст.н.с. Олег Мушкаров и ст.н.с. Йордан Табов разгледа кандидатурите и направи съответно предложение до Фондацията. Самото решение беше обявено (виж снимката) от Главния секретар на Фондация "Св. св. Кирил и Методий" г-н Михаил Тачев по време на откриването на Пролетната конференция. Първото място и награда в размер на 20 хил. лв. спечели Иван Симеонов от София. Той получи и грамота на Фондацията. С грамота и командировка за участие в Конгреса на Световната федерация на националните математически състезания в гр. Правец, 23 - 28 юли 1994 г. бяха удостоени Снежана Чочева от Плевен, Пламен Пенчев от Добрич и Коста Гъров от Пловдив. Поощрение и грамота получи Елена Атанасова от Благоевград. По време на конференцията бяха обявени и имената на получилите стипендии от СМБ за обучение в Блок D' на ФМИ, София. Това са учителите Роза Георгиева от Видин, Маргарита Недкова от Габрово, Диана Бойнова от София и Светлозар Дойчев от Стара Загора. Победителите бяха определени от комисия в състав чл.-кор. Станимир Троянски (председател), доц. Чавдар Лозанов, доц. Павел Азълов, н.с. Георги Димков, Христо Лесов и Петър Недевски. Наред с богатата научна програма на конференцията се провеждаха и мероприятия от Ученическата секция. Участниците в нея докладваха свои реферати и се състезаваха в решаването на математически тест и на една задача по информатика. Победител в комплексното класиране е Десислава Йорданова, ученичка от Враца.

Искрено ваш, д-р М.Плюс



# НАЦИОНАЛНИЯТ ОТБОР ЗА БАЛКАНИАДАТА В НОВИ САД

На 27 март в гр. Ямбол се проведе контролното състезание за определяне на националния отбор за Балканиадата по математика в гр. Нови Сад, 8 – 14 май 1994 г. До това състезание бяха допуснати следните ученици от 8, 9, 10, 11 и 12 клас въз основа на резултатите от Зимните математически състезания, гр. Плевен, 1 – 3 февруари 1994 г. и Пролетния математически турнир "Атанас Радев", гр. Ямбол, 25 – 27 март 1994 г. (Пълна информация за това състезание ще намерите в притурката на този брой.)

## 8 клас:

1. Христо Балавесов, София;  $20 + 20 = 40$  т.

## 9 клас:

1. Елица Манева, София;  $20 + 20 = 40$  т.

2. Иво Симеонов, Бургас;  $19 + 16 = 35$  т.

3. Цветан Петков, София;  $17 + 18 = 35$  т.

## 10 клас:

1. Иво Николов, София;  $17 + 10 = 27$  т.

2. Минчо Петков, София;  $11 + 12 = 23$  т.

## 11 клас:

1. Николай Николов, Бургас;  $19 + 20 = 39$  т.

2. Младен Димитров, София;  $19 + 17 = 36$  т.

3. Ясен Сидеров, София;  $16 + 16 = 32$  т.

4. Марина Койчева, София;  $17 + 14 = 31$  т.

5. Станислав Йорданов, София;  $16 + 10 = 26$  т.

6. Детелин Досев, В. Търново;  $15 + 11 = 26$  т.

7. Евгений Ваврек, В. Търново;  $17 + 8 = 25$  т.

8. Станислав Иванов, София;  $14 + 11 = 25$  т.

## 12 клас:

1. Силвия Петрова, Габрово;  $20 + 16 = 36$  т.

2. Иво Радославов, В. Търново;  $20 + 12 = 32$  т.

3. Валентин Димитров, Добрич;  $19 + 11 = 30$  т.

4. Десислава Йорданова, Враца;  $18 + 12 = 30$  т.

5. Атанас Димитров, Варна;  $19 + 10 = 29$  т.

6. Борислав Деянов, Русе;  $17 + 11 = 28$  т.

7. Любомир Борисов, Русе;  $15 + 12 = 27$  т.

8. Радослав Николов, Добрич;  $17 + 9 = 26$  т.

Контролното състезание се проведе по официалните правила на балканиадите по математика – време за работа 4 ч. 30 мин., всяка задача се оценява с 10 т. Ето и условията на задачите (кратки упътвания са дадени на стр. 54):

**Задача 1.** Реалните числа  $x$  и  $y$  изпълняват условията:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 17 = 0 \quad \text{и} \quad y^3 - 3y^2 + 5y + 11 = 0.$$

Намерете  $x + y$ .

**Задача 2.** Даден е остроъгълен триъгълник  $ABC$  с ортоцентър  $H$ . Нека  $P$  и  $Q$  са проекциите на  $H$  съответно върху вътрешната и външната ъглополовяща на триъгълника през върха  $A$ . Да се докаже, че правата  $PQ$  разполовява страната  $BC$ .

**Задача 3.** Да се докаже, че ако  $m$  и  $n$  са цели положителни числа и  $p > 2$  е прост делител на  $m^{2^n} + 1$ , то  $p$  дава остатък 1 при деление на  $2^{n+1}$ .

**Задача 4.** Нека  $\mathcal{A}_n$  е множеството на точките  $(x, y, z)$  с целочислени координати, за които  $0 \leq x \leq n$ ,  $0 \leq y \leq n$ ,  $0 \leq z \leq n$ . Точките от  $\mathcal{A}_n$  са оцветени в бяло и черно така, че всеки правоъгълен паралелепипед с върхове в тях и със стени, успоредни на координатните равнини, има 0, 4 или 8 бели върха.

а) Да се докаже, че при  $n > 1$  такова оцветяване съществува тогава и само тогава, когато всеки правоъгълник, успореден на някоя от координатните равнини и с върхове от  $\mathcal{A}_n$ , има 0, 2 или 4 бели върха.  
б) Да се намери броят на всички такива оцветявания.

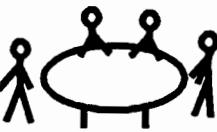
Работите на учениците бяха оценени от жури в състав: ст.н.с. С. Гроздев (ръководител на отбора за балканиадата), ст.н.с. О. Мушкаров, доц. Ив. Тонов и Н. Райков (МНО). Националният отбор за Балканиадата по математика в Нови Сад беше определен въз основа на събра от точките, получени на споменатите по-горе две състезания и на контролното:

1. Николай Николов, Бургас – 79 т.
2. Младен Димитров, София – 74 т.
3. Силвия Петрова, Габрово – 73 т.
4. Ясен Сидеров, София – 72 т.
5. Валентин Димитров, Добрич – 67 т.
6. Детелин Досев, В. Търново – 65 т.

За резервен състезател беше определена Десислава Йорданова, Враца – 64 т.

В бр. 3 на МАТЕМАТИКА ПЛЮС очаквайте експресна информация за Балканиадата по математика в Нови Сад.

Д-р М. Плюс



# $M^+$ КОЛОКВИУМ

## ЗА РЕДИЦАТА ОТ ИТЕРАЦИИТЕ НА ДРОБНО-ЛИНЕЙНАТА ФУНКЦИЯ

кмн Ваня Хаджийски, ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски"

Повод за тази бележка е задача  $M^+9$  от бр. 1/1993 г. на МАТЕМАТИКА ПЛЮС: *Редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е зададена с равенствата  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = 1/(1 + 20a_n)$ . Да се намери общият член  $a_n$  на редицата.*

По същество това е задача за намиране на  $n$ -тата итерация на дробно-линейната функция  $f(x) = 1/(1 + 20x)$ . Решението ѝ използва едно известно, но не особено популярно представяне на  $f(x)$  чрез неподвижните ѝ точки. Целта ни е по един достъпен за ученици начин да се изведе това представяне за произволна дробно-линейна функция и чрез него да се изследва редицата от  $n$ -тите ѝ итерации. Естествената област на нашите разглеждания е множеството на комплексните числа. Но за разбиране на изложението не са необходими специални познания за тях, тъй като се използват само тези от свойствата на комплексните числа, които са наследени от реалните числа. Предвид геометричното представяне на комплексните (реалните) числа като точки от равнината (числовата ос) по-долу няма да се прави разлика между "точка" и "число". На читателите, които искат да се запознаят и с други интересни свойства на дробно-линейната функция, препоръчваме [1].

### ДРОБНО-ЛИНЕЙНА ФУНКЦИЯ

Функция от вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

където  $a, b, c \neq 0, d$  и  $z$  са комплексни числа наричаме дробно-линейна функция. Условието  $ad - bc \neq 0$  е естествено изискване за неизроденост на  $f(z)$  (т.е.  $f(z) \not\equiv \text{const}$ ), както се вижда от представянето

$$(1) \quad f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

**Определение 1.** Неподвижна точка на  $f$  се нарича такава точка  $z$ , за която  $f(z) = z$ .

Неподвижните точки на  $f$  са корените на квадратното уравнение  $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ . Да ги означим с  $z_1$  и  $z_2$ . (В общия случай те са комплексни числа, дори и  $a, b, c$  и  $d$  да са реални!)

**Лема.** (Канонично представяне на дробно-линейната функция) Всяка дробно-линейна функция  $f(z)$  има следното представяне:

a) Ако  $z_1 = z_2$  то,

$$\frac{1}{f(z) - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + h, \text{ където } h = \frac{c}{cz_1 + d};$$

б) Ако  $z_1 \neq z_2$ , то

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \text{ където } A = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}$$

**Доказателство.**

а) Тъй като уравнението за неподвижните точки има двоен корен  $z_1 = z_2$ , то  $z_1 = \frac{a-d}{2c}$  и  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ . От тези равенства следва, че  $ad - bc = (cz_1 + d)^2$ . Тогава от (1) получаваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(z) - z_1} &= \frac{1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{(cz + d)(cz_1 + d)}{(z - z_1)(ad - bc)} = \frac{1}{z - z_1} \cdot \frac{cz + d}{cz_1 + d} = \\ &= \frac{1}{z - z_1} + h, \quad h = \frac{c}{cz_1 + d}. \end{aligned}$$

б) Пак от (1) имаме

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = \frac{f(z) - f(z_1)}{f(z) - f(z_2)} = \frac{(z - z_1)(ad - bc)/(cz + d).(cz_1 + d)}{(z - z_2)(ad - bc)/(cz + d).(cz_2 + d)} = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad A = \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}.$$

## ИТЕРАЦИИ НА ДРОБНО-ЛИНЕЙНА ФУНКЦИЯ

Каноничното представяне на  $f(z)$  е удобно за намиране на  $n$ -тата итерация на  $f(z)$ .

**Определение 2.** Дробно-линейната функция  $f^n(z)$ , определена с равенствата:

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) \text{ и } f^1(z) = f(z), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2,$$

се нарича  $n$ -та итерация на функцията  $f(z)$ .

От лемата по индукция следва, че:

$$(2) \quad \frac{1}{f^n(z) - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + nh, \quad \text{ако } z_1 = z_2$$

и

$$(3) \quad \frac{f^n(z) - z_1}{f^n(z) - z_2} = A^n \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \text{ако } z_1 \neq z_2.$$

Да се върнем сега към повода за написване на тази бележка. Нека редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е зададена с равенството  $a_{n+1} = \frac{aa_n + b}{ca_n + d}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т.е. тя е получена от  $a_1$  чрез последователно прилагане (итериране) на дробно-линейната функция

$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ . Тогава е ясно, че  $a_{n+1} = f^n(a_1)$  и следователно (вж. (2) и (3)) са в сила представянията

$$(2') \quad \frac{1}{a_{n+1} - z_1} = \frac{1}{a_1 - z_1} + nh, \quad \text{ако } z_1 = z_2$$

и

$$(3') \quad \frac{a_{n+1} - z_1}{a_{n+1} - z_2} = A^n \frac{a_1 - z_1}{a_1 - z_2}, \quad \text{ако } z_1 \neq z_2.$$

Накрая ще изследваме сходимостта на редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  в зависимост от началната стойност на  $a_1$ . Ще докажем следната

**Теорема.** *Нека  $a_1$  е произволно комплексно число и редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е зададена с равенството  $a_{n+1} = f^n(a_1)$ , където  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .*

1. *Ако  $f$  има една неподвижна точка  $z_1 = z_2$ , то редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е сходяща и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_1$ .*

2. *Ако  $f$  има две неподвижни точки  $z_1 \neq z_2$ , то при  $|A| \neq 1$  редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е сходяща и  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_1$  или  $z_2$ , а при  $|A| = 1, A \neq 1$  тя е разходяща за всяко  $a_1 \neq z_1, z_2$ . В последния случай всички членове на редицата лежат на една окръжност или права.*

**Доказателство.** Ясно е, че ако  $a_1 = z_1(z_2)$ , то  $a_n = z_1(z_2)$  за всяко  $n$ . Нека  $a_1 \neq z_1, z_2$ .

1. От (2') и неравенството на триъгълника получаваме

$$\frac{1}{|a_{n+1} - z_1|} \geq n|h| - \frac{1}{|a_1 - z_1|}$$

От тук следва, че  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/|a_{n+1} - z_1| = \infty$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_1$ .

2. От (3') следва, че сходимостта (разходимостта) на редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  е еквивалентна на сходимостта (разходимостта) на редицата  $\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогава, ако  $|A| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |A|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_1$ . Аналогично, при  $|A| > 1$ , получаваме  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z_2$ . Нека  $|A| = 1$ . Да си образуваме редицата  $b_n = A^{n+1} - A^n$ . Тогава  $|b_n| = |A^n| |A - 1| = |A - 1| \neq 0$  (зашото  $A = 1 \iff z_1 = z_2$ ) не зависи от  $n$ . Ако допуснем, че редицата  $\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$  е сходяща, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$ , което не е възможно.

При  $|A| = 1$  за всеки член на редицата имаме

$$\frac{|a_n - z_1|}{|a_n - z_2|} = k = \frac{|a_1 - z_1|}{|a_1 - z_2|} > 0.$$

Тъй като  $|a - z|$  е разстоянието между точките  $a$  и  $z$ , то това равенство показва, че елементите на  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  лежат на Аполониевата окръжност, определена от точките  $z_1, z_2$  и числото  $k$ . В частност при  $k = 1$  това е симетралата на отсечката с краища  $z_1$  и  $z_2$ .

**Забележка.** *На любознателния читател предлагаме да докаже, че ако аргументът на комплексното число  $A$  не е рационално кратен на  $\pi$ , то всяка точка от Аполониевата окръжност е точка на сгъстяване на редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .*

Както читателите сами са се убедили, целта поставена в началото на статията не може да се реализира, ако ограничим нашите разглеждания само в множеството на реалните числа. Затова авторът се надява, че настоящата бележка,

ще бъде и повод за запознаване с комплексните числа. Тези "нереални" числа са чудесно средство за решаване на разнообразни задачи от "училищната" математика, задачи в чиято формулировка няма и помен от комплексни числа. (вж. напр. [2])

## ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЕ

1. Да се намери общият член  $a_n$  на редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  зададена с равенствата

a)  $a_1 = \frac{1}{5}$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{5 - 4a_n}$

Отг.  $a_n = \frac{4^n - 1}{4^{n+1} - 1}$

б)  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{a_n + 2}$

Отг.  $a_n = \operatorname{ctg} \frac{n\varphi}{2}$ , където  $\cos \varphi = \frac{3}{5}$  и  $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ .

в)  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$

Отг.  $a_{4n-3} = 2$ ,  $a_{4n-2} = \frac{1}{3}$ ,  $a_{4n-1} = -\frac{1}{2}$  и  $a_{4n} = -3$

2. Да се изследва сходимостта на редицата  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  зададена с равенството:

a)  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$ ,  $a_1 \in \mathbf{R}$ . (The College Math. J. (1992), v. 23, No 5, Problem 487)

Отг.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  при  $a_1 \neq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  и  $a_n = a_1$  за всяко  $n$  при

$$a_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

б)  $a_{n+1} = \frac{a}{a_n + 1}$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a_1 \in \mathbf{R}$

Отг. За  $a \geq -1/4$  редицата е сходяща, като  $\lim a_n = \frac{\sqrt{1+4a} - 1}{2}$  при  $a_1 \neq \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}$  и  $a_n = a_1$  за всяко  $n$  при  $a_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}$ . За  $a < -\frac{1}{4}$  и  $a_1 \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$  редицата е разходяща.

**Бележка на редакцията.** За да улесни своите читатели, МАТЕМАТИКА ПЛЮС ще публикува в следващи броеве материали, посветени на основните свойства на комплексните числа и някои техни приложения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Аргирова, Т. Генчев, Дробно-линейната функция, Изд. "Наука и изкуство", София, 1974.
2. Ив. Тонов, Приложение на комплексните числа в геометрията, серия Алеф, ДИ "Народна просвета", София, 1988.



# М + СВЯТ

Поради големия интерес към конкурсните задачи на списание "Квант" ви предлагаме условията на задачите от първите четири броя за 1993 г. В бъдеще МАТЕМАТИКА ПЛЮС ще публикува преводи и на други интересни материали от списанието "Квант".

## ЗАДАЧНИК КВАНТА

Квант 1/2 – 1993 г.

**M1381.** Една окръжност е разделена с  $2n$  точки на равни дъги. Докажете, че във всяка затворена начупена линия от  $2n$  отсечки, с върхове всичките тези точки, има две успоредни отсечки.

**M1382.** Всички точки в равнината са оцветени с два цвята – черен и бял – по произволен начин. Докажете, че съществува триъгълник с върхове от един и същ цвят и с най-малка страна 1, такъв че отношението на ъглите му е равно на а)  $1 : 2 : 3$ ; б)  $1 : 2 : 4$ .

**M1383.** Нека сумата на  $n$  числа е равна на 0, като  $m$  е най-малкото измежду тях, а  $M$  е най-голямото. Докажете, че

- а) сумата от квадратите на тези числа не надминава  $mMn$ ;
- б) сумата от четвъртите степени на тези числа не надминава  $mMn(m^2 + M^2 + mM)$ .

**M1384\*.** Нека  $ABC$  е неравнобедрен остроъгълен триъгълник;  $O$  и  $I$  са центровете на описаната и вписаната окръжности;  $H$  е ортоцентърът на триъгълника. Докажете, че четириъгълниците  $AOIH$ ,  $BOIH$  и  $COIH$  са неизродени и точно два от тях са изпъкнали.

**M1385.** Нека  $ABC$  е произволен триъгълник. Докажете, че

- а) за всеки равностранен триъгълник  $A_1B_1C_1$  е изпълнено неравенството

$$A_1A^2 + B_1B^2 + C_1C^2 \leq \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{6} - \frac{2}{\sqrt{3}} S_{ABC};$$

б) Съществува равностранен триъгълник  $A_1B_1C_1$ , за който това неравенство се превръща в равенство.

Квант 3/4 – 1993 г.

**M1386.** Клетките на квадрат  $7 \times 7$  са оцветени с два цвята. Докажете, че може да се намерят поне 21 правоъгълника с върхове центрове на клетки от един и същ цвят и със страни успоредни на страните на квадрата.

**M1387.** Окръжност, вписана в ъгъл с връх  $O$ , се допира до страните му в точките  $A$  и  $B$ . Лъчът  $OX$  пресича тази окръжност в две точки  $C$  и  $D$ , така че  $OC = CD = 1$ . Ако  $M$  е пресечната точка на лъча  $OX$  и отсечката  $AB$ , да се намери дълчината на отсечката  $OM$ ?

**M1388.** Дадени са два различни квадратни тричлена  $f(x)$  и  $g(x)$ , със старши коефициенти равни на 1. Известно е, че  $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$ . За кои  $x$  е изпълнено равенството  $f(x) = g(x)$ ?

**M1389.** Във възвода на националната гвардия служат сержанти и редници, като всеки редник е подчинен на един или на двама сержанти. Докажете, че могат да бъдат уволнени не повече от половината от възвода, така че всеки от останалите редници да бъде подчинен на точно един сержант.

**M1390\*.** В равнината са разположени няколко единични кръга. Вярно ли е, че винаги могат да се отбележат няколко точки, така че вътре във всеки кръг да се намира точно една отбелязана точка?

# Конкурс, подгответ съвместно с

**ComseD®**

1142 София, ул. Раковски 174

Тел/факс: 66 67 26, 68 73 75

генерален дистрибутор на

**LEGO**

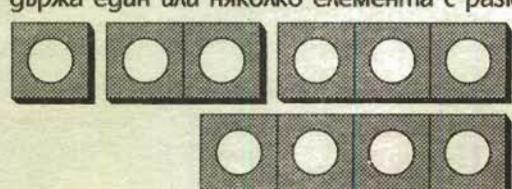


За почитателите на АЕГО и МАТЕМАТИКА ПЛЮС организираме специален конкурс. Продължаваме с публикуването на занимателни задачи. Фирма COMSED осигурява по 5 награди за всеки от броевете през тази година. Наградите са за тези, които изпратят в срок вярно решение на съответната задача. Ако правилните решения са повече от 5, наградите ще бъдат разпределени чрез жребий. Читателите, които решат задачите и от четирите броя на списанието, ще участват в томболата за голямата награда АЕГО.

*Очакваме Вашите писма!*

**Ето и задачата за бр. 2, 1994 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС**

Един от магазините АЕГО разполага с комплекти от елементи, като всеки комплект съдържа един или няколко елемента с размери 1x1, 1x2, 1x3 и 1x4 (вижте картинаката). В нито един комплект няма повторящи се елементи. Като използвате всички различни помежду си комплекти, наредете елементите с посочените размери един след друг в права линия и определете дължината на получената композиция. (Композицията е с размери 1xn, т.е. определете n.)



Краен срок за изпращане на решения 10 юни 1994 г.



## *M* + томбола

ПОПЪЛНЕТЕ ВАШИТЕ ОТГОВОРИ, ЗА ДА УЧАСТВАТЕ В  
ТОМБОЛА *M+*

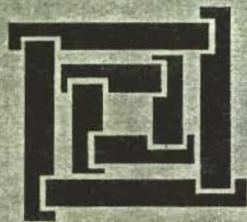
				56
				60
				40
				32
?	38	40	60	

1. Колко струва първата колонка?

- a) 36; b) 50; c) 52;

2. Кой е следващият, моля: 1, 2, 5, 26, ... ?





# *M + ИГРА*

Ако желаете да се включите в разпределението на наградите ЛЕГО за бр. 2, 1994 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете този фиш, изрежете го и заедно с решение на задачата го изпратете на посочения адрес не по-късно от 10 юни 1994 г. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име . . . . .

Фамилия . . . . .

код . . . . .

Селище . . . . .

ул. . . . .

Изпращайте на адрес:

София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" 49  
Мадлен Николова Петрова

**ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ:** В разпределението на наградите участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!



# *M + томбола*

Ако желаете да се включите в лотарийното разпределение на предметните награди за томболата *M+* в брой 2 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете лицевата страна на фиша, изрежете го и го изпратете не по-късно от 10 юни 1994 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име . . . . .

Фамилия . . . . .

код . . . . .

Селище . . . . .

ул. . . . .

Изпращайте на адрес:

София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" 49  
Мадлен Николова Петрова (за *M+ ТОМБОЛА*)

**ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ:** В томболата участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!



# M+ ПОСТЪР

(Що ли значи? - На стената п задачи!!!)

## 4 клас

- На мястото на всяка буква да се напише цифра така, че да е изпълнено равенството ГОЛ.ГОЛ=ФУТБОЛ, като на еднаквите букви съответстват едни и същи цифри, а на различните букви – различни цифри.
- Две ниви, квадратна с площ 4 ара и правоъгълна с площ 6 ара, имат обща ограда. Колко кола са необходими за ограждането на двете ниви, ако се поставят през 2 м?

## 5 клас

- Да се докаже, че числото  $\frac{30011\ldots125}{1994}$  се дели на 825.

- Дадени са квадрат, ромб и окръжност с обиколки, равни на 4 м. Коя от тези фигури загражда най-голямо лице?

## 6 клас

- Ако  $n$  е нечетно число, за което правилната дроб  $\frac{n}{30}$  е заключена между 0,1 и 0,2, да се покаже, че е в сила равенството  $n + n! = n^3$ , където с  $n!$  е означено произведението на естествените числа от 1 до  $n$ .

- Стените на басейн с форма на правилна четириъгълна призма са облицовани с 1500 квадратни плочки със страна 20 см. Да се намерят размерите на басейна, ако те са цели числа.

## 7 клас

- Възможно ли е числото 1994 да се представи като: а) сбор; б) разлика от квадратите на две цели числа?

- В правоъгълен  $\triangle ABC$  точката  $M$  е средата на хипотенузата  $AB$ . През  $M$  е построена права, перпендикулярна на  $CM$ , която пресича правите  $AC$  и  $BC$  съответно в точки  $P$  и  $Q$ . Да се докаже, че перпендикулярът, спуснат от  $C$  към  $AB$ , разполовява отсечката  $PQ$ .

## 8 клас

- Да се определят стойностите на параметъра  $a$ , за които неравенството  $\frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + x - 2} \leq a$  е изпълнено за всяко  $x \neq 1, x \neq -2$ .

- Дадени са права  $p$  и нележаща на нея точка  $A$ . За всяка точка  $M$  от  $p$  разглеждаме средата  $N$  на отсечката  $AM$ .
  - Да се намери геометричното място на точката  $N$ .
  - Да се докаже, че окръжностите с център  $N$  и радиус  $MN$  имат обща хорда.

## 9 клас

- Да се намерят всички стойности на параметъра  $a$ , за които системата
 
$$\begin{cases} |x| + y^2 = a \\ \frac{x}{y-1} = a-1 \end{cases}$$
 има единствено решение.

- В остроъгълен триъгълник  $\triangle ABC$  ъглополовящата от върха  $A$ , височината от  $B$  и медианата от  $C$  се пресичат в една точка. Да се докаже, че  $\tan \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \gamma}$ , където  $\alpha, \beta, \gamma$  са мерките на съответните ъгли при върховете  $A, B, C$  на  $\triangle ABC$ .

## 10 клас

- Да се определят стойностите на реалния параметър  $a$ , за които уравнението
 
$$x^2 - 2(\lg a + 1)x + \lg a + 3 = 0$$

има реални корени  $x_1, x_2$ , удовлетворяващи неравенството  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq \frac{1}{2}$ .

- Да се реши уравнението

$$\tan x \cdot (3 \tan x + 4) + \cot x \cdot (4 + 3 \cot x) + 2 = 0.$$

## 11 клас

- За кои стойности на параметъра  $m$  уравненията  $\sin 3x \cdot \cos x + 2(\sin^2 \frac{x}{2} + \sin 3x) = 3$  и  $\cos 6x + |5 - m| \cdot \cos 3x + m = 4$  са еквивалентни?

- Основата  $ABCD$  на права призма  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  е ромб със страна  $a$  и остръъгъл  $\alpha$  при върха  $A$ . Разстоянието от точката  $D_1$  до равнината  $A_1C_1D$  е  $b$ . Да се намери обемът на призмата.

*Задачите са предложени от Йовка Вълчева, Петя Иванова, Камен Койчев, Светлозар Дойчев и Христо Лесов.*



# Ж + томбола

## Наградите за бр. 4, 1993 г.

**MONTANA TRADING COMPANY**

официален дистрибутор на Winsome Computing Systems  
за първите трима печеливши по 1 копие на Kew2Win Версия 2.0 (виж задна корица)

1. Христина Чакърова, Варна 2. Кристина Иванова, София 3. Пламен Пешев, Пазарджик

### *Маратонки*

1. Гергана Стоянова, Русе
2. Димитър Димитров, Варна

*Наградите са осигурени от фирма  
"Орион-З ООД", Благоевград*

### *Електронен калкулатор*

1. Мария Топузова, София
2. Калин Костадинов, Видин

### *Електронен часовник*

1. Владимир Николов, София
2. Атанас Костадинов, София



*Наградите бяха изтеглени в Съюза на Математиците в България*

### *Книги с математическа тематика*

- |                                |                                     |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Ирина Прахчарова, Пазарджик | 9. Елена Костова, Ал. Константиново |
| 2. Калин Колев, Ловеч          | 10. Теодора Димитрова, Пазарджик    |
| 3. Вяра Димитрова, Варна       | 11. Мария Петкова, Плевен           |
| 4. Владимир Горчаков, София    | 12. Георги Димитров, Русе           |
| 5. Даниела Славова, Русе       | 13. Марияна Радева, София           |
| 6. Евдокия Николова, София     | 14. Йордан Николов, Шумен           |
| 7. Добрин Марчев, София        | 15. Петър Иванов, София             |
| 8. Петър Колев, Варна          | 16. Костадин Гергинчев, Юнаците     |

**Книгите ще бъдат изпратени по пощата, а останалите награди могат да се получат от редакцията след  
уговорка на тел. (02) 45-13-13. Краен срок за получаване на наградите 15 юли 1994 г.**



# ЗАДАЧИ И М+

В тази рубрика се публикуват задачи, достъпни за ученици от горните класове на средното училище, за студенти от първите курсове на университетите и за учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. По-широкият смисъл на оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие.

Рубриката разчита на Вашето активно участие както с решения, така и с предложения за задачи. Изпращайте ги на адрес:

1113 София,  
ул. "Акад. Г. Бончев", блок 8,  
Институт по математика при  
БАН,  
Ваня Хаджийски

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. След условията ще бъдат отбелязвани имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес.

Без да извършва класиране, M+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани. Ще се публикуват Ваши коментари по повод на задачите и техните решения (обобщения, интересни частни случаи и т.н.).

$M^+37$ . Да се докаже, че за всяко неотрицателно цяло число  $n$ , числото  $32.21^n + 2.47^n + 1$  е съставно.

(Св. Дойчев, Ст. Загора)

$M^+38$ . Ше разберете КОЙ ТАМ ДРАШИ, като решите ребуса КОЙ + ТАМ + ДРАШИ = 20527. В него на различните букви отговарят различни цифри, а числото КОЙ приема най-малката възможна стойност.

(Ив. Тонов, София)

$M^+39$ . Върху страните на  $\triangle ABC$  външно са построени  $\triangle A_1BC$ ,  $\triangle B_1AC$ ,  $\triangle C_1AB$  така, че  $A_1B = A_1C$ ,  $B_1A = B_1C$ ,  $\angle BAC_1 = \frac{1}{2}\angle BA_1C$  и  $\angle ABC_1 = \frac{1}{2}\angle AB_1C$ . Да се докаже, че  $A_1B_1 \perp CC_1$ .

(Б. Михайлов, Пловдив)

$M^+40$ . Да се намерят всички естествени числа  $n$ , за които уравнението

$$\left[ \frac{x^3 + y^3}{xy + x + y} \right] - \left[ \frac{x}{y} \right] - \left[ \frac{y}{x} \right] = n$$

няма решение в естествени числа (с  $[a]$  е означено най-голямото цяло число, ненадминаващо  $a$ ).

(Св. Дойчев, Ст. Загора)

$M^+41$ . Във всяка от  $\binom{n}{k}$  на брой кутии ( $1 \leq k \leq n$ ) има по  $k$  различни картички, върху всяка от които е написано число от 1 до  $n$ . Съдържанието на всеки две кутии е различно. Колко най-много картички може да премахне магьосникът Мерлин, така че след това сестра му Мирлен да може да възстанови съдържанието на всяка кутия.

(Я. Сидеров, 11 кл., СМГ, София)

$M^+42$ . Да се намери най-малката стойност на функцията  $f(x, y) = |5x^2 + 24xy + 5y^2|$ , където  $x$  и  $y$  са цели числа, които не са едновременно нула.

(Р. Козарев, София)

Срок за изпращане на решения – 15 октомври 1994 г.

## ЗАДАЧИ М<sup>+</sup> РЕШЕНИЯ

**M<sup>+</sup>19.** Съществува ли естествено число  $n$  такова, че:

а)  $3n$  е точна трета степен,  $4n$  е точна четвърта степен и  $5n$  е точна пета степен?

б)  $3n$  е точна трета степен,  $4n$  е точна четвърта степен,  $5n$  е точна пета степен и  $6n$  е точна шеста степен?

**(Ив. Тонов, София)**

**Решение на Л. Каменова, 9 кл. СМГ, София.**

а) Да. Например  $n = 2^{30} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24}$ .

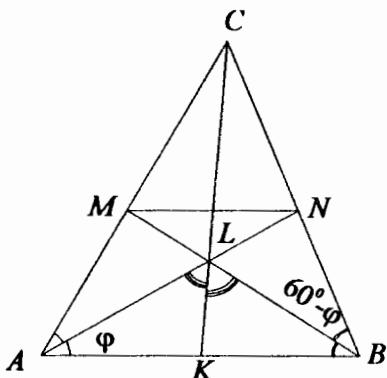
б) Не. Наистина, ако такова число  $n$  съществува ясно е, че  $2|n$ . Нека  $\alpha$  е най-високата степен на 2 в каноничното разлагане на  $n$ . Тъй като  $4n$  е точна четвърта степен, то  $4|(\alpha + 2)$ , а понеже  $6n$  е точна шеста степен, то  $6|(\alpha + 1)$ , т.e.  $2|(\alpha + 2)$  и  $2|(\alpha + 1)$ , което е невъзможно.

Задачата е решена и от А. Иванов, 9 кл., II МГ, Варна; Ст. Атанасов, 9 кл. ИПМГ, София и М. Касабов, I курс, ФМИ, СУ "Св. Климент Охридски".

**M<sup>+</sup>20.** Върху страните  $AC$  и  $BC$  на  $\triangle ABC$  са взети съответно точки  $M$  и  $N$  такива, че  $\angle BMN = \angle ANM = 30^\circ$ . Да се намери  $\angle ACB$ , ако  $\angle ANB = \angle BAN + 60^\circ$ .

**(Б. Михайлов, Пловдив)**

**Решение на Ст. Атанасов, 9 кл. ИПМГ, София.** Нека  $AN \times BM = L$ ,  $LK$  ( $K \in AB$ ) е ъглополовяща на  $\angle ALB$  и  $\angle BAN = \varphi$  (виж чертежа).



Тъй като по условие  $\angle ANB = \varphi + 60^\circ$  и  $\angle ALB = 120^\circ$ , то  $\angle ABC = 180^\circ - (\varphi + \varphi + 60^\circ) = 120 - 2\varphi$  и  $\angle LAB = 180^\circ - (\varphi + 120^\circ) = 60^\circ - \varphi$ . Следователно  $BL$  е ъглополовяща на  $\angle ABC$ . От това следва,

че  $\triangle KBL \cong \triangle BNL$  и значи  $LK = LN$ . Тогава  $LM = LK$  и  $\triangle AKL \cong \triangle ALM$ . Следователно  $AL$  е ъглополовяща на  $\angle BAC$ , т.e.  $\angle BAC = 2\varphi$ . Така получаваме, че  $\angle ACB = 180^\circ - (2\varphi + 120^\circ - 2\varphi) = 60^\circ$ .

Задачата е решена и от А. Асенов, гара Бов, Софийска област; А. Иванов и М. Касабов.

**M<sup>+</sup>21.** Да се докаже, че уравнението  $(3x + 1)^3 + 27 = y^2$  няма решение в цели числа.

**(Е. Стоянов, Видин)**

**Решение на Ст. Атанасов.** Нека  $(x, y)$  е решение на уравнението. След полагането  $z = 3x + 4$ , то приема вида  $z(z^2 - 9z + 27) = y^2$ . Понеже  $(z, z^2 - 9z + 27) = (z, 27) = 1$  и  $z^2 - 9z + 27 > 0$  за всяко  $z$ , то  $z = p^2$  и  $z^2 - 9z + 27 = q^2$ , където  $p$  и  $q$  са цели числа. Последното е изпълнено само, ако дискриминантата на квадратния тричлен  $z^2 - 9z + 27 - q^2$  е точен квадрат, т.e.  $4q^2 - r^2 = 27 \iff (2q - r)(2q + r) = 27$ , където  $r$  е цяло число. Оттук следва, че

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} 2q - r = \pm 1 \\ 2q + r = \pm 27 \end{array} & \begin{array}{l} 2q - r = \pm 27 \\ 2q + r = \pm 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} 2q - r = \pm 3 \\ 2q + r = \pm 9 \end{array} & \begin{array}{l} 2q - r = \pm 9 \\ 2q + r = \pm 3 \end{array} \end{array} \quad \text{или}$$

Възможните стойности на  $q$  са  $\pm 7$  и  $\pm 3$ . Непосредствено се проверява, че за никоя от тях  $z$  не е точен квадрат. С това задачата е решена.

Задачата е решена и от А. Асенов, А. Иванов, Л. Каменова и М. Касабов.

**M<sup>+</sup>22.** Нека  $AA_1$  и  $BB_1$  са височините към страниите  $BC$  и  $AC$  на остроъгълния  $\triangle ABC$ . През ортоцентъра на триъгълника е прекарана пр права, която пресича  $BC$  и  $AC$  съответно във вътрешни точки  $A_0$  и  $B_0$ . Да се докаже, че

$$\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB_0}{B_0C} + \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BA_0}{A_0C} = 1.$$

**(Б. Михайлов, Пловдив)**

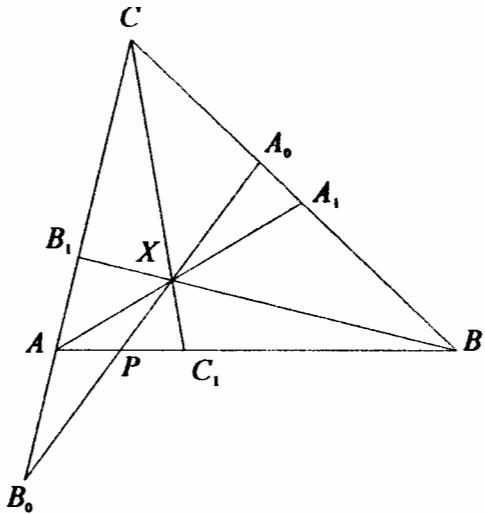
**Решение.** Както са забелязали авторите на получените в редакцията решения, твърдение то в задачата остава вярно, ако ортоцентъра на  $\triangle ABC$  се замени с точка  $X$  от вътрешността на  $\triangle ABC$ . Всъщност, в сила е следното по-общо твърдение, което ни бе съобщено от автора на задачата: В равнината са дадени  $\triangle ABC$  и точка  $X$ , нележаща на правите  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , такива че правите  $AX$  и  $BC$  се пресичат в т.  $A_1$ , правите  $BX$  и  $AC$  се пресичат в т.  $B_1$ , а правите

$CX$  и  $AB$  не са успоредни. Ако права през  $X$ , не успоредна на  $AB$ , пресича правите  $AC$  и  $BC$  съответно в точките  $B_0$  и  $A_0$ , то

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AB_0}}{\overline{B_0C}} + \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} = 1$$

(С  $MN$  е означена насочената отсечка).

Доказателството, което излагаме следва идеята на **А. Асенов**, като използва съответната форма на теоремата на Менелай чрез насочени отсечки.



Нека (виж чертежа)  $C_1 = CX \times AB$  и  $P = A_0B_0 \times AB$ . Прилагайки теоремата на Менелай за  $\triangle AC_1C$  и правите  $BB_1$  и  $B_0X$ , и за  $\triangle BCC_1$  и правите  $AA_1$  и  $A_0X$ , последователно получаваме

$$(1) \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1X}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -\frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{XC}}{\overline{C_1X}}$$

$$(2) \frac{\overline{AP}}{\overline{PC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1X}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CB_0}}{\overline{B_0A}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{AB_0}}{\overline{B_0C}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{PC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1X}}{\overline{XC}}$$

$$(3) \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{AB}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} = -\frac{\overline{C_1A}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XC_1}}$$

$$(4) \frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1P}}{\overline{PB}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{BA_0}}{\overline{A_0C}} = -\frac{\overline{PB}}{\overline{C_1P}} \cdot \frac{\overline{XC_1}}{\overline{CX}}$$

Тъй като точките  $A, B, C_1$  и  $P$  лежат на една права, от (1), (2), (3) и (4) следва, че

$$\frac{-\overline{BC_1} \cdot \overline{PC_1} + \overline{AC_1} \cdot \overline{PC_1}}{\overline{AB} \cdot \overline{PC_1}} = \frac{(\overline{AC_1} + \overline{C_1B}) \overline{PC_1}}{\overline{AB} \cdot \overline{PC_1}} = 1.$$

Задачата е решена и от Ст. Атанасов, Л. Каменова, М. Касабов и М. Петкова, 9 кл. ПМГ, Плевен.

**M<sup>+</sup>23.** Да се намери най-голямата стойност на функцията  $f(p, q) = \max_{x \in \mathbb{R}} |p \cos x + q \sin x|$ , ако  $p$  и  $q$  удовлетворяват условието

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |(p \cos x + q \sin x) \cdot \cos x| \leq 1.$$

(проф. Т. Генчев, София)

**Решение на М. Касабов.** Нека  $\varphi \in [0, 2\pi]$  е такова, че  $\cos \varphi = p/\sqrt{p^2 + q^2}$  и  $\sin \varphi = q/\sqrt{p^2 + q^2}$ . Тогава

$$f(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2} \max_{x \in \mathbb{R}} |\cos(x - \varphi)| = \sqrt{p^2 + q^2},$$

$$(p \cos x + q \sin x) \cos x = \sqrt{p^2 + q^2} \cos(x - \varphi) \cos x = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{2} (\cos(2x - \varphi) + \cos \varphi).$$

Откъдето следва, че

$$|(p \cos x + q \sin x) \cos x| \leq \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{2} (1 + |\cos \varphi|) = \frac{\sqrt{p^2 + q^2} + |p|}{2},$$

т.e.

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |(p \cos x + q \sin x) \cos x| = \frac{f(p, q) + |p|}{2}.$$

Следователно  $f(p, q) \leq 2 - |p| \leq 2$  и

$$\max_{p, q \in \mathbb{R}} f(p, q) = f(0, -2) = f(0, 2) = 2.$$

**M<sup>+</sup>24.** Квадрат със страна 1 е разделен на пет непресичащи се части с диаметри  $d_1, \dots, d_5$ . Да се намери разделяне на квадрата, за което числото  $\max(d_1, \dots, d_5)$  е възможно най-малко.

(Б. Бакалов, студент във ФМИ, София)

**Решение.** Нека  $ABCD$  е квадрат със страна 1. Разглеждаме разделянето на  $ABCD$  показано на чертежа, където  $AE = BE$ ,  $CL = DK = \frac{1}{4}$  и  $AF = EG = BH = LN = KM = \frac{13}{32}$ . В този случай

(продължава на стр.44)



## ЕДНА НЕРЕШЕНА ЗАДАЧА ОТ ТЕОРИЯ НА ИГРИТЕ

кмн Емил Колев, Институт по математика – БАН

Целта на настоящата работа е да се обобщи една добре известна (и лесна за решаване) задача от теория на игрите. Голяма част от задачите в тази математическа област са съставени по схемата:

Двама души  $A$  и  $B$  играят следната игра. Първият играч ( $A$ ) си избира естествено число в даден интервал, известен и на двамата играчи. Вторият играч ( $B$ ) задава последователно въпроси от определен вид (например само въпроси от вида: "Дели ли се избраното число на посочено от  $B$  просто число?" или "По-малко ли е избраното от  $A$  число от посочено от  $B$  число?"). При това на  $A$  може да се разреши да изляже определен брой пъти и т.н.). Целта е да се определи минималният брой въпроси, които позволяват да се открие избраното число. В зависимост от ограниченията върху въпросите на  $B$  и отговорите на  $A$  се получават различни по трудност задачи.

Да разгледаме горната задача при условие, че  $A$  избира естествено число в интервала  $[1, n]$  ( $n$  е известно и на двамата играчи) и  $B$  има право да задава въпроси от вида: "По-голямо ли е избраното число от посочено от него естествено число?". Търсим минималния брой въпроси  $t(n)$ , с помощта на които  $B$  може да определи числото.

Не е трудно да се забележи, че ако в даден момент  $B$  знае, че числото е в интервал  $[a, b]$ , с въпрос от вида: "По-голямо ли е избраното число от  $c$ ? ( $a \leq c \leq b$ )" той може да определи (в зависимост от отговора на  $A$ ) в кой от двета интервала  $[a, c]$  и  $[c + 1, b]$  е търсеното число. Следователно ако  $B$  иска да намали възможно най-много интервала, в който е числото, той трябва да избере такова  $c$ , че интервалите  $[a, c]$  и  $[c + 1, b]$  да имат (ако е възможно) еднаква дължина. Оказва се, че такава стратегия действително осигурява минималният брой въпроси.

**Пример 1.** Да разгледаме една възможна поредица от въпроси и отговори при условие, че  $n = 8$  и избраното число е 5. Първият въпрос е: "По-голямо ли е числото от 4 (тъй като интервалите  $[1, 4]$  и  $[5, 8]$  имат еднаква дължина)?". Отговорът е "да". В този момент  $B$  знае, че числото е в интервала  $[5, 8]$ . Вторият въпрос е: "По-голямо ли е числото от 6 (тъй като интервалите  $[5, 6]$  и  $[7, 8]$  имат еднаква дължина)?". Отговорът е "не". В този момент  $B$  знае, че числото е в интервала  $[5, 6]$ . Третият последен въпрос е: "По-голямо ли е числото от 5?". Отговорът е "не" и следователно избраното число е 5. Не е трудно да се види, чекоето и да е избраното число, то може да бъде намерено след 3 въпроса. Следователно  $t(8) \leq 3$ . При това лесно се вижда, че както и да се зададе първият въпрос, възможен е отговор, след който  $B$  ще знае, че числото е в интервал с дължина поне 3 (т.е. то е измежду четири числа). Сега вече е очевидно, че с помощта само

на още един въпрос числото не може да бъде определено. Следователно  $t(8) = 3$ . Покажете, че при  $5 \leq n \leq 8$  са необходими също 3 въпроса за намиране на числото.

**Пример 2.** Нека  $n = 11$  и избраното число е 7. Тъй като интервалът  $[1, 11]$  не може да бъде разделен на два интервала с равни дължини, първият въпрос може да бъде: "По-голямо ли е числото от 5?" или "По-голямо ли е числото от 6?". И в двата случая при всеки отговор на  $A$  играчът  $B$  ще знае, че числото е в интервал с дължина максимум 5 (в такъв интервал има 6 естествени числа). Следвайки предложената стратегия, след втория въпрос числото ще се намира в интервал с дължина 2 (т.е. за него ще има 3 възможности). След третия въпрос  $B$  ще знае, че числото е в интервал с дължина 1, т.е. за него ще има само две възможности. Очевидно с четвъртия въпрос  $B$  ще знае кое е числото. Същите разсъждения могат да бъдат направени за всяко число от 1 до 11. Следователно  $t(11) \leq 4$ . Както в пример 1 може да се покаже, че 3 въпроса не са достатъчни за намиране на числото. Получихме, че  $t(11) = 4$ .

За произволно  $n$  е в сила следното

**Твърдение 1.** Ако  $2^{l-1} < n \leq 2^l$ , то  $t(n) = l$ .

**Доказателство.** Първо ще покажем, че  $t(n) \leq l$ , т.е. че  $l$  въпроса са достатъчни за намиране на избраното число. Действително, ако  $n < 2^l$ , играчът  $B$  може да счита, че избраното число е в интервала  $[1, 2^l]$ , с което той утежнява задачата си, тъй като търси числото в по-голям интервал. С всеки въпрос той дели интервала, в който е числото, на два равни интервала (всички интервали са с дължини степени на двойката минус 1 и следователно това е възможно) и от отговора на  $A$  разбира къде е числото. По този начин след първия въпрос  $B$  ще знае, че числото е в интервал с дължина  $2^{l-1} - 1$ , след втория – в интервал с дължина  $2^{l-2} - 1$  и т.н., след  $l$ -ия – в интервал с дължина  $2^{l-l} - 1 = 0$ , т.е. той ще знае числото.

За да докажем, че  $t(n) > l - 1$ , да забележим, че какъвто и да е първият въпрос на  $B$ , отговорът на  $A$  може да бъде такъв, че числото да се намира в интервал с дължина поне  $2^{l-2}$  (в такъв интервал има поне  $2^{l-2} + 1$  числа). По този начин получаваме, че след  $l - 1$  въпроса числото ще е в интервал с дължина  $2^{l-1-(l-1)} = 1$ , т.е.  $B$  не може да определи числото.

Следователно  $t(n) = l$ .  $\square$

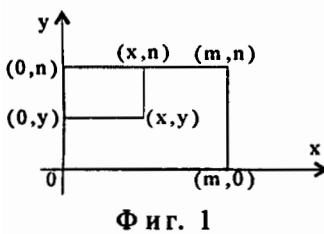
Да забележим, че при  $2^{l-1} + 1 \leq n \leq 2^l$  имаме  $l = \lceil \log_2 n \rceil$ , където  $\lceil x \rceil$  означава горна цяла част на  $x$  (най-малкото естествено число по-голямо или равно на  $x$ ). Връзката между  $\lceil x \rceil$  и стандартната цяла част  $[x]$  на  $x$  (най-голямото естествено число, по-малко или равно на  $x$ ) е:

- ако  $x$  е цяло число,  $\lceil x \rceil = [x]$ ;
- ако  $x$  не е цяло число,  $\lceil x \rceil = [x] + 1$ .

Следователно отговорът на поставената в началото задача е:  $t(n) = \lceil \log_2 n \rceil$ .

Сега да разгледаме едно обобщение на горната задача, което в общия случай е все още нерешен проблем.

Разглеждаме правоъгълна координатна система  $Oxy$ . Правоъгълникът с върхове:  $(0, 0)$ ;  $(m, 0)$ ;  $(m, n)$ ;  $(0, n)$  е разделен с прости, успоредни на координатните оси, на квадратчета със страна 1. Двама души ( $A$  и  $B$ ) играят следната игра:  $A$  избира едно от получените  $m \cdot n$  квадратчета. Въпросите на  $B$  се състоят в посочване на точка  $(x, y)$  с целочислени координати, като  $A$  отговаря дали избраното квадратче се намира в правоъгълника с върхове  $(0, y)$ ;  $(x, y)$ ;  $(x, n)$ ;  $(0, n)$  (фиг.1).



Целта отново е да намерим минималния брой въпроси  $t(m, n)$ , които са достатъчни за определяне на избраното квадратче.

Описаната игра представлява двумерен вариант на първоначалната и еестествено да се очаква, че прилагайки двукратно стратегията от едномерния вариант, ще получим минималния брой въпроси. Както ще покажем по-долу, това не винаги е така.

**Твърдение 2.** За произволни естествени числа  $m$  и  $n$  са в сила неравенства:

$$\lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil \leq t(m, n) \leq \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil.$$

**Доказателство.** Чрез  $\lceil \log_2 n \rceil$  въпроса от вида  $(m, y)$  играчът  $B$  може да определи в кой ред е избраното квадратче (Защо?). След това преминаваме към едномерния вариант и чрез  $\lceil \log_2 m \rceil$  въпроса  $B$  определя търсеното квадратче. Следователно  $t(m, n) \leq \lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 m \rceil$ . От друга страна, тъй като с всеки въпрос  $B$  намалява най-много наполовина множеството, в което е избраното квадратче (виж и доказателството на твърдение 1), следва че, ако  $2^k + 1 \leq m \cdot n$ , то  $k$  въпроса не винаги са достатъчни за определянето му. Следователно  $t(m, n) \geq \lceil \log_2(m \cdot n) \rceil = \lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil$ .  $\square$

Не е трудно да се покаже, че или  $\lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil = \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil$ , или  $\lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil = \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil - 1$ . От твърдение 2 следва, че ако  $\lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil = \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil$ , то  $t(m, n) = \lceil \log_2(m \cdot n) \rceil$ .

**Пример 3.** Нека  $m = 2^p$ ,  $n = 2^q$ . Тогава  $\log_2 m = p$ ;  $\log_2 n = q$ ;  $\log_2(m \cdot n) = p + q$ . Следователно  $t(m, n) = p + q$ .

В общия случай числото  $t(m, n)$  не е известно. От казаното по-горе следва, че за неговото намиране е интересно да се разглеждат само тези  $m$  и  $n$ , за които  $\lceil \log_2 m + \log_2 n \rceil \neq \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil$ . При конкретни стойности на  $m$  и  $n$  се търси алгоритъм с най-малко въпроси, осигуряващ намирането на квадратчето.

**Пример 4.** Нека  $m = 5$ ,  $n = 3$ . Тогава  $\lceil \log_2 3 \rceil = 2$ ;  $\lceil \log_2 5 \rceil = 3$ ;  $\lceil \log_2(5 \cdot 3) \rceil = 4$ . Следователно  $t(3, 5) = 4$  или 5. Ще покажем, че 4 въпроса са достатъчни за намиране на квадратчето (фиг. 2).

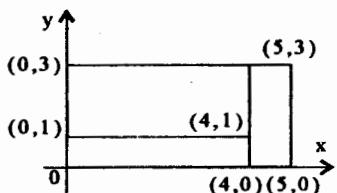
I въпрос – (4,1). При отговор „да“ следва, че квадратчето е в правоъгълник с дължини на страните 4 и 2 и от пример 3 следва, че то може да се определи с още 3 въпроса. Ако отговорът е „не“:

II въпрос – (4,0). Ако отговорът е „да“, следва че квадратчето е в правоъгълник с дължини на страните 4 и 1 и от пример 3 следва, че то може да се намери с още 2 въпроса. Ако отговорът е „не“, избраното квадратче е в правоъгълник с дължини на страните 3 и 1 и е лесно да се види, че два въпроса са достатъчни за намирането му.

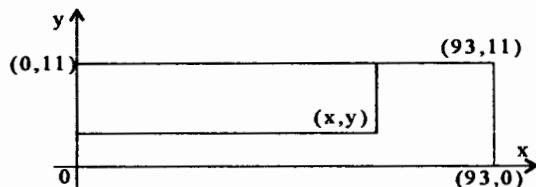
Да отбележим, че за доказване на равенството  $t(m, n) = \lceil \log_2(m \cdot n) \rceil$  е достатъчно да посочим алгоритъм с  $\lceil \log_2(m \cdot n) \rceil$  въпроса, осигуряващ намирането на квадратчето, докато за доказване на  $t(m, n) \neq \lceil \log_2(m \cdot n) \rceil$  е необходимо на всяка стъпка да се разгледат всички възможни следващи въпроси и да се покаже, че  $\lceil \log_2(m \cdot n) \rceil$  въпроса не са достатъчни. При това, когато се определят следващите въпроси, трябва да се знае, че ако възможностите за квадратчето са повече от  $2^k$ , то  $k$  въпроса не са достатъчни за намирането му. Например в пример 4 първият въпрос не може да бъде (5,1), понеже при отговор „да“ квадратчето ще е едно от 10-те квадратчета (фиг.2) и тъй като 10 е по-голямо от  $2^3$ , то 3 въпроса няма да бъдат достатъчни. Подобни разсъждения се илюстрират от следния

**Пример 5.** Нека  $m = 93$ ,  $n = 11$ . Тогава от Твърдение 2 следва  $10 \leq$

$t(93, 11) \leq 11$ . Ще покажем, че 10 въпроса не са достатъчни за намиране на квадратчето, т.е. че  $t(93, 11) = 11$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Да допуснем, че  $t(93, 11) = 10$ . Първият въпрос е  $(x, y)$ . За  $x$  и  $y$  трябва да е изпълнено следното условие:

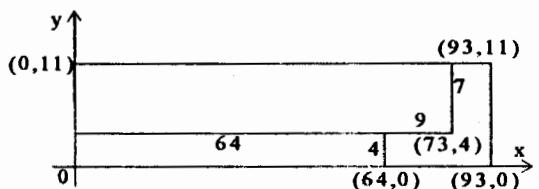
Броят на квадратчетата и в двете части (фиг.3) трябва да е по-малък или равен на  $2^9$ .

Следователно за  $x$  и  $y$  има следните възможности:

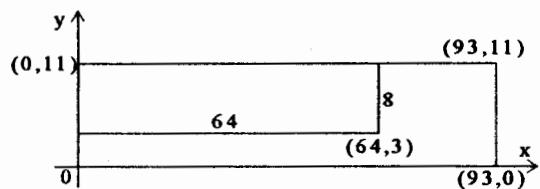
1)  $x = 73, y = 4$  (в този случай при отговор "да" за избраното квадратче има  $7 \cdot 73 = 511$  възможности, а при отговор "не" възможностите са  $11 \cdot 93 - 7 \cdot 73 = 512$ ).

2)  $x = 64, y = 3$  (в този случай при отговор "да" за избраното квадратче има  $8 \cdot 64 = 512$  възможности, а при отговор "не" възможностите са  $11 \cdot 93 - 8 \cdot 64 = 511$ ).

Нека първият въпрос е  $x = 73, y = 4$  и отговорът е "не". Не е трудно да се види, че единствената възможност за втория въпрос е  $x = 64, y = 0$ , защото това е единственият въпрос, който разделя фигурата на две равни части (фиг.4). Ако отговорът отново е "не", както и да зададем третия въпрос, възможен е отговор, след който квадратчето ще се намира във фигура с повече от  $128 = 2^7$  квадратчета и следователно 7 въпроса няма да бъдат достатъчни. Показахме, че ако първият въпрос е  $x = 73, y = 4$ , квадратчето не може да бъде намерено с 10 въпроса.



Фиг. 4



Фиг. 5

Ако първият въпрос е  $x = 64, y = 3$  и отговорът е "не" (фиг.5), лесно се проверява, че какъвто и да е вторият въпрос, възможен е отговор, след който квадратчето ще се намира във фигура с повече от  $256 = 2^8$  квадратчета и следователно то не може да бъде намерено с още 8 въпроса.

Ще отбележим, че всички известни до този момент резултати за функцията  $t(m, n)$  са получени в [1] и [2]. Знае се, че съществуват безбройно много стойности на  $m$  и  $n$ , за които  $t(m, n) = \lceil \log_2(m \cdot n) \rceil + 1$  [2]. Интерес представлява случаят  $m = n$ . В [1] е доказано, че  $t(m, m) = \lceil \log_2(m^2) \rceil$  при  $m \leq 180$ , докато в [2] че  $t(181, 181) = \lceil \log_2(181^2) \rceil + 1 = 16$ , т.е. първото естествено число  $m$ , за което  $t(m, m) = \lceil \log_2(m^2) \rceil + 1$ , е  $m = 181$ .

Пример 5 илюстрира търсенето на алгоритъм с определен брой ходове. На всяка стъпка е необходимо да се разглеждат всички възможни въпроси и при всеки отговор да се търсят възможностите за следващ въпрос, и т.н. Ако винаги се стига до невъзможност за продължаване на въпросите (както в пример 5), ясно е, че търсеният алгоритъм не съществува.

Написването на компютърна програма, реализираща търсенето на  $t(m, n)$  за конкретни стойности на  $m$  и  $n$ , е едно предизвикателство за всеки програмист. Това не само ще позволи проверяването на известни резултати (виж зад.8 и зад.9), но при получаване на достатъчно голям брой стойности на  $t(m, n)$  ще е възможно съставянето (и евентуално доказването) на хипотеза за поведението на функцията  $t(m, n)$ .

Накрая предлагаме няколко задачи за самостоятелна работа. По-трудните от тях са отбелязани с \*, а най-трудните с \*\*.

### Задачи.

1. Да се докаже, че  $t(m, 2) = \lceil \log_2(m.2) \rceil$ .
2. Да се докаже, че  $t(m, 2^p) = \lceil \log_2(m.2^p) \rceil$ .
3. Да се докаже, че  $t(m, 3) = \lceil \log_2(m.3) \rceil$ .

*Упътване.* Ако  $m = 2^s + A$  за  $A < 2^s$ , разгледайте първи и втори въпрос съответно  $(2^s, 1)$  и  $(2^s, 0)$ . Като използвате, че ако  $3(2^s + A) < 2^{s+2}$ , то  $3A < 2^s$ , приложете индукция.

4. Да се докаже, че  $t(m, 5) = \lceil \log_2(m.5) \rceil$ .
5. Да се докаже, че  $t(2^p.m, 2^q.n) \leq p + q + t(m, n)$ .

*Упътване.* Покажете, че с  $p + q$  въпроса местоположението на квадратчето може да се ограничи в правоъгълник с размери  $m \times n$ .

- 6\*. Да се докаже, че  $t(m, 2^p - 1) = \lceil \log_2(m.(2^p - 1)) \rceil$ .

*Упътване.* Използвайте идеята от задача 3.

$$7^{**}. \text{ Да се докаже, че } t\left(\frac{2^{pq} - 1}{2^q - 1}, n\right) = \left\lceil \log_2\left(\frac{2^{pq} - 1}{2^q - 1} \cdot n\right) \right\rceil.$$

- 8\*. Да се докаже, че  $t(45, 45) = 11$ .

*Упътване.* Използвайте разсъжденията в пример 5, за да намерите алгоритъм с 11 въпроса.

- 9\*\*. Да се докаже, че ако  $m.n \leq 1022$ , то  $t(m, n) = \lceil \log_2(m.n) \rceil$ .

*Упътване.* Използвайте, че: 1. Ако  $m_1 \leq m$  и  $n_1 \leq n$ , то  $t(m_1, n_1) \leq t(m, n)$ .  
2. Ако  $2^k < m.n \leq 2^{k+1}$ ;  $2^k < m_1.n_1 \leq 2^{k+1}$ ;  $m \geq m_1$ ;  $n \geq n_1$  и  $t(m, n) = k + 1$ , то  $t(m_1, n_1) = k + 1$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Rusczinko. Two dimensional search problem. In: Sixth Joint Swedish-Russian Workshop on Information Theory.

2. I. Landjev, E. Kolev. On the two dimensional search problem. (submitted for presentation to Russian-Bulgarian Workshop on Information Theory, Novgorod – IX.1994).



# М + ПРАКТИКУМ



## АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ

В брой 1 на МАТЕМАТИКА ПЛЮС публикувахме задачи по алгебра и примерни теми в помощ на всички, които ще се явяват на кандидатстудентски изпит по математика. В този брой ще намерите "типови" задачи по геометрия и нови четири примерни теми, изгответи от преподаватели в софийски ВУЗ-ове. В трети брой ще предложим още четири примерни теми и избрани задачи от проведените през последните години конкурсни изпити по математика за различни факултети на Московския държавен университет.

Решаването на задачите от брой 1 и 2 е задължителен елемент от подготовката за изпит на един кандидатстудент, защото тяхното преодоляване със сигурност значи, че той владее кандидатстудентския минимум по математика. В предлаганите задачи умишлено не са включени тези от конкурсните изпити за 1993 г., понеже те бяха публикувани в брой 4 за 1993 г. на списанието.

**Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС.**

### ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

доц. П. Сидеров, доц. К. Чакърян, ФМИ на СУ

#### Триъгълник

1. Даден е триъгълник  $ABC$  със страни  $AB = 15$ ,  $BC = 14$ ,  $AC = 13$ . Да се намерят:

- а) видът на триъгълника;
- б) лицето му  $S$ ;
- в) дължината  $h_a$  на височината от върха  $A$ ;
- г) дължината  $m_b$  на медианата от върха  $B$ ;
- д) дължината  $l_c$  на ъглополовящата от върха  $C$ ;
- е) дължината  $r$  на радиуса на вписаната окръжност;
- ж) дължината  $R$  на радиуса на описаната окръжност;
- з) дълчините на отсечките, на които вписаната окръжност разделя страните на триъгълника;
- и) разстоянието между центровете на вписаната и описаната окръжности.

2. В правоъгълния триъгълник  $ABC$  височината към хипотенузата  $AB$  е  $CH$ . Периметрите на триъгълниците  $ACH$  и  $BCH$  са равни съответно на 36 и 48. Да се намерят дълчините на страните на триъгълника  $ABC$ .

3. Даден е триъгълник  $ABC$  със страна  $AB = 5$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$  и радиус на описаната окръжност

$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ . Да се пресметнат дълчините на другите две страни и лицето на триъгълника. (Икономически ВУЗ, 1988 г.)

4. Даден е триъгълник  $ABC$  с  $\angle BAC = 120^\circ$  и радиуси на вписаната и описаната окръжности съответно  $r = \sqrt{3}$  и  $R = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ . Да се пресметнат дълчините на страните на триъгълника. (Софийски университет, 1992 г.)

5. Даден е триъгълник  $ABC$  със страна  $AB = 8$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$  и радиус на вписаната окръжност  $r = \sqrt{3}$ . Да се пресметнат дълчините на другите две страни на триъгълника.

6. Дълчините на страните на триъгълник са в отношение  $7 : 15 : 20$ , а дължината на радиуса на вписаната му окръжност е равна на 2. Да се намерят дълчините на страните на триъгълника.

7. Център на вписаната в триъгълника  $ABC$  окръжност е точката  $O$  и лицата на триъгълниците  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $AOC$  са равни съответно на 30, 28, 26. Да се намерят дълчините на страните на триъгълника  $ABC$ .

8. Да се намерят дълчините на страните на три-

ъгълника  $ABC$ , ако  $\angle ACB = 120^\circ$  и дълчините на медианата и ъглополовящата от върха  $C$  са равни съответно на  $\frac{\sqrt{19}}{2}$  и  $\frac{15}{8}$ .

9. Разстоянията от центъра на вписаната в триъгълника  $ABC$  окръжност до върховете  $A$  и  $B$  са равни съответно на  $\sqrt{7}$  и  $\sqrt{21}$ . Големината на ъгъла  $ACB$  е  $120^\circ$ . Да се намерят дълчините на страните на триъгълника  $ABC$ . (Университети, педагогически и технически ВУЗ, 1986 г.)

10. От вътрешна точка  $M$  на равностранния триъгълник  $ABC$  са спуснати перпендикуляри  $MA_1$ ,  $MB_1$  и  $MC_1$  към страните на триъгълника (точките  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат съответно на  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ ), като  $MA_1 = 14$ ,  $MB_1 = 5$  и  $MC_1 = 16$ . Да се пресметнат дълчините на:

- a) страните на триъгълника  $A_1B_1C_1$ ;
- b) отсечките  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$ ;
- c) страната на триъгълника  $ABC$ . (Икономически ВУЗ, 1987 г.)

11. Нека  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  са височините на острогълния триъгълник  $ABC$  и  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = \gamma$ . Да се докаже, че:

- a) триъгълниците  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$  и  $A_1B_1C$  са подобни на триъгълника  $ABC$  с коефициенти на подобие съответно  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$ ;
- b) радиусът на описаната около триъгълника  $A_1B_1C_1$  окръжност е два пъти по-малък от радиуса на описаната около триъгълника  $ABC$  окръжност.

12. В остроъгълен триъгълник  $ABC$   $BB_1$  и  $CC_1$  са височини и  $B_1C_1 = \frac{13}{2}$ . Лицата на триъгълниците  $AB_1C_1$  и  $ABC$  са съответно равни на  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$  и  $30\sqrt{3}$ . Да се намерят дълчините на страните на триъгълника  $ABC$ .

13. Точка  $M$  е медицентър на триъгълника  $ABC$  с лице  $S$  и страни  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ . Точките  $A_1$  и  $B_1$  са средите съответно на страните  $BC$  и  $CA$ , а  $\angle ACB = \gamma$ ,  $\angle A_1MB = \gamma_1$ .

- a) Да се намери ъгълът  $\gamma_1$ , ако  $3S = AA_1 \cdot BB_1$ .
- b) Да се докаже, че  $\cot \gamma - \cot \gamma_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S}$ .

в) Ако  $\gamma + \gamma_1 = \pi$ , да се докаже, че  $\gamma \leq \frac{\pi}{3}$ . Какъв е триъгълникът, ако  $\gamma = \frac{\pi}{3}$  и  $\gamma_1 = \frac{2\pi}{3}$ ? (Университети и педагогически ВУЗ, 1985 г.)

14. Даден е правоъгълен триъгълник  $ABC$  с хипотенуза  $AB = 1$  и  $\angle BAC = \alpha$ . Вписаната в триъгълника  $ABC$  окръжност се допира до страничите  $AB$  и  $AC$  съответно в точките  $M$  и  $N$ . Да се докаже, че

- a)  $MN = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha}$ ;
- b)  $MN \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$ . (Университети, педагогически и технически ВУЗ, 1988 г.)

## Успоредник. Трапец

15. Да се пресметне лицето на успоредник, ако:

- а) дълчините на страните му са  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) и големината на остря ъгъл между диагоналите му е  $\varphi$ ;
- б) дълчините на диагоналите му са  $p$  и  $q$  ( $p > q$ ) и големината на остря ъгъл е  $\alpha$ .

16. В ромб  $ABCD$  с диагонали  $AC = 4$  и  $BD = 3$  точките  $E$  и  $F$  са петите на височините от върха  $D$  съответно към страните  $AB$  и  $BC$ . Да се пресметне лицето на четириъгълника  $BEDF$ .

17. Да се пресметне лицето на ромб  $ABCD$ , ако окръжностите, описани около триъгълниците  $ABC$  и  $ABD$  имат радиуси съответно  $R$  и  $r$ .

18. Даден е квадрат  $ABCD$  с дължина на страната 1 и точка  $M$  върху отсечката  $CD$ .

- a) Да се докаже, че  $\cot \varphi = x^2 - x + 1$ , където  $x = CM$  и  $\varphi = \angle AMB$ .
- b) Да се определят онези положения на  $M$  върху отсечката  $CD$ , при които  $\angle AMB$  е съответно най-малък и най-голям. (Икономически ВУЗ, 1986 г.)

19. В трапец  $ABCD$  с основи  $AB = a$  и  $CD = b$  пресечната точка на диагоналите е  $O$ . Нека  $S$  е лицето на трапеца и  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  са лицата съответно на триъгълниците  $AOB$ ,  $COD$ ,  $AOD$ ,  $BOC$ . Да се докаже, че:

- a)  $S_4 = S_3$ ;
- b)  $S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$ ;
- c)  $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$ .

20. В трапец  $ABCD$  с основи  $AB = a$  и  $CD = b$  пресечната точка на диагоналите е  $O$ . Правата, минаваща през  $O$  и успоредна на основите на трапеца пресича бедрата  $AD$  и  $BC$  съответно в точки  $M$  и  $N$ .

a) Да се намери дълчината на отсечката  $MN$  и да се докаже, че точката  $O$  е средата ѝ.

б) Нека  $P$  и  $Q$  са средите съответно на  $AB$  и  $CD$ , а  $F$  е пресечната точка на правите  $AD$  и  $BC$ . Да се докаже, че точките  $P, O, Q, F$  лежат на една права.

21. Даден е трапец  $ABCD$  с основи  $AB = a$  и  $CD = b$ . Точките  $M$  и  $N$  лежат съответно върху бедрата  $AD$  и  $BC$ , като отсечката  $MN$  е успоредна на основите на трапеца и разположена лицето му. Да се намери дълчината на  $MN$ .

22. Да се пресметне лицето на трапеца  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), ако:

- a)  $AB = 40$ ,  $BC = 20$ ,  $CD = 19$ ,  $AD = 13$ ;
- b)  $AB = 16$ ,  $CD = 5$ ,  $AC = 17$ ,  $BD = 10$ ;
- c)  $AB = 40$  ( $AB > CD$ ),  $AD = 13$ ,  $BC = 20$ ,  $BD = 37$ ;
- d)  $AD = 17$ ,  $BC = 25$ ,  $AC = 17$ ,  $BD = 39$ .

23. Да се пресметне лицето на трапец, ако дълчините на диагоналите му са 13 и 15, а разстоянието между средите на основите му е 7.

24. Да се пресметне лицето на трапец, ако дължините на бедрата му са 7 и 9, разстоянието между средите на бедрата е  $\frac{21}{2}$  и разстоянието между средите на основите му е 4.

25. Нека  $ABCD$  е произволен четириъгълник. Да се докаже, че ако  $AC \perp BD$ , то  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ .

26. Даден е трапец  $ABCD$  с основи  $AB = a$  и  $CD = b$  ( $a > b$ ) и взаимно перпендикулярни диагонали. Пресечната точка на правите  $AD$  и  $BC$  е  $F$  и  $\angle AFB = \alpha$ . Да се намери лицето на трапеца.

27. В равнобедрения трапец  $ABCD$  основата  $AB = a$ , а ъгъл  $DAB$  е равен на  $60^\circ$ . Намерете лицето на трапеца, ако окръжностите, вписани в триъгълниците  $ABC$  и  $ACD$  се допират в точка  $T$ , лежаща на диагонала  $AC$ . (Университет за национално и световно стопанство – София, 1991 г.)

a) Да се докаже, че периметърът на четириъгълника е равен на  $2R[1 + \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)]$ , където  $\alpha = \angle BAD$ ,  $\beta = \angle ABC$ .

b) Ако  $\beta = \alpha$ , да се намери  $\alpha$  така, че периметърът да е най-голям. (Икономически ВУЗ, 1985 г.)

34. В окръжност с радиус 1 е вписан изпъкнал четириъгълник  $ABCD$ , като  $\angle CAD = 30^\circ$  и  $\angle ACB = 60^\circ$ . Да се докаже, че лицето на този четириъгълник е равно на  $2\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(\alpha + 60^\circ)$ , където  $\alpha = \angle BAC$ . За коя стойност на  $\alpha$  лицето е най-голямо? (Софийски университет, 1991 г.)

35. Даден е изпъкнал четириъгълник  $ABCD$ , в който може да се впише окръжност и около който може да се опише окръжност. Диагоналът  $AC$  разположава диагонала  $BD$ .

a) Да се докаже, че  $AB = AD$ ,  $CB = CD$  и  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ .

b) Нека  $AB = x$  и дълчината на радиуса на вписаната в четириъгълника окръжност е 1. Да се докаже, че лицето на четириъгълника е равно на  $\frac{x^2}{x-1}$ . За коя стойност на  $x$  лицето е най-малко? (Икономически ВУЗ, 1988 г.)

## Четириъгълник

28. Точките  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  са средите съответно на страните  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  на четириъгълника  $ABCD$ . Да се докаже, че:

a)  $MNPQ$  е успоредник;

б) лицето на успоредника  $MNPQ$  е равно на половината от лицето на четириъгълника  $ABCD$ ;

в)  $AC^2 + BD^2 = 2(MP^2 + NQ^2)$ .

29. В четириъгълник дължината на единия диагонал е 30, а дълчините на отсечките, съединяващи средите на двойките срещуположни страни са 28 и 26. Да се пресметнат дължината на другия диагонал и лицето на четириъгълника.

30. Страните на четириъгълник  $ABCD$  са  $AB = 1$ ,  $BC = 3$ ,  $CD = 4$ ,  $DA = 6$  и около него може да се опише окръжност. Да се пресметне лицето на четириъгълника.

31. Изпъкналият четириъгълник  $ABCD$  е описан около окръжност с радиус  $R$ . Числата  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{5\pi}{6}$  принадлежат на множеството от мерките на вътрешните му ъгли. Намерете лицето и ъгъла между диагоналите на четириъгълника. (Висш машинно-електротехнически институт – София, 1990 г.)

32. Даден е изпъкнал четириъгълник с взаимно перпендикулярни диагонали, в който е вписана окръжност с радиус  $r$  и около който е описана окръжност с радиус  $R$ .

a) Да се докаже, че един от диагоналите на четириъгълника го разделя на два еднакви правоъгълни триъгълника.

б) Да се пресметне лицето на четириъгълника.

33. В окръжност с радиус  $R$  е вписан четириъгълник  $ABCD$ , като  $AB = 2R$ .

## Многостени

36. В правилна триъгълна пирамида основният ръб има дължина  $a$  и ъгълът между две околни стени има големина  $\beta$ . Да се пресметне обемът на пирамидата.

37. В правилна четириъгълна пирамида ъглите между околна стена и основа и между две съседни околни стени имат големини съответно  $\alpha$  и  $\beta$ . Да се докаже, че  $\cos \beta = -\cos^2 \alpha$ .

38. В триъгълна пирамида  $ABCD$  ортогоналната проекция на върха  $D$  върху равнината  $ABC$  е ортоцентърът на триъгълника  $ABC$ . Да се докаже, че:

a)  $AB \perp CD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $AD \perp BC$ ;

б)  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ .

39. Даден е куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ръб 1 ( $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  са основи, а  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  са околни ръбове). Да се пресметнат:

a) обемът на пирамидата  $ABC_1D$  и разстоянието от точката  $D$  до равнината  $ABC_1$ ;

б) големината на ъгъла между правата  $C_1D$  и равнината  $ABC_1$ . (Икономически ВУЗ, 1985 г.)

40. Даден е куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ръб 1. Да се намерят големината на ъгъла и разстоянието между правите  $AC$  и  $BC_1$ .

41. Всички ръбове на паралелепипед имат дължина 1. Ръбовете от един негов връх два по два склучват помежду си ъгъл с големина  $60^\circ$ . Да се намери обемът на паралелепипеда.

42. В триъгълна пирамида  $ABCD$  ръбът  $CD$  е перпендикулярен на равнината  $ABC$  и  $\angle BDC =$

$\alpha$ ,  $\angle ADC = \beta$ ,  $\angle ADB = \gamma$ . Да се пресметне синусът на ъгъла между равнините  $ABC$  и  $ABD$ .

43. За триъгълна пирамида  $ABCM$  е известно, че четири от ръбовете ѝ имат дължина 1 и ръбът  $CM$  е перпендикулярен на равнината  $ABC$ . Да се пресметнат:

а) обемът и лицето на пълната повърхнина на пирамидата;

б) разстоянието от точка  $C$  до центъра на окръжността, описана около триъгълника  $ABM$ ;

в) тангенсът на ъгъла между равнините  $ABM$  и  $BCM$ . (Икономически ВУЗ, 1984 г.)

44. В триъгълната пирамида  $MABC$  околната стена  $ABM$  е перпендикулярна на равнината на основата  $ABC$ ,  $AM = BM = 1$  и всеки два околни ръба сключват помежду си ъгъл  $60^\circ$ . Пресметнете обема на пирамидата. (Университет за национално и световно стопанство – София, 1991 г.)

45. Околните стени на триъгълна пирамида са равнолицеви триъгълници, а една от тях е перпендикулярна на равнината на основата. Да се пресметне обемът на пирамидата, ако околните ѝ ръбове имат дължина 1.

46. Основата на четириъгълна пирамида

$ABCDM$  е трапец  $ABCD$  с периметър 90 и малка основа  $CD = 18$ . Диагоналът  $BD$  разполовява ъгъл  $ADC$ . Да се намери обемът на пирамидата, ако дължините на всичките ѝ околни ръбове са равни на 20. (Университети, педагогически и технически ВУЗ, 1987 г.)

47. Основата на пирамида е равнобедрен трапец с големина  $\alpha$  на острия ъгъл и дължина  $h$  на височината. Всички околни стени сключват с основата ъгъл с големина  $\beta$ . Да се намерят обемът и лицето на околната повърхнина на пирамидата.

### Сечения

48. Ъгълът между околнна стена и основа на правилна четириъгълна пирамида има големина  $\alpha$ . През основен ръб на пирамидата е прекарана равнина, склучваща с основата ъгъл с големина  $\beta$  ( $0 < \beta < \alpha$ ). Да се намери отношението на лицата на полученото сечение и основата на пирамидата.

49. Дадена е правилна четириъгълна пирамида  $ABCDM$  с основен ръб  $AB = \sqrt{2}$  и околн ръб  $AM = 2$ . Да се пресметне лицето на сечението на пирамидата с равнината, минаваща през върха  $B$  и перпендикулярна на ръба  $DM$ .

50. В триъгълна пирамида  $ABCD$  ръбовете  $AD$  и  $BC$  имат дължини съответно  $a$  и  $b$  и сключват помежду си ъгъл с големина  $\varphi$ . През произволна вътрешна точка  $M$  на ръба  $AB$  е прекарана равнина, успоредна на ръбовете  $AD$  и  $BC$ .

а) Да се докаже, че полученото сечение на пирамидата е успоредник, чието лице  $S$  удовлетворява неравенството  $S \leq \frac{ab}{4} \sin \varphi$ . При кое положение на точката  $M$  се достига равенството?

б) Да се докаже, че точката  $M$  може да са избере така, че сечението да бъде ромб. (Университети, педагогически и технически ВУЗ, 1986 г.)

51. В куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ръб 1 е прекарана равнина, перпендикулярна на диагонала  $B_1D$  и минаваща през средата на ръба  $AA_1$ . Да се пресметне лицето на полученото сечение.

52. Даден е куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  с ръб 1. Да се пресметне лицето на сечението на куба с равнината, определена от точката  $A$  и центровете на квадратите  $BCC_1B_1$  и  $CDD_1C_1$ .

53. Дадена е правилна триъгълна призма  $ABC A_1B_1C_1$  с ръбове  $AB = 6$  и  $AA_1 = 5$ . Точките  $O$  и  $O_1$  са центровете съответно на триъгълниците  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , а точката  $P$  лежи върху отсечката  $OO_1$  и  $OP : PO_1 = 2 : 1$ . Да се пресметне лицето на сечението на призмата с равнината, определена от точката  $P$  и средите на ръбовете  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ .

54. Даден е правоъгълен паралелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , като  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  са основи, а  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  са околни ръбове. Точката  $H$  е ортогонална проекция на върха  $A$  върху равнината  $A_1BD$ . Да се пресметне лицето на сечението на дадения паралелепипед с равнината  $BC_1H$ , ако  $AB = \sqrt{33}$ ,  $AD = 8$ ,  $AA_1 = 8\sqrt{3}$ . (Софийски университет, 1991 г.)

55. Основата на пирамида  $ABCDM$  е изпъкан алчетириъгълник  $ABCD$  със страни  $AB = 5$ ,  $BC = \sqrt{13}$ ,  $CD = \sqrt{5}$ ,  $DA = \sqrt{17}$ . Пресечната точка  $O$  на диагоналите  $AC$  и  $BD$  е ортогонална проекция на върха  $M$  върху основата и  $OM = 4\sqrt{3}$ . Равнината  $\alpha$ , определена от средите на отсечките  $AB$ ,  $AD$  и  $OM$ , склучва с равнината на основата ъгъл  $60^\circ$ .

а) Да се докаже, че  $AC \perp BD$ .

б) Да се пресметне лицето на сечението на пирамидата с равнината  $\alpha$ . (Софийски университет, 1992 г.)

Излезе от печат второ допълнено издание на книгата на

**К. Чакърян и Пл. Сидеров**

**Кандидатстудентски конкурси**

**по математика**

Университетско издателство

"Св. Кл. Охридски"

София 1113, бул. Цариградско шосе 125, бл. 4,  
тел. 73-76-80

# ПРИМЕРНИ ТЕМИ

## ТЕМА 1.

проф. Ив. Райчинов, УНСС

**Задача 1.** Да се намерят стойностите на реалния параметър  $k$ , при всяка от които уравнението  $x^2 - 2kx + k^2 + k - 1 = 0$  притежава два реални корена, от които само един е решение на неравенството  $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x^2 - 3x + 16}{x + 4} \leq 0$ .

**Задача 2.** Мярката на един от ъглите на триъгълник е  $\varphi$ , а радиусите на вписаната и на описаната му окръжности са съответно  $r$  и  $R$ . а) Да се изрази лицето на триъгълника чрез  $r$ ,  $R$  и  $\varphi$ . б) При условие, че  $\varphi$  е корен на уравнението  $\cos^2 \left( \frac{\pi \cos 3x}{3} - \frac{8\pi}{3} \right) = 1$ , а радиусите  $r$  и  $R$  удовлетворяват неравенството  $r^2 + R^2 \leq 2r + 6R - 10$ , да се пресметне числената стойност на лицето на триъгълника.

**Задача 3.** В кълбо с фиксиран радиус  $R$  е вписана правилна триъгълна пирамида. Да се определи отношението на обема на кълбото и обемът на вписаната в него пирамида, ако последната има възможно най-голям обем.

## ТЕМА 2.

доц. Г. Геров, ТУ, София

**Задача 1.** Да се реши уравнението

$$2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 4x = 0$$

**Задача 2.** Да се намери най-голямата стойност на функцията  $f(x) = (2x - 1)/(2 + x^2)$ , когато  $x$  се изменя в множеството от решенията на неравенството  $2|x - a| < 2ax - x^2 - 4$ , където  $a$  е реално неотрицателно число.

**Задача 3.** Даден е равностранен триъгълник  $ABC$  със страна 1. Върху страната му  $AB$  са взети точките  $M$  и  $N$ , така че  $AM = MN = NB$ . През точка  $N$  е прекарана права перпендикулярна на  $AC$ , а през  $B$  – права перпендикулярна на  $BC$ . Ако  $D$  е пресечната им точка, да се намерят ъглите на триъгълника  $MDC$  и лицето на петоъгълника  $CLMDB$ .

**Задача 4.** Даден е куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  ( $ABCD$  е основа, а  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  са околни ръбове) с ръб 1. Точките  $M$  и  $N$  са среди съответно на  $BB_1$  и  $C_1D_1$ . Да се определи мярката на двустенния ъгъл между равнината на основата и равнината определена от точките  $A$ ,  $M$  и  $N$  и да се пресметне лицето на сечението на тази равнина с куба.

## ТЕМА 3.

доц. Вл. Тодоров и гл. ас. П. Стоев, ВИАС

**Задача 1.** а) Да се реши уравнението  $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$ . б) Равносилни ли са уравнение-

то от т. а) и уравнението  $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1 + \operatorname{tg}^2 3x}$ ? Отговорът да се обоснове.

**Задача 2.** Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник е  $h$ . Каква най-малка дължина може да има медианата към по-големия катет?

**Задача 3.** В правилната четириъгълна пирамида  $SABCD$  страната на основата  $ABCD$  е  $a$ , а височината  $SO$  е  $2\sqrt{2}a$ . През върха  $A$  е прекарана равнина  $\alpha$ , успоредна на  $BD$  и сключваща ъгъл  $45^\circ$  с основата на пирамидата. а) Да се намери лицето на сечението на равнината  $\alpha$  с пирамидата. б) Нека  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  са вектори с дължина 1, еднопосочни съответно на векторите  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{OS}$ , а  $\vec{l}$  е вектор с дължина 1, който е перпендикулярен на  $\alpha$  и сключва остър ъгъл с  $\overrightarrow{OS}$ . Да се докаже, че  $\vec{l} = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$ . в) Да се намери ъгълът между правата  $AB$  и равнината  $\alpha$ .

## ТЕМА 4.

доц. Ив. Тонов, ФМИ на СУ

**Задача 1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър  $m$ , за които неравенството  $(m-5)x^2 - 2(m+1)xy - my^2 \leq 0$  е в сила за всяко  $x \geq 1$  и всяко  $y \geq 2$ .

**Задача 2.** Дължината на страната  $BC$  на триъгълника  $ABC$  е равна на 10, а тангенсите на ъглите му се отнасят както следва  $\operatorname{tg} \angle A : \operatorname{tg} \angle B : \operatorname{tg} \angle C = 1 : 2 : 3$ . Да се намерят дължините на останалите две страни.

**Задача 3.** През върха  $A$  и центровете  $K$  и  $L$  съответно на страните  $A_1B_1C_1D_1$  и  $BCC_1B_1$  на куба  $A_1B_1C_1D_1ABCD$  с ръб 1 е прекарана равнина  $\alpha$ . а) Да се намери лицето на сечението на равнината  $\alpha$  с куба. б) Да се намери обемът на тетраедъра  $DKLM$ , където  $M$  е пресечната точка на равнината  $\alpha$  с ръба  $B_1C_1$ .

**Задача 4.** Да се докаже, че уравнението  $\sin ax - a \sin x = (a^2 + 1)x$ , където  $a$  е реален параметър, има единствен реален корен.

### Внимание!

Организира се кандидат-студентски курс по МАТЕМАТИКА с ръководител проф. И. Райчинов (УНСС). Справки и записвали на тел. 70-28-22, вечер.



# ПОДГОТОВКА ЗА ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В ТЕХНИКУМИТЕ И СОУ

В два последователни броя на МАТЕМАТИКА ПЛЮС публикуваме задачи и теми в помощ на всички, които ще се явяват на зреалостен изпит по математика. Ако един зреалостник иска да е спокоен, когато се явява на изпит, той трябва да може да решава тези задачи. Разбира се, ако той е решил само предложените тук задачи и примерни теми, това не означава, че е готов за изпита, а по-скоро че познава сравнително добре основните факти от училищния материал.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС.

## ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

1. Да се решат уравненията:

a)  $\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$

b)  $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+3} = -1$

v)  $2\lg(x+1) - \lg(x-1) = \lg(x+\frac{5}{2}) + \lg 2$

g)  $2.4^x - 2^x - 1 = 0$

d)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

2. Да се решат неравенствата:

a)  $2^{x+2} - 2^{x-1} < 7$

b)  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$

3. Да се решат системите:

a) 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{65}{36} \\ xy = 1 \end{cases}$$
 б) 
$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + y^2 = 9 \\ 5x^2 - 4xy + y^2 = 5 \end{cases}$$

4. Дадена е аритметична прогресия  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

a) Да се докаже, че  $a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0$ .

b) Да се намерят  $n$  и  $a_n$ , ако  $a_1 = 6$ ,  $d = -4$ ,  $S_n = -64$ .

5. Три числа, на които сборът е 74, образуват растяща геометрична прогресия. Ако намалим първото число с 2, трите числа ще образуват аритметична прогресия. Да се намерят числата.

6. Дадено е уравнението  $3\cos^2 x - \sin^2 x = 4m^2 - 1$ , където  $m$  е реален параметър.

a) Да се намери за кои стойности на параметъра  $m$  уравнението има решение.

b) Да се намери най-голямата стойност на функцията  $f(x) = 4x - x^2$  за тези стойности на  $x$ , които са решение на даденото уравнение при  $m = 0$ .

7. Дадена е функцията  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 1$ , където  $a$  е реален параметър.

a) Да се намери за коя стойност на  $a$  функцията  $f(x)$  има локален екстремум в точката  $x = -1$ .

b) Ако  $a > 1$ , да се намерят стойностите на  $a$  при които разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията  $f(x)$  в интервала  $[0; 1]$  е равна на 3.

## ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

8. Даден е триъгълник  $ABC$  с дължини на страните  $AB = 5$  см,  $AC = 3$  см и  $\angle BAC = 60^\circ$ . Да се намери:

a) периметърът на триъгълника  $ABC$ ;

b) дълчината на радиуса на вписаната в триъгълника  $ABC$  окръжност;

v) дълчината на радиуса на описаната около триъгълника  $ABC$  окръжност;

g) стойността на  $\operatorname{tg} \beta$ , където  $\beta = \angle ABC$ .

9. Даден е триъгълникът  $ABC$ , в който  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $r$  е радиусът на вписаната окръжност в триъгълника,  $R$  е радиусът на описаната окръжност около триъгълника  $ABC$  окръжност.

a) Ако  $c = 8$  см,  $\alpha = 60^\circ$  и  $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$  см, да се намерят  $a$ ,  $b$  и  $r$ .

б) Да се докаже, че  $a \cot \alpha + b \cot \beta + c \cot \gamma = 2R + 2r$ .

10. Равнобедрен трапец  $ABCD$  с основи  $AB = a$  и  $CD = b$  е описан около окръжност  $k$  с център  $O$ .

а) Да се докаже, че ако  $h$  е височината на трапеца, то  $h = \sqrt{ab}$ .

б) Окръжността  $k$  се допира до бедрата  $AD$  и  $BC$  съответно в точки  $M$  и  $P$ . Да се намери лицето на  $\Delta MOP$ , ако  $a = 8$  см и  $b = 2$  см.

11. Даден е четириъгълник  $ABCD$ , който е вписан в окръжност.

а) Да се намери диагоналът  $AC$ , страната  $BC$  и радиусът на описаната около четириъгълника окръжност, ако  $AB = AD = 3$  см,  $CD = 8$  см и  $\angle ADC = 60^\circ$ .

б) Да се докаже, че  $BD$  е диаметър на окръжността, ако  $AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2$ .

12. Дадена е правилна четириъгълна призма  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ .

а) Да се докаже, че равнините  $ACD_1$  и  $BB_1D_1$  са перпендикулярни.

б) Да се намери разстоянието от върха  $D$  до равнината  $ACD_1$ , ако околният ръб  $AA_1 = 2\sqrt{7}$  см, а основният ръб  $AB = 4$  см.

в) Да се намери обемът на призмата, ако диагоналът  $AC_1$  има дължина  $d$  и образува с околнна стена ъгъл с големина  $\alpha$ .

13. Дадена е правилна четириъгълна пирамида  $ABCDM$  с основа  $ABCD$  и височина  $h$  см. Точките  $K$  и  $T$  са среди съответно на околните ръбове  $BM$  и  $CM$ , а точките  $P$  и  $Q$  са среди съответно на основните ръбове  $BC$  и  $AD$ . Центърът на описаната окръжност около  $\Delta PMQ$  съвпада с пресечната точка на височината на пирамидата с равнината  $AKTD$ . Двустенният ъгъл определен от равнините  $AKTD$  и  $ABCD$  е  $30^\circ$ .

а) Да се докаже, че равнините  $BCM$  и  $AKTD$  са перпендикулярни.

б) Да се намери обемът на пирамидата  $AKTDB$ .

14. За основа на пирамида служи равнобедрен трапец, малката основа и бедрото на който имат дължина  $b$ , а острият ъгъл на трапеца е  $\alpha$ . Всички околни ръбове на пирамидата образуват с равнината на основата ъгъл с големина  $\beta$ .

а) Да се намери обемът на пирамидата.

б) Да се докаже, че около пирамидата може да се опише сфера и да се намери нейният радиус.

15. Прав кръгов конус с височина  $h$  е пресечен с равнина, която минава през върха му и сключва с равнината на основата на конуса ъгъл  $\alpha$ . Полученото сечение е равностранен триъгълник.

а) Намерете лицето на пълната повърхнина на конуса.

б) Намерете обема на описаното около конуса кълбо.

16. Даден е равнобедрен триъгълник  $ABC$  ( $AC = BC$ ), на който  $AB = 2m$ , а  $\angle CAB = \alpha$ . В триъгълника е вписан успоредник  $AMNF$  ( $M \in AB, N \in BC, F \in AC$ ).

а) Ако  $AF = x$  да се провери дали за лицето  $S$  и периметъра  $P$  на успоредника  $AMNF$  са в сила равенствата  $S = 2mx \cdot \sin \alpha - x^2 \cdot \sin 2\alpha$ ,  $P = 4m + 2x(1 - 2 \cos \alpha)$ ;

б) да се намери периметърът на успоредника  $AMNF$ , когато лицето му е най-голямо.

## ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА ПИСМЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В ТЕХНИКУМИТЕ И СОУ

**Задача 1.** Да се решат уравненията:

а)  $\frac{\lg(14 + \sqrt{2+x})}{\lg \sqrt[3]{18-x}} = 3$

б)  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2,5$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

**Задача 2.** Даден е триъгълник  $ABC$ .

а) Ако  $AB = 10$ ,  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $\operatorname{tg} \beta = 0,75$ , където  $\beta = \angle ABC$ , да се намери разстоянието между центъра на вписаната в триъгълника окръжност и центъра на описаната около триъгълника окръжност.

б) Медианите  $AA_1$  ( $A_1 \in BC$ )  $BB_1$  ( $B_1 \in AC$ ) на дадения триъгълник се пресичат в точка  $G$ . Да се намери лицето на триъгълника  $ABC$ , ако  $AA_1 = m$ ,  $BB_1 = n$  и  $\angle AGB = \varphi$ .

**Задача 3.** Дадена е сфера с радиус  $R$ . Да се намери:

а) лицето на повърхнината на прав кръгов конус вписан в сферата, ако образователната на конуса склучва с височината му ъгъл с големина  $\frac{\alpha}{2}$ .

б) радиусът  $r$  и височината на вписания в сферата прав кръгов конус, който има най-голям обем.

**Задача 4.** Дадена е триъгълна пирамида  $ABCD$ , основата  $ABC$  на която е равнобедрен правоъгълен триъгълник с хипотенуза  $AB = 2$ . Ръбът  $DA$  е перпендикулярен на основата и е с дължина 2.

а) Да се докаже, че околните стени са правоъгълни триъгълници и да се пресметне пълната повърхнина на пирамидата.

б) През точка  $M$  върху отсечката  $AB$ , на разстояние  $\frac{3}{2}$  от  $A$  е прекарана равнина, перпендикулярна на  $AB$ . Да се пресметне лицето на полученото сечение.



# АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛАС в езикови училища, математически гимназии,

техникуми

И в този брой на МАТЕМАТИКА ПЛЮС публикуваме задачи за подготовка на ученици, които ще кандидатстват в езикови училища, математически гимназии и техникуми. Предлагаме ви задачи по алгебра. Те са подбрани и подредени така, че да илюстрират основните факти и "хватки", необходими за изпита.

След задачите по алгебра ви предлагаме примерни изпитни теми (теми ще намерите също и в бр. 3). Първите две от тях са предназначени за езикови и математически гимназии, както и за техникуми с разширено изучаване на западен език. Третата тема е предназначена за техникуми след 8 клас, а след нея публикуваме примерна тема за Националната природо-математическа гимназия. Препоръчваме ви да работите по всяка тема в продължение на 4 часа – толкова, колкото е времето и на самия изпит.

По всички възникнали въпроси можете да се обръщате към редакцията. Ние сме готови да ви помогнем за успешното ви представление на изпита.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС!

## ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

Антоанета Георгиева, учителка във II Англ. гимназия, София

Иван Георгиев, учител в I Англ. Гимназия, София

Николай Райков, главен експерт по математика в МНО

1. Да се опростят изразите:

- a)  $(9a^2b^3 - 12a^4b^4) : 3a^2b - (2 + 3a^2b) \cdot b^2 + 7a^2b^3$   
б)  $2a^4 + (a^4 + b^2c^3)^2 - [(a^4 + b^2c^3)^3 - (a^6 - a^2b^2c^3)^2] : b^2c^3$

2. Разложете на множители:

- a)  $a^m + a^{m+1}$   
б)  $a^{2m+1} - 4a^{2m-1}$   
в)  $a^{m+1} - 25a^{m+3}$

3. Да означим:  $A = a^3 + 3a^2 + 2a$ .

а) Да се разложи  $A$  на множители

б) Да се докаже, че ако  $a$  е цяло число, то  $A$  се дели на 6

в) Да се докаже, че изразът  $V = \frac{a^3}{6} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{3}$  е цяло число.

4. Да означим:  $A = a^3 + 3a^2 - a - 3$ .

а) Да се разложи  $A$  на множители

б) Да се докаже, че ако  $a$  е нечетно число ( $a > 1$ ), то  $A$  се дели на 48

в) Да се докаже, че изразът  $V = \frac{a^2 - 1}{4^2} - \frac{a - a^3}{48}$  е цяло число, ако  $a$  е нечетно число.

5. Да означим:  $A = a^5 - 5a^3 + 4a$

а) Да се разложи  $A$  на множители

б) Да се докаже, че ако  $a$  е цяло число, то  $A$  се дели на 120

в) Да се докаже, че изразът  $V = \frac{a^5}{120} + \frac{a}{30} - \frac{a^3}{24}$  е цяло число.

6. Да се докаже, че ако от произволно трицифрено число извадим числото, записано със същите цифри, но в обратен ред, то полученото число се дели на 99 без остатък.

7. Нека с  $A$  означим произведението на две двуцифренни числа, а с  $B$  означим произведението на числата, записани със същите цифри, но в обратен ред. Да се докаже, че  $A - B$  се дели на 99.

8. а) Да се разложи на множители многочленът:

$$ab^2 - b^2c + ca^2 - a^2b + bc^2 - c^2a$$

б) Да се докажат тъждествата:

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

9. Решете уравненията:

а)  $x^2 = 3(2x - 3)$

б)  $(x+2)^3 - x(x-2)^2 = 8$

в)  $\frac{1\frac{2}{3}x - 5}{4} - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{2-x}{2}\right) = 3x + \frac{5}{6}$

г)  $x^2 + \frac{-3x+2}{-2} - 0,5 = (2x+3)\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

д)  $x(4-x) = 3x - (x-0,5)^2$

10. Решете неравенствата:

а)  $\frac{5+9x}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{6+8x}{2} \leq x$

б)  $(x-3)^2 - 2(2+x)(x-5) + (x+5)^2 > 10x$

в)  $(x^2-x-1)^2 - (x-1)^2(x+1)^2 > 2x(1-x)(1+x) + x^2$

11. а) Да се разложи на множители изразът:

$(a^3 + a^2 - a - 1)^2 - (a^3 - a^2 - a + 1)^2$

б) ако  $a$  е неотрицателно число, да се докаже, че:

$$(a^3 + a^2 - a - 1)^2 \geq (a^3 - a^2 - a + 1)^2$$

12. Да се докаже еквивалентността на уравненията (неравенствата):

а)  $3(x-1)^2 + (2-3x)^2 - 9(x^2 - 1) - 1 = 3(x^2 - 6x + 5)$

и  $\frac{x-1}{7} - \frac{5-12x}{14} = \frac{2x-1}{2}$ ;

б)  $(1-6x)(3x+4) - 18x(1-x) < 4 - 39x$  и

$(3x-4)^2 - 3x(3x-8) \leq 3$

13. Да се намерят целите отрицателни числа, които са решения на неравенствата:

а)  $\frac{2(x+1)^2 + 5}{2} - \frac{1-x}{3} > x^2 - 9x + 256$

б)  $(3+2x)(2x+1) - 4(x+1)(x+2) \leq 15$

14. Решете модулните уравнения:

а)  $|(2x+1+4x^2)(2x-1) + x - 8x^3| - 2|x-1| = -6$

б)  $|4 - |3 - x|| = 2$

в)  $\frac{1+4x}{2} - 2|x| = \frac{3-2x}{6} + 1$

г)  $|x-1| - 1 = 2 - x$

15. Решете параметричните уравнения:

а)  $(a^2 + 1)x = a + 3$

б)  $a^3x - a = ax - 1$

в)  $ax + 1 = b + 2x$

г)  $|1 - 2ax| = 3$

д)  $|ax - 1| = a - 2$

16. За кои стойности на параметъра  $a$ :

а) уравнението  $5(ax+2) = 2(2ax+1)$  има за корен цяло число?

б) уравненията  $|1-x| + x^2 - 7x + 10 = 0$  и  $2ax + 5 = x - 4a$ , са равносилни, ако  $x > 1$ ?

17. Да се намерят стойностите на параметъра  $a$ , за които графиките на функциите  $f_1(x) = x - 2$ ;  $f_2(x) = -3x + 2$  и  $f_3(x) = ax - 5$  се пресичат в една точка. Да се определят координатите на тази точка.

18. Графиките на функциите  $y = 3$  и  $y = 2a + x$  се пресичат в точка  $M$  с абсциса  $(-1)$ . Да се построят графиките на двете функции и да се намери лицето на четириъгълника, заключен между тези графики и координатните оси.

19. Дадена е линейна функция  $f(x) = ax - b$ , минаваща през точката  $M(-1; 2)$  и пресичаща ординатната ос в точката  $N(0; 3)$ :

а) Да се намери  $f(x)$ .

б) Да се построи графиката на функцията и да се намерят координатите на пресечните ѝ точки с абсцисната и ординатната оси.

в) Да се реши неравенството  $f(f(x+3)) - 2x \leq 1$

20. Дадени са функциите:  $f(x) = x^3 - 2x^2$  и  $g(x) = 4x - 8$ :

а) да се разложи на множители изразът:  $f(x) - g(x)$ ;

б) да се докаже, че ако  $x > 2$ , то  $f(x) > g(x)$ ;

в) да се докаже, че ако  $x < -2$ , то  $f(x) < g(x)$ ;

21. Шифрата на единиците на едно двуцифренено число е с 3 по-голяма от цифрата на десетиците му. Ако разделим числото със сумата от цифрите му, ще получим частно 3 и остатък 4. Кое е това число?

22. Моторна лодка изминала 15 км по течението и 10 км срещу течението на една река общо за 1 ч. 40 мин. Известно е, че скоростта на течението е 20% от собствената скорост на лодката.

а) Да се намери скоростта на лодката по течението и срещу течението на реката.

б) Да се намери за колко време лодката ще настигне сал, тръгнал от същото пристанище 20 мин. по-рано.

в) На колко километра най-много може да се отдалечи лодката от дадено пристанище на реката, за да може да се върне в пристанището, без да спира, не по-късно от 2 ч. 30 мин. от момента на тръгването?

23. В 8 ч. от гара  $A$  тръгва влак за гара  $B$ , а в 9 ч. 15 мин. същия ден от гара  $B$  за гара  $A$  тръгва друг влак, скоростта на който е 0,8 от скоростта на първия влак. Ако е известно, че първият влак пристига на гара  $B$  в 16 ч. (същия ден), да се намери в колко часа двата влака са се срещнали и колко часа е пътувал всеки от тях.

24. От един град тръгнал автомобил, който всеки час изминавал по  $v_1$  км. След  $t$  часа от съ-

щия град по същия път тръгнал друг автомобил, който на час изминавал по  $v_2$  км. След колко часа от тръгването си вторият автомобил е настигнал първия, ако е известно че  $v_2$  е по-голямо от  $v_1$ ?

25. В един киносалон продали определен брой билети за 4 дни. Първия ден продали  $4/15$  от тях, а втория ден – с 5% повече, отколкото през първия ден. Останалата част от билетите продали през другите два дни поравно. Колко билета са били продадени общо, ако се знае, че продадените билети през третия ден били с 48 по-малко, отколкото през първия ден.

26. В един склад имало 21 тона жито, а в друг 18 тона жито. В първия склад почнали да докарват всеки ден по 9 тона жито, а във втория 12 тона жито. След колко дни в първия склад житото ще бъде 1,2 пъти по-малко, отколкото житото във втория склад.

27. Тракторна бригада трябвало да изоре един блок за определено време, като всеки ден изорава по 360 дка. Бригадата преизпълнила тази норма с  $16\frac{2}{3}\%$  и за последния ден останали за изораване само 60 дка.

a) Колко декара е целият блок?

b) За колко дни е изоран блокът?

v) За колко дни най-малко ще бъде изоран блокът, ако на ден бригадата изорава най-много по 270 дка?

28. Един работник може да свърши една работа за 8 дни, а друг за същото време свършива  $66\frac{2}{3}\%$  от нея. Двамата работници започнали едновременно да работят и работили заедно няколко дни. Останалата част от работата първият работник довършил сам за 3 дни. Колко дни всичко е работил първият работник?

29. Един резервоар се пълни от една тръба за  $a$  часа ( $a > 1$ ), а се изprasва от друга за  $b$  часа. Един час след пускането на първата тръба (която пълни басейна) е пусната и втората. Колко време след пускането на втората тръба се е напълнил резервоарът?

30. Парче желязо и парче мед тежат общо 1280 г, при което обемът на парчето мед е два пъти повече от обема на парчето желязо. Да се намерят обемите на двете парчета, ако относителното тегло на желязото е  $7,8 \text{ г}/\text{см}^3$ , а относителното тегло на медта е  $8,9 \text{ г}/\text{см}^3$ .

31. Дадени са две сплави от злато и сребро. В едната количеството на тези метали се намира в отношение 2:3, а в другата в отношение 3:7. По колко килограма трябва да се вземат от всяка сплав, за да се получат 8 кг нова сплав, в която златото и среброто се намират в отношение 5:11.

32. Колко калай трябва да се прибави към 2 кг сплав от мед и калай, в която калаят е 12%, за да се получи сплав с 20% калай в нея? Най-малко какво количество мед трябва да се добави към получената сплав, за да се получи сплав, в която калаят е най-много 11%?

33. За технически цели към  $a$  литра вода добавили  $b$  литра  $p\%$  сърна киселина. Определете колко процента киселина съдържа полученият разтвор. Колко литра чиста киселина трябва да добавим към тази смес, за да се получи  $p\%$  сърна киселина?

## ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТВАНИЕ СЛЕД 7 КЛАС

### Тема 1

Ирина Шаркова и Румяна Караджова,  
учителки по математика в СМГ

Задача 1. Дадено е уравнението  $a^2(x-1) = a(3-x) + 6x$ , където  $a$  е параметър.

a) Решете уравнението и намерете за кои естествени числа  $a$  корените на уравнението са цели числа.

b) Намерете за кои стойности на  $a$  целите неположителни решения на неравенството

$$\frac{(x+1)^2}{3} + 2x - \frac{(2x-1)^2}{2} > \frac{x(4-5x)}{5} - 1$$

са решения на уравнението.

Задача 2. Всяка сутрин автобус тръгва от  $A$  в 7 ч. 10 мин. и изминава разстоянието до  $B$  със средна скорост 60 км/ч. Един ден, след като изминал  $\frac{3}{5}$  от цялото разстояние, автобусът направил непредвиден престой от 11 мин. Оставащата част от пътя била с 11 км по-дълга от 30% от разстоянието между  $A$  и  $B$ . Шофьорът на автобуса увеличил скоростта и пристигнал навреме в  $B$ .

a) Намерете разстоянието от  $A$  до  $B$  и увеличението на скоростта в м/сек.

b) С колко най-много км/ч. шофьорът е могъл да увеличи скоростта, за да пристигне в  $B$  не по-рано от 9 ч. 7 мин.

Задача 3. Даден е триъгълник  $ABC$ , за който  $\angle ABC = 30^\circ$ . Симетралата на отсечката  $AB$  пресича страната  $BC$  в точката  $M$ , като  $\angle CAM = 40^\circ$ .

a) Докажете, че разстоянието от  $C$  съответно до симетралата на страната  $AB$  и до правата  $AM$  са равни.

b) Ако  $BC = 10$  см и разстоянието от  $M$  до страната  $AB$  е 3 см, изразете чрез  $a$  лицето на триъгълника  $ACM$ , където  $AB = a$  см.

Задача 4. Даден е ромб  $ABCD$ . Ъглополовящата на  $\angle DCA$  пресича диагонала  $BD$  под ъгъл  $60^\circ$ .

- а) Намерете ъглите на ромба.  
 б) Ъглополовящата на  $\angle DCA$  пресича правата  $AB$  в точката  $S$ . Нека  $a$  е права през  $S$ , успоредна на  $AD$  и нека  $N$  е средата на отсечката  $AS$ . Докажете, че точките  $A, C$  и  $Q$  лежат на една права, където  $Q$  е пресечната точка на правите  $DN$  и  $a$ .

## Тема 2

и.с. кпн Петя Асенова, Научно-изследователски национален център за образование и наука

### Задача 1. Дадена е функцията

$$f(x) = x + k(3x + 1),$$

чиято графика минава през точката  $A(0; 1)$ .

- а) Постройте графиката на функцията за  $-1 \leq x \leq 1$ .

- б) Намерете пресечните точки на графиката на  $f(x)$  с координатните оси и стойностите на  $x$ , за които  $f(x) < 2$ .

**Задача 2.** Една кола се движи от  $A$  до  $B$  с постоянна скорост 60км/ч., а от  $B$  до  $A$  с постоянна скорост 100 км/ч. Друга кола се движи от  $B$  до  $A$  с постоянна скорост 80 км/ч., а от  $A$  до  $B$  с постоянна скорост 120 км/ч.

- а) Намерете средните скорости на двете коли.  
 б) Намерете разстоянието от  $A$  до  $B$ , ако колата от  $A$  пристига в  $B$  и без да спира тръгва за  $A$ , а колата от  $B$  пристига в  $A$  и без да спира тръгва за  $B$ , като втората среща на двете коли става на 20 км от  $B$ .

**Задача 3.** В правоъгълника  $ABCD$  през пресечната точка на диагоналите е прекаран перпендикуляр към  $AC$ , който пресича страната  $AB$  в точката  $M$ . Намерете ъгъла между диагоналите на правоъгълника, ако:

- а)  $MB = BC$ ;    б)  $AM = 2MB$ .

**Задача 4.** Нека  $AB$  е най-голямата страна в триъгълника  $ABC$  и  $h$  е дължината на височината към нея. Върху страната  $AB$  е взета точката  $D$ , различна от  $A$  и  $B$ . Нека  $h_1$  и  $h_2$  са дължините на височините през  $D$  съответно в триъгълниците  $ACD$  и  $BCD$ .

- а) Да се докаже, че  $h_1 + h_2 \geq h$ .  
 б) Определете кога  $h_1 + h_2 = h$ .

## ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТВАНИЕ СЛЕД 8 КЛАС

и.с. кпн Петя Асенова, Научно-изследователски национален център за образование и наука

### Задача 1. а) Решете неравенството

$$\frac{(x+1)^2(x-\frac{1}{2})}{(5x^2+8)(\sqrt{5}-x)} \geq 0.$$

### б) Решете системата

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{a}{y} = -2 \\ \frac{ax}{a+y} = 1 \end{array} \right. , \text{ където } a \text{ е параметър.}$$

**Задача 2.** В една фабрика работят  $a$  работници. Част от тях произвеждат изделия от един вид, а останалите произвеждат изделия от втори вид. За един ден всичките работници произвеждат общо  $a$  изделия. Известно е, че за производството на едно изделие от първия вид за един ден са нужни  $t$  работника. Освен това един работник за един ден произвежда  $m$  изделия от втория вид.

- а) Съставете модел за намиране на броя на работниците, които произвеждат изделия от първия вид.

- б) Намерете броя на работниците, които произвеждат изделия от втория вид, ако  $m \neq 1$ .

**Задача 3.** Даден е правоъгълен триъгълник  $ABC$  с прав ъгъл при върха  $C$  и най-малка страна  $BC$ . Върху хипотенузата е избрана точката  $P$  така, че  $BP = BC$ .

- а) Да се докаже, че триъгълникът  $POC$  е равнобедрен, ако  $O$  е центърът на вписаната в  $\Delta ABC$  окръжност.

- б) Да се намери радиусът на описаната около  $\Delta ABC$  окръжност, ако  $\angle BAC = 30^\circ$ ,  $AC = 4\sqrt{3}$  см и периметърът на  $\Delta ABC$  е  $4(\sqrt{3} + 3)$  см.

**Задача 4.** а) Даден е триъгълник  $ABC$  и точка  $M$ , вътрешна за него. Ако  $M_1$  е централно симетричната на  $M$  спрямо средата на  $AB$ ,  $M_2$  е централно симетричната на  $M_1$  спрямо средата на  $BC$  и  $M_3$  е централно симетричната на  $M_2$  спрямо средата на  $AC$ , да се докаже, че върхът  $A$  разположава отсечката  $MM_3$ .

- б) Даден е четириъгълник  $ABCD$  и точка  $M$ , вътрешна за него. Ако  $M_1$  е централно симетричната на  $M$  спрямо средата на  $AB$ ,  $M_2$  е централно симетричната на  $M_1$  спрямо средата на  $BC$ ,  $M_3$  е централно симетричната на  $M_2$  спрямо средата на  $CD$  и  $M_4$  е централно симетричната на  $M_3$  спрямо средата на  $AD$ , да се докаже, че точките  $M$  и  $M_4$  съвпадат.

## ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА НАЦИОНАЛНАТА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

Надка Попова, учителка по математика, НПМГ  
 I изпит (за всички специалности)

$$\text{Задача 1. Дадени са функциите } f(x) = \frac{x + \frac{1}{0,5}}{2}$$

и  $g(x) = 3 - x$ . Начертайте (в една и съща координатна система) графиките на двете функции и определете:

- а) координатите на пресечната точка на двете графики;  
 б) лицето на триъгълника, ограничен от графиките и абсцисната ос;  
 в) за коя стойност на параметъра  $a$  уравнението  $a \cdot f(x) = g(x)$  няма решение.

**Задача 2.** Известно е, че три лъва ядат колкото четири тигъра, а пет тигъра за шест дни изядват 45 кг месо.

- а) Колко месо седмично трябва за изхранването на един лъв?  
 б) В един зоопарк тигрите са с един по-малко от лъвовете. Колко са лъвовете, ако общото количество месо, изяддано дневно от лъвовете и тигрите, е 9 килограма?

**Задача 3.**  $\triangle ABC$  е правоъгълен ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) с височина  $CH$  ( $H \in AB$ ). Върху правата  $CB$  е построена точка  $M$  такава, че  $BM = AB$  и  $B$  е между  $C$  и  $M$ . Нека  $K$  е пресечната точка на  $CH$  и  $AM$ .

- а) Докажете, че  $AM$  е успоредна на ъглополовящата на  $\angle ABC$ .  
 б) Докажете, че  $\triangle CAK$  е равнобедрен.  
 в) Ако  $\angle CAB = 30^\circ$ , намерете  $AH : AB$  и докажете, че  $S_{ACK} = \frac{3}{2}S_{ABC}$ .

## II изпит

(за специалност математика и информатика)

**Задача 1.** Нека  $f(x) = \frac{2-x}{3}$ ,  $n = \frac{8^4 \cdot 3^{12} + 6^{11}}{4^5 \cdot 9^5 + 6^9 \cdot 120}$ , а  $p$  е такова число, че  $0,6 : \frac{4}{3}p = \frac{3}{14} : 4\frac{2}{7}$ .

За кои стойности на  $x$

- а)  $|f(3x) - 3| = n$ ;  
 б)  $[f(x)]^2 = p$ ;  
 в)  $[f(x)]^2 \leq 2 \cdot f(x) - 1$ .

**Задача 2.** От десетлитров съд, пълен с 50%-ов разтвор на спирт във вода, на два пъти отливали по един литър и доливали съда с вода. Определете

- а) процентното съдържание на спирта в получения разтвор;  
 б) с колко литра спирт трябва да се смеси полученият разтвор, за да се получи отново 50%-ов разтвор.

**Задача 3.** Отсечките  $AQ$  ( $Q \in BC$ ) и  $BP$  ( $P \in AC$ ) са височини на остроъгълния триъгълник  $ABC$ . Ако  $\angle ACB$  е равен на  $60^\circ$  и  $O$  е средата на  $AB$ , докажете че

- а)  $\triangle POQ$  е равностранен;  
 б) периметърът на  $\triangle ABC$  е два пъти по-голям от периметъра на  $\triangle PQC$ ;  
 в)  $CO < \frac{1}{2}(CA + CB)$ .

## НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ "АКАД. Л. ЧАКАЛОВ"

Националната природо-математическа гимназия е средно учебно заведение, асоциирано към Софийския университет "Св. Климент Охридски". Обучението е петгодишно със засилено изучаване на английски език. В гимназията могат да кандидатстват ученици от цялата страна, завършили седми клас. Приемат се 7 паралелки с по 26 ученика в следните профили: **математика и информатика** – 2 паралелки, **физика** – 1 паралелка, **химия** – 1 паралелка, **биология и биотехнологии** – 2 паралелки, **науки за земята** – 1 паралелка. Класирането се извършва въз основа на два писмени изпита: по математика и по специалния предмет. Балът е равен на сумата от оценката по балообразуващ предмет от свидетелството за завършен седми клас, оценката от изпита по математика и удвоената оценка от писмения изпит по профилирания предмет. Изпитът по математика за всички профили ще се проведе на 1 юли 1994 г. Този изпит е задължителен за всички кандидати и за него не се признават оценки от други изпити.

ПРОФИЛ	ИЗПИТ		БАЛООБРАЗУВАЩ ПРЕДМЕТ
	СПЕЦИАЛЕН ПРЕДМЕТ	ДАТА	
математика и информатика	математика	9 юли 1994	математика
физика	физика	7 юли 1994	физика
химия	химия	8 юли 1994	химия
биология и биотехнологии	биология	4 юли 1994	биология
науки за земята	география	5 юли 1994	география

На първенците от регионалните олимпиади по математика, физика и химия се признава оценка отличен от изпита по специалния предмет. Класиралите се на първите три места на очния (III кръг) на състезанието по математика "РИКИ" ще имат право да се запишат без конкурсен изпит в Националната природо-математическа гимназия.

Кандидатите подават документи в сградата на гимназията, намираща се в община "Лозенец", ул. "Бигла" № 52 от 20 до 24 юни включително от 9 до 17 часа.

Конспекти за изпитите и повече подробности за начина на приемане могат да се получат в канцеларията на гимназията след 1 април 1994 г. (тел. 62-83-63 и 62-82-63).



## АКО КАНДИДАТСТВАТЕ В АМЕРИКАНСКИЯ КОЛЕЖ

Американският колеж в София възстанови дейността си през 1992 г. Тази година колежът ще приеме трети випуск на основата на приемен изпит. Кандидатите трябва да са завършили 7-ми клас през 1994 г. и да имат

среден успех от последната година не по-нисък от мн. добър 5.00. Предлагаме ви примерен тест по математика от 25 въпроса. Времето за работа е 25 минути. Самият изпит съдържа два такива теста.

### ПРИМЕРЕН ТЕСТ

Донка Гълъбова, София

Към всеки от въпросите с номера от 1 до 10 има 5 отговора. Решете всяка от задачите наум или на чернова хартия. Сравнете получения резултат с предложените отговори и определете кой от тях е верен.

1. На Лиди не ѝ достигат 7 лева, за да купи сладолед, а на Вили не ѝ достига 1 стотинка. Ако съберат заедно парите си, пак не могат да купят сладолед. Цената на сладоледа в левове е:

(A) 10 (B) 7,01 (C) 6,99 (D) 7 (E) 5

2. До третия етаж на една къща има 36 стъпала. Колко стъпала има до шестия етаж на къщата (стълбите започват на нивото на първия етаж и между два съседни етажа има по равен брой стъпала)?

(A) 72 (B) 60 (C) 70 (D) 90 (E) 86

3. За едно пране с автоматична пералня домакиня използва 220 g прах. Колко най-много пъти домакинята може да пере с 2 kg прах?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 11 (E) 9

4. Търговец купува сирене по 64 лв. и го продава по 72 лв. Печалбата му в проценти е:

(A) 12,5 (B) 11 (C) 88 (D) 125 (E) 8,8

5. Произведенето  $1,005 \cdot 20,0025 \cdot 0,01$  е най-близко до:

(A) 0,02 (B) 0,2 (C) 2,0 (D) 20 (E) 200

6. Средното аритметично на 5 числа е 13.

Средното аритметично на тези пет числа и числото 7 е:

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 10 (E) 7

7. Ако едно число се дели на 104, то винаги се дели и на:

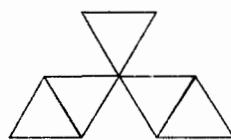
(A) 10 (B) 17 (C) 105 (D) 9 (E) 2

8. Една капка вода тежи приблизително  $0,08 \text{ kg}$ . Колко капки има в  $1 \text{ dm}^2$  вода?

(A) 125 (B) 1250 (C) 12500 (D) 125000  
(E) 1250000

9. Всички триъгълници на фигурата са еднакви и равностранни със страна 3 см. Периметърът на фигурата е:

- (A) 15  
(B) 45  
(C) 33  
(D) 36  
(E) 32

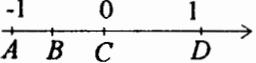


10. Ако  $x$  е с 2 по-малко от  $y$  и  $x$  и  $y$  са цели числа, по-големи от 3 и по-малки от 7, то  $x+y =$

(A) 9 (B) 11 (C) 10 (D) 12 (E) не може да се определи

Всеки от въпросите с номера от 11 до 20 се състои от две части. Едната част е дадена в колона А, а другата част – в колона В. Сравнете двете части и срещу всеки въпрос напишете (A), ако частта в колона А е по-голяма; (B), ако частта в колона В е по-голяма; (C), ако двете части са равни; (D), ако няма достатъчно информация, за да бъде определен отговорът.

Забележка: 1. Информацията, дадена по средата важи и за двете колони. 2. Ако една буква участва и в двете колони, то тя означава едно и също число.

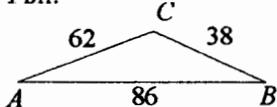
Колона А	Колона В
11. $(n+1)^2$	$n \neq 0$
12. Броят на положителните цели делители на 17.	Броят на положителните цели делители на 29.
13. Лицето на квадрат с периметър 28 см	Лицето на правоъгълник с дължина 7 см
14.	

*A, B, C и D са точки от числовата ос, показани горе.*

BD	AC + BC
15. $\frac{2}{3}\%$ от 150	150% от $\frac{3}{2}$
16. Димитър купил няколко молива и една гума от 4 лева. Дал банкнота от 50 лева и му върнали толкова, колкото стрували моливите. Стойността на цялата покупка.	28
17. 0,9	$\frac{8}{9}$

18.

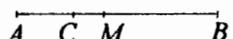
$\triangle ACB$  е тъп.



AB + BC	два пъти дълчината на AC
19. Ако $x$ и $y$ са реални числа, определяме $x \star y = (2x+y)^2 - 157$	$1 \star 6$
20. Георги е на $x$ години. Иван е с $y$ години по-голям от него.	$y - x$

**Към всеки от въпросите с номера от 21 до 25 има 5 отговора. Решете всяка от задачите наум или на чернова хартия. Сравнете получения резултат с предложените отговори и определете кой от тях е верен.**

21. По време на буря Никола видял светковица и 5 секунди след това чул гърмеж. На какво разстояние от Никола е блеснала светковицата, ако скоростта на звука е  $320 \text{ m/sec}$  (практически светлината се разпространява мигновено)?  
 (A)  $64 \text{ km}$  (B)  $640 \text{ km}$  (C)  $1,2 \text{ km}$  (D)  $1,6 \text{ km}$  (E)  $1,5 \text{ km}$
22. Закуската на Калин е с  $50\%$  по-скъпа от тази на Огнян. С колко процента закуската на Огнян е по-евтина от тази на Калин?  
 (A) 35 (B) 60 (C)  $33\frac{1}{3}$  (D)  $27\frac{1}{4}$  (E) 50
23. Кой е следващият член на редицата 2, 3, 4, 9, 8, 27, 16, ...?  
 (A) 81 (B) 72 (C) 54 (D) 36 (E) 33
24. Точката  $M$  е средата на отсечката  $AB$ ,  $AC = 10 \text{ cm}$ ,  $BC = 30 \text{ cm}$ . Дължината на  $CM$  в см е:

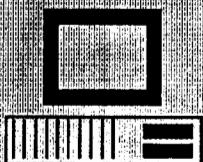


Излезе от печат книгата

## ECE ТЕСТ

на издателство ВЕДИ.

Тя е предназначена за подготовка на кандидатстващите в Американския колеж, София. Книгата съдържа: ECE – основни характеристики, методични указания и примерни есета. ТЕСТ – три пълни теста с решения. За справки и поръчки: тел. (02) - 42-97-91.



# М + КОМПЮТЪР

## ЛЕСНО ЛИ СЕ ПОКОРЯВАТ КРЕПОСТИ В ГЕОМЛАНДИЯ

Божидар Сендов, Факултет по математика и информатика при СУ  
Евгения Сендова, Институт по математика при БАН

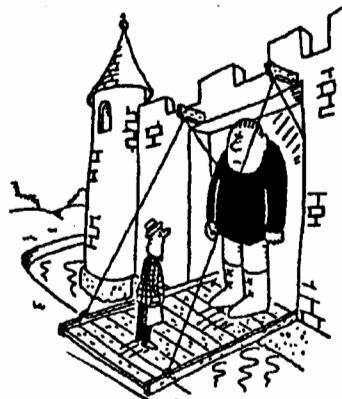
ТЪРСИ СЕ ... АВТОРЪТ

на следната задача:

*В кръгла крепост ( $C$ ) с радиус  $R$  е поставено старинно оръдие в точка  $P$ , различна от центъра. Да си представим, че оръдието изстреля гюллета, които след като се отразят от стена на крепостта, спират в такава точка, че изминатият от тях път при всеки изстрел да бъде  $2R$ . Пита се каква фигура ще образуват гюллетата, изстреляни от оръдието, след едно негово пълно завъртане.*

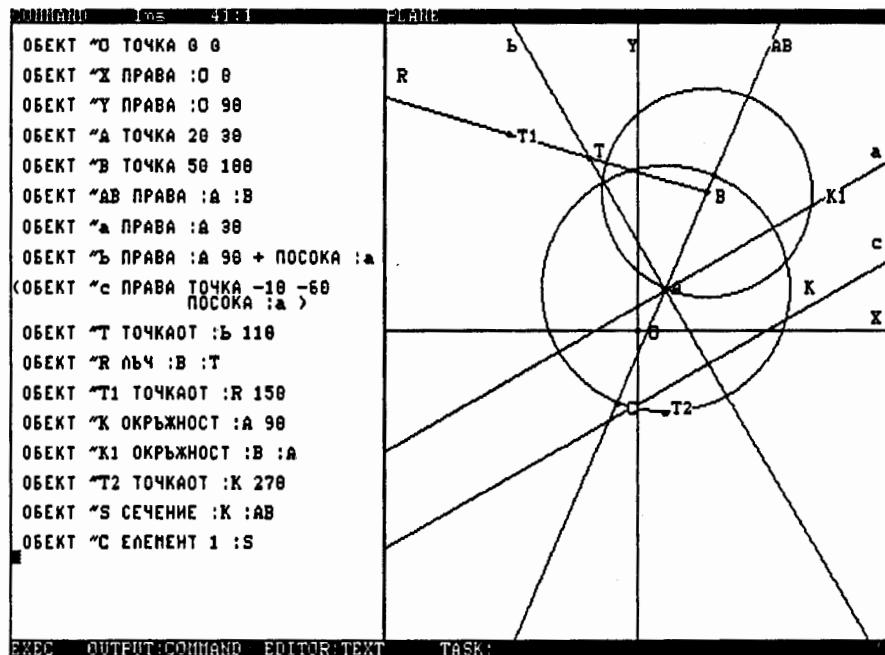
Тази задача ни бе предложена от Иван Тонов (специалист по математически предизвикателства) като пример за интересно геометрично място. Той пък я бе научил от един ученик от Варна, изявен олимпиец, който се славел не само със способността си да решава, но и да съставя задачи. Ше се радваме, ако той е между читателите на МАТЕМАТИКА ПЛЮС и ни се обади, за да разберем най-после отговора на въпроса: КОЙ Е АВТОРЪТ НА ТАЗИ ЗАДАЧА?

Понеже нямахме под ръка автентична атмосфера за експерименти (крепост и оръдие), решихме да моделираме ситуацията в подходяща компютърна среда - системата ПЛАНИМЕТРИЯ, или както вече я наричаме: ГЕОМЛАНДИЯ.



### КАКВО ПРЕДСТАВЛЯВА ГЕОМЛАНДИЯ?

Името ѝ подсказва, че става дума за "страна на геометрията". Това е един вид математическа лаборатория, в която могат да се конструират планиметрични обекти (точки, прави, окръжности, отсечки, лъчи и пр. и множества от такива обекти), да се изследват свойствата им, да се правят различни експерименти, да се формулират и проверяват хипотези. ГЕОМЛАНДИЯ може да се разглежда като надстройка на езика за програмиране ЛОГО - запазен е синтаксисът на този език и всички характерни команди, свързани с техниката на програмирането, но към тях са добавени специфични команди и операции за конструиране и изследване на планиметрични обекти. Основните команди за построяване на обекти и операциите за изследване на компонентите им носят традиционните за планиметрията имена (ТОЧКА, ПРАВА, ОТСЕЧКА, ЛЪЧ, ОКРЪЖНОСТ, ПОСОКА, ДЪЛЖИНА, АБСЦИса, ОРДИНАТА, СЕЧЕНИЕ) и затова дори неизкушените в програмирането читатели лесно ще отгатнат значението им. Ето няколко примера от езика на ГЕОМЛАНДИЯ:



- ОБЕКТ "А ТОЧКА 20 30      Конструира се точка А с координати (20, 30).  
 ОБЕКТ "В ТОЧКА 50 100      Конструира се точка В с координати (50, 100).  
 ОБЕКТ "AB ПРАВА :A :B      Конструира се права, минаваща през точките А и В.  
 (Тази права всъщност е ос с начало А и ПОСОКА от А към В).  
 ОБЕКТ "a ПРАВА :A 30      Конструира се права а, която минава през точката А и  
 сключва ъгъл 30 градуса с положителната част на оста Ox  
 (ъглите се мерят в посока, обратна на часовниковата стрелка).  
 ОБЕКТ "о ТОЧКА 0 0      Конструира се  
 ОБЕКТ "x ПРАВА :0 0      координатната  
 ОБЕКТ "y ПРАВА :0 90      система.

А сещате ли се как може да се конструира права през А, която е перпендикулярна на правата а? Разбира се, посоката ѝ ще се определя от ъгъл с 90 градуса по-голям (или по-малък) от ъгъла, определящ посоката на а:

ОБЕКТ "b ПРАВА :A 90 + ПОСОКА :a

Да прекараме права през точка с дадени координати, например (-10, -60), можем и без предварително да конструираме точката:

ОБЕКТ "с ПРАВА ТОЧКА -10 -60 ПОСОКА :a

Конструираната права минава през точката (-10, -60) и има посоката на правата а.

Върху правите можем да избираме точки на дадено разстояние от началото (в положителна или отрицателна посока):

ОБЕКТ "т ТОЧКАОТ :b 110

По същия начин могат да се конструират лъчи и да се избират точки върху тях:

ОБЕКТ "R ЛЪЧ :B :t

Построеният лъч R има начало точката В и посока от В към т.

ОБЕКТ "T1 ТОЧКАОТ :R 150

Окръжностите се конструират по точка и радиус или по две точки (център и точка от окръжността):

ОБЕКТ "K ОКРЪЖНОСТ :A 90

Конструира се окръжност с център точката А и с радиус 90 мерни единици.

ОБЕКТ "K1 ОКРЪЖНОСТ :B :A

Окръжността K1 е с център В и минава през А. С помощта на ТОЧКАОТ могат да се конструират и точки от окръжност:

## ОБЕКТ "T2 ТОЧКАОТ :К 270

Точката T2e нази точка от окръжността K чийто радиус-вектор сключва 270 градуса с положителната посока на оста Ox.

Сечението на конструирани вече обекти също може да бъде обект на изследване:

## ОБЕКТ "S СЕЧЕНИЕ :К :AB

Множеството S съдържа общите елементи на K и AB. В общия случай те може да са 2, 1 или 0. Ако не сме сигурни, можем да изведем на екрана този брой:

## ИЗВЕДИ БРОЙ :S

2

Сега можем да конструираме например първия елемент на това сечение:

## ОБЕКТ "С ЕЛЕМЕНТ 1 :S

Характерна особеност на ГЕОМЛАНДИЯ е, че ако сменим стойността на даден обект, всички обекти, които зависят от него, се конструират отново с тази нова стойност. Например командата:

## ОБЕКТ "A 100 30

води до изменението не само на точка A, но и на всички обекти, в конструкцията на които участва A (пряко или косвено) – правите a, b, c, точките T, T1, T2, лъча R, окръжностите K и K1. Ако искаме да видим ИСТОРИЯТА на изменението на даден обект, можем да използваме командата ИСТОРИЯ, при която последователните стойности на посочения обект се обединяват в множество. Например ако се интересуваме от 7 последователни състояния на окръжността K, когато увеличаваме абсцисата на центъра ѝ A с 10 единици, изпълняваме последователно командите:

## ИСТОРИЯ "HK :K

## НАПРАВИ "AX АБСЦИ :A

## ПОВТОРИ 7 [НАПРАВИ "AX :AX + 10]

Е какво, готови ли сме вече за атака на крепостта?

## МОДЕЛ НА ЗАДАЧАТА ЗА КРЕПОСТТА В ГЕОМЛАНДИЯ

За да изследваме удобно дадена геометрична конструкция, не е достатъчно само да знаем езика на ГЕОМЛАНДИЯ. В случая е добре да направим конструкцията така, че да зависи от параметър, при изменението на който да се моделира въртенето на оръдието.

Построяваме най-напред модела на крепостта и оръдието:

### ОБЕКТ "O ТОЧКА 0 0

Построява се обект с име O, който е точка с координати (0,0).

### ОБЕКТ "R 100

Създава се променлива с име R и стойност числото 100.

### ОБЕКТ "K ОКРЪЖНОСТ :O :R

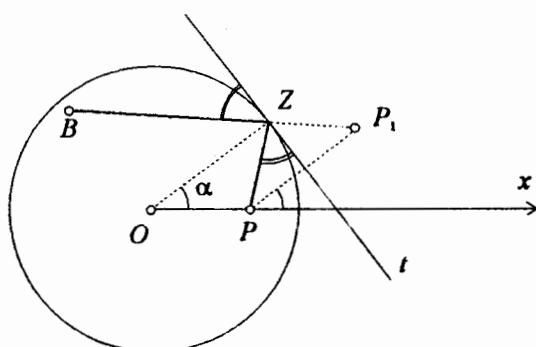
Построява се окръжност с център O и радиус – стойността на R (в случая 100).

### ОБЕКТ "P ТОЧКА 0.6\*:R 0

Построява се точка P, която е вътрешна за K. (в случая – с координати (60,0)).

Да означим със Z нази точка от K, в която гюллето се отразява след изстрела, а с B – точката, в която то спира.

С други думи  $PZ+ZB=2R$ . Освен това ъгълът на падане трябва да бъде равен на ъгъла на отражение. Това означава, че ако t е допирателната към K в точката Z, то PZ и ZB трябва да сключват равни ъгли с t. Това ни дава идея как най-лесно да построим точката B, в която гюллето спира. Най-напред ще прекараме допирателната към K в точката Z. След това ще намерим симетричната точка P1 на P спрямо t. Ще прекараме лъч с начало P1, който минава през Z и ще нанесем върху него точката B на разстояние  $2R$  от P1.



Да означим с АЛФА ъгъла между положителната посока на оста  $Ox$  и  $OZ$ . Ще построим точката  $B$  така, че цялата конструкция да зависи от параметъра АЛФА. Това означава, че като изменим АЛФА, автоматично ще се измени  $Z$ , оттам – допирателната  $t$  в  $Z$ , следователно и симетричната на  $P$  спрямо  $t$ , и накрая –  $B$ . Целта ни ще бъде да видим какво ще бъде поведението на точката  $B$ , когато  $Z$  направи пълна обиколка по окръжността  $K$ .

Да продължим с построението в ГЕОМЛАНДИЯ:

**ОБЕКТ "АЛФА 10**

Променливата АЛФА получава начална стойност 10.

**ОБЕКТ "Z ТОЧКАОТ :K :АЛФА**

Определя се началното положение на обекта  $Z$  като точка от  $K$ , за която  $OZ$  сключва АЛФА градуса с положителната посока на  $Ox$ .

**ОБЕКТ "t ПРАВА :Z 90 + :АЛФА**

$t$  е допирателна към окръжността  $K$  в точката  $Z$ , понеже е перпендикулярна на  $OZ$  (сключва с  $Ox$  ъгъл 90 + АЛФА).

Сега ще построим точка  $P1$ , симетрична на  $P$  относно  $t$ . За целта най-напред ще прекараме през  $P$  лъч с посоката на  $OZ$ , т.е. сключващ ъгъл АЛФА с  $Ox$ :

**ОБЕКТ "1 ЛЪЧ :P :АЛФА**

След това намираме пресечната точка  $P2$  на  $l$  и  $t$ :

**ОБЕКТ "P2 СЕЧЕНИЕ :l :t**

Търсеният образ  $P1$  ще бъде точка от лъча  $l$  на разстояние, два пъти по-голямо от дълчината на отсечката  $PP2$ :

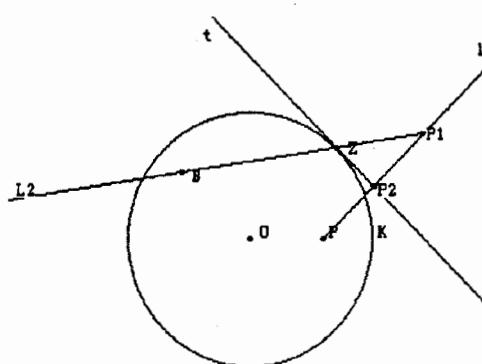
**ОБЕКТ "P1 ТОЧКАОТ :l 2\*ДЪЛЖИНА ОТСЕЧКА :P :P2**

Сега ще построим лъч през  $P1$  и  $Z$ , който ще съдържа частта от траекторията на гюллето след отразяването му:

**ОБЕКТ "L2 ЛЪЧ :P1 :Z**

Точката  $B$  трябва да бъде на разстояние  $2R$  от  $P1$ :

**ОБЕКТ "B ТОЧКАОТ :L2 2\*:R**



Ако сега сменим стойността на АЛФА, всички обекти, в чиято дефиниция АЛФА участва пряко или косвено, ще бъдат предефирани автоматично, т.е. ще бъдат построени отново в съответствие с новата стойност на АЛФА.

Ще вземем 36 последователни положения на  $Z$  (тогава те ще бъдат на разстояние 10 дъгови градуса едно от друго):

**ПОВТОРИ 36 [ОБЕКТ "АЛФА :АЛФА + 10],**

След изпълнението на тази команда виждаме движението на  $B$ , но последователните състояния на тази точка не се запазват. "Историята" на точката  $B$  при това движение може да се получи с помощта на командата ИСТОРИЯ:

**ИСТОРИЯ "НВ :B**

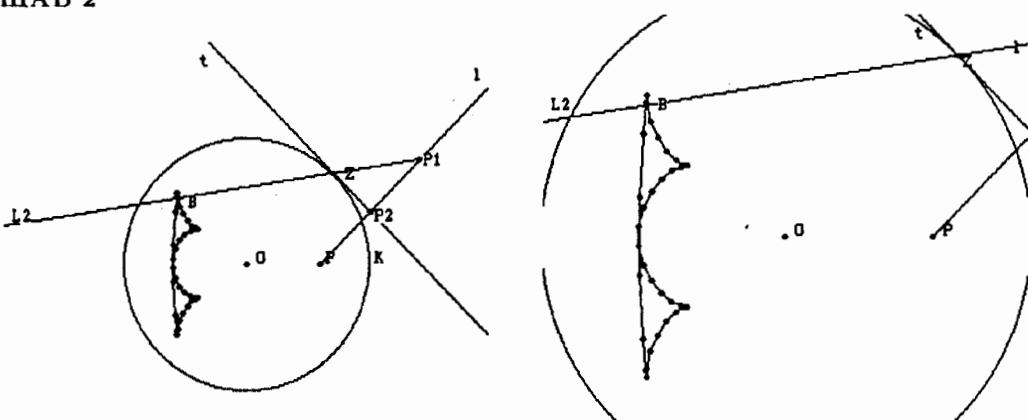
С тази команда обявяваме, че ще запазваме в множество всички последователни състояния на точката  $B$ , след което пак трябва да изпълним командата за повторение на смяната на стойността на АЛФА.

За да получим по-ясна представа за търсеното геометрично място, можем да свържем отделните точки с начупена линия:

ОБЕКТ "G НАЧЛИН :НВ

и да увеличим двойно мащаба:

МАЩАБ 2



Какво ще кажете? Хубава фигура, няма спор! Някои я оприличават на яка, други - на старинен сатър... И ако някой на това място каже: *E, u?* ще му отговорим, че

### ИНТЕРЕСНИТЕ ИЗСЛЕДВАНИЯ ПРЕДСТОЯТ

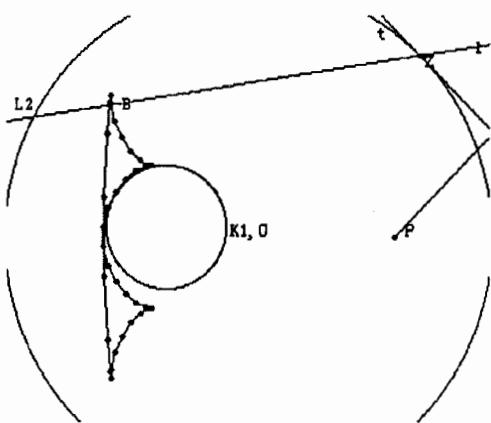
Сигурно вече се питате:

*Дали фигурата съдържа част от окръжност?*

*"Рогчетата" наистина ли са рогчета?*

*Как зависи видът на геометричното място от положението на P?, Aми от R? и т.н.*

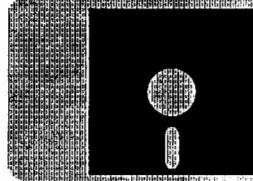
На първия въпрос лесно може да се отговори, като се вземат три точки от частта, която ни интересува, и се прекара окръжност през тях. В резултат на тази процедура се получава следната картина:



Така, че не е добре да се доверяваме само на очите си, а трябва да направим и експериментална проверка. След това можем да преминем по-уверено и към строго доказателство на хипотезата си.

Ще се радваме да получим резултата от вашите атаки на крепостта (в крайен случай може и да не е в ГЕОМЛАНДИЯ...)

Бел. ред. Имайте предвид, че дясната ръка на д-р М. Плюс се е хванала с аналитично изследване на "гюллетата" и добре, че лявата му ръка е заета с проверка на работите за конкурса уМ+, та имате шанс да го изпреварите...



# М + КОНКУРС ПО ИНФОРМАТИКА

В тази рубрика се предлагат задачи-теми за програмиране. Те няма да бъдат съвсем изчерпателно формулирани, за да може читателите да проявят своето творчество и в постановката им, което донякъде е естествено при задачите за програмиране. Основна тежест в нашия конкурс има създаването и обосноваването на ефективен алгоритъм за решаване, но задачата ще се счита за напълно решена, ако за нея има завършена и работеща програма. Най-добрите предложени алгоритми и програми ще бъдат съобщавани и обсъждани на страниците на списанието.

Решенията на конкурсните задачи трябва да съдържат описание на алгоритъма и текста на програмната реализация. Препоръчва се да се използва език за програмиране и компютърна среда, които са по-широко

разпространени у нас. Желателно е текстът на програмата да е записан върху дискета с указания за използването му. Изпратената от Вас дискета ще Ви бъде върната по пощата. За да стане това по-бързо, дискетата трябва да бъде снабдена с подходяща опаковка, с надписан адрес за получаване и пощенска марка. За разполагащите с електронна поща адресът е:

or@bgearn.bitnet subject: E.Kelevedziev,  
а за използвашите традиционната поща:

1113 София  
ул. Акад. Г. Бончев бл. 8  
Институт по математика при БАН  
Емил Келеведжиев

**Задача 6.** Дадени са две числоси редици, всяка с дължина  $n$ . Във всяка от редиците числата са наредени по големина в ненамаляващ ред. Образуваме редица със същата дължина, която е "сума" на редиците в следния смисъл: всяко число в нея е сбор на число от първата и на число от втората редица. При това числата в редицата-результат също са наредени по големина и са точно  $n$ -те най-малки от всичките  $n^2$  възможни сabora.

Да се състави "бърза" процедура, която образува търсената редица, без да пресмята всички възможни сaborove на числа от първата с числа от втората редица. Какъв е минималният обем допълнителна памет (освен за трите редици), необходим за решаване на задачата, изразен като функция от  $n$ ?

Б. Банчев (София)

Срок за изпращане на решения – 15 октомври 1994 г.

Предстои да излезе от печат книгата  
**Компютърна графика.**  
Учебно ръководство за равнинни  
графични системи  
от П. Бърнев и Б. Банчев.

Книгата е предвидена като допълнение към учебника **Информатика II** (Просвета, 1993). Предназначена е да запознае изучаващите информатика

в средните училища и всички интересуващи се с основите на използването на т.н. системи за автоматизиране на проектирането (САПР, CAD-системи).

Учебната версия на описаната в книгата софтуерна система CyberCAD ще се разпространява от авторите ѝ. За контакти се обръщайте към редакцията на списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС.

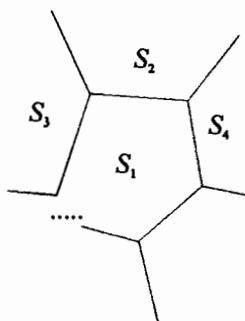
## РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ПО ИНФОРМАТИКА

**Задача 2.** Даден е изпъкнал многостен с  $n$  стени,  $n \geq 5$ , като от всеки негов връх излизат точно три ребра. Разглеждаме следната игра за двама участници: Последователно всеки от играчите записва свой знак върху една от ненадписаните стени. Печели този, който успее да напише знаци си върху три стени, които имат общ връх. Направете компютърна програма, която започва да играе първа и печели винаги играта, както и да играе другият играч.

(Е. Келеведжиев, София)

**Решение.** Задачата е решена от Камен Йотов, ученик в НПМГ, София и от Петър Колев, Варна.

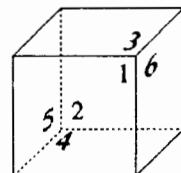
Първо да докажем, че поне една от стените на дадения многостен не е триъгълник. Ако допуснем противното, тогава всичките  $n$  стени ще са триъгълници. При това допускане многостенът ще има  $3n/2$  ребра, защото всяко едно от трите ребра на коя да е стена, принадлежи едновременно на две стени. Освен това, многостенът ще има  $n$  върха, защото всеки един от трите върха на коя да е стена, принадлежи едновременно на три стени. Според известната формула на Ойлер (виж например книгата на Р. Курант, Г. Робинс, Шо е математика?), за всеки изпъкнал многостен броят на върховете събран с броя на стените дава броя на ребрата плюс 2, което в нашия случай означава, че  $n + n = 3n/2 + 2$ , т.e.  $n = 4$ , противоречие с условието на задачата.



Сега ще конструираме печеливша стратегия за първия играч: При първия си ход той трябва да запише знаци си върху произволна стена  $S_1$ , която не е триъгълник. При втория си ход той трябва да вземе свободна стена  $S_2$ , която има общо ребро с  $S_1$  и с две други стени  $S_3$  и  $S_4$ , които на свой ред имат общо ребро с  $S_1$ . Това е възможно, защото вторият играч може да заеме само едната от стените имащи общо ребро с  $S_1$ . При третия си ход, първият играч заема тази от стените  $S_2$  или  $S_3$ , която не е била заета от другия играч при предишния му ход. Така първият играч печели играта на третия си ход,

независимо от действията на противника.

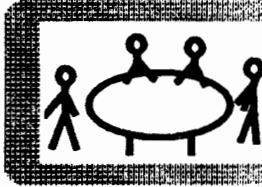
След като алгоритъмът за решаване на задачата е намерен, за да напишем програма трябва да разрешим още два проблема: реализация на самия алгоритъм и реализация на интерфейса на играта. Вторият проблем тук изобщо ще пропуснем, а първият ще изясним накратко, като започнем с представянето на данните. В приложената програма, която е написана на Турбо Паскал, даденият многостен се описва като масив  $d$ , съставен от  $n$  елемента. Всеки един от тези елементи  $d[i]$  също е масив (от тип `side`) и съответства на всяка една от стените. Елементът  $d[i]$  служи за записване на номерата на съседните стени на  $i$ -тата. Важно изискване е тези номера да са записани в избран ред на обхождане за всяка от стените (например, в посока на часовниковата стрелка, гледано отвън на многостена). В програмата, като пример, са попълнени тези масиви за куба, даден на рисунката. Елементът  $d[i][0]$  съдържа броя на стените, имащи общ ръб с  $i$ -тата стена. Масивът  $h$  съпоставя на всяка стена 1, 2 или 0 според това, дали стената е заета от първия или от втория играч, или е свободна. Процедурите `find1`, `find2` и `find3` намират съответно първия, втория и третия ход за първия играч, който в нашия случай е компютърът. Тези ходове, т.e. номерата на избраните стени се пазят в елементите на масива  $a$ , а ходовете на втория играч – в  $b$ . Спомагателният масив  $c$  се използва за запомняне на 3 стени, съседни на  $a[1]$ : стената  $c[2]$ , която се избира от първия играч на втория му ход и е такава, че  $c[1]$  и  $c[3]$  са стени имащи общ ръб с нея. Измежду  $c[1]$  и  $c[3]$  първият играч избира третия си ход.



Предполагаме, че по време на работа на програмата данните, които трябва да се въвеждат, са коректни.

```
program m_2;
const n=6;
type side = array[0..n] of 0..n;
const
  d : array[1..n] of side =
    ((4,3,6,4,5,0,0), (4,3,5,4,6,0,0),
     (4,1,5,2,6,0,0), (4,1,6,2,5,0,0),
     (4,1,4,2,3,0,0), (4,1,3,2,4,0,0));
```

(продължава на стр.56)



# М + КОЛОКВИУМ

## МАТЕМАТИКА + ХИМИЯ =

= HIMMELKREUZSACKSCHWERENOTKRUZITÜRKEN

проф. Иван Чобанов, ФМИ – София

Колко литра вода трябва да се изпари от 200 литра 12-процентов спирт, за да се получи 20-процентов спирт?

МАТЕМАТИКА ПЛЮС, бр. 2, 1993, стр. 37

Дясната страна на горното уравнение се произнася най-лесно, като се следва инструкцията от стр. 175 на трактата [1]:

„Притиснете сливиците си към долната част на ларинкса. Тогава с извитата нагоре изпъкнала част на септума така, че почти, но не съвсем, да допира мъжеца, помъчете се с върха на езика да допрете тироидната си жлеза. Поещете дълбоко дъх и свийте глотиса. Сега, без да отваряте устни, кажете ...“

Относно дефиницията на въпросния термин вж. стр. 71 на [2].

Шо се отнася до задачата за изпарението на водата, тя допуска и следния вариант:

„Колко литра вода трябва да се изпари от 200-литров аквариум с 12-процентна концентрация на рибата, за да се получи 20-процентна концентрация?“

(Ако читателят се смущава от термина „концентрация на рибата“, ще го успокоя, като му кажа, че преди няколко години – като карах към Созопол, за да пренеса брат си, който при риболов на сафрид с чепаре си бе счупил крака по крайбрежните скали – някъде към Карнобат край шосето видях табела на КАТ с предупреждение: „Участък с повишена концентрация на пътно-транспортни произшествия!“ Тогава смятах да поздравя авторите чрез вестник „Милиционерска мисъл“, но после се отказах.)

Като стана дума за риба, ето един много труден математически проблем:

„Двама рибари клечали три дни и три нощи и хванали 40-килограмов сом. Колко дни и нощи трябва да клечат трима рибари, за да хванат 80-килограмов сом?“

Като стана дума за сом, знаете ли задачата

за сома, дето хвърляят хайвер? Не? Странно, малцина я знаят. Та тя гласи – или не, я по-добре да ви кажа следния вариант:

„След 9-месечна бременност една жена родила 4-килограмово бебе. Колко месеца са ѝ нужни, за да роди 17-килограмово бебе?“

Представям тези задачи на организаторите на конкурси приемни изпити – при това съвсем безкористно и без никакви претенции за интелектуална собственост. Аз пък ще се върна на водно-спиртните разтвори.

Лично аз бих предпочел 20-процентните, но – както казва един приятел, като няма нещо по-хубаво, човек ляга и с жена си – при зор заман кандисвам и на 12-процентни.

Винаги съм бил по концентратите. В нашата махала от вино изтрезняват. Но задавали ли сте си въпроса, защо в „Илиада“ и „Одисея“, например, не пият ни ракия, ни мастика, нито пък коняк, ликър, водка, уиски, бренди и маса други тъм подобни божи благодати? Историците – нали *historia magistra vitae*, историята е учителка на живота – твърдят, че същото било и при вавилоняни, финикийци, египтяни, евреи, римляни, траки, македонци – дори при някогашните руснаци. Толкова ли глупави са били? С бира и вино се наливали до козирката, но, що се отнася до ракията – дори и думата я няма в старогръция или латинския речник. (В нашия език, например, тя е влязла чрез турската дума *raki*, която пък е произлязла от арабската *arak*, означаваща „пот“ – след малко ще видим защо.)

*Cum grano salis*, сиреч на шега, бих отговорил: защото произвеждали концентратите си по рецептата на горната задача – чрез изпарение (на слънце ли, що ли?) на водата от 12-процен-

тни спиртни разтвори. Но бих се отклонил от истината. А тя е: не са познавали дестилацията.

Колкото и странно да е – човешката история е едно от най-необяснимите физико-химични явления – дестилацията е едно от късните открития на цивилизацията. Смята се, че спиртът  $C_2H_5OH$  бил открит за пръв път в Италия едва през XI век; получаван бил чрез дестилация на вино, откъдето и първоначалното му латинско наименование *spiritus vini* – духът на виното. Поетичното си име *aqua vitae* – вода на живота – дължел, казват, на медицинското му приложение, но аз не вярвам това: склонен съм да мисля, че то е ентузиазирана квалификация на някой поп, страстен негов почитател – като имам предвид, че тази жива вода е била произвеждана първо в манастирите. (Има и версия, че правилно е не *aqua vitae*, а *aqua vitis* – вода на лозата, но последният термин е по-подходящ за виното, отколкото за гроздовата.) Така или иначе, но е ясно, че става дума за същия оня химикал, който североамериканските индианци наричали „огнена вода“, доколкото може да се вярва на Карл Май. Арабското *arak* пък се дължи на факта, че при варенето на ракия тя капе от чучура като пот. (Лумата „чучур“ ме подсети, че в село Българене, Ловешко, където е ранчото ми, до общинските казани се стига безпогрешно, като се следва стрелката с надпис „Народен чучур“.)

– От дума на дума, те ни при анчето. Почекай да вържем и тука кончето!

– Бре оно така е – човешката душа, ако я не поиш, она те не слуша.

– А моята Пена ока, та се кине – мисли, като пием, свето че загине.

– Мене обичайо знае мойта Злата – почне ли да дудне, че спи при свинята.

Едва ли тези герои на Елин Пелин са знаели, че онова, което са пили, е *етилов спирт*. *Метиловият*  $CH_3OH$  е силна отрова. Въсъщност, сама по себе си думата *спирт* не означава *нищо* – за да означава *нещо*, трябва да се каже *какъв* спирт. Има доксан докуз спиртове или *алкоголи*: *едноатомни, двуатомни (гликоли), триатомни (глицерини), многоатомни*; има още *алифатични, аlicyclicни, ароматични, гетероциклиични* и какви ли не още. Когато се каже само „спирт“, обикновено се разбира обикновеният *етилов*.

Великият Менделеев е имал особена слабост към спиртните разтвори – за разлика от Мусоргски не като руснак, а като химик. Той има даже труд, озаглавен „За съединяването на спирта с водата“ (1865). Слабост към съединяването на водата със спирта имат днес само кърчмарите. На Менделеев се дължат фундаментални изследвания във връзка с така наречените *течни смеси*.

$H_2O$  и  $C_2H_5OH$  образуват такава смес – *бинарна система с неограничена взаимна разтворимост*. Това означава, че съществуват водно-спиртни разтвори с произволно съотношение на компонентите. Сместа от 95,57%  $C_2H_5OH$  и 4,43%  $H_2O$  кипи при  $78,15^\circ C$  и се нарича *ацеотронна*: температурата ѝ на кипене е най-ниската между всички състави, включително и чистите компоненти  $H_2O$  ( $100^\circ C$ ) и  $C_2H_5OH$  ( $78,39^\circ C$ ). Ако кипи водно-спиртна смес с повече от 95,57%  $C_2H_5OH$ , то в парите ѝ ще има повече спирт, отколкото вода, и поради изпарението течната фаза ще се обогатява на вода до 4,43%; обратен процес протича, ако съдържанието на вода е по-високо от 4,43%.

Всичко това ни казва специална наука наречена *физико-химичен анализ*. Не ме питайте, защо при варенето на ракия става точно обратното – не знам. Но е факт. За мен, дето уж знам горе-долу физико-химичния анализ, вникването в този факт ще остане нещо непостижимо, а отчаяните ми опити в тази насока ми създадоха чувство за малоценност – след тях не мога вече да разбирам и съвсем елементарни неща. Напълно влизам в положението на Джек Лондон, който се чуди, защо източният край на Панамския канал е по-назапад от западния му край; или когато в „Бунтът на Елсинор“ пише: „Точно на това място попаднах в бездънната яма на интелектуалния хаос. Ние сме на източна дължина, разсъждавах аз, следователно сме пред Гринуич. Ако сме зад Гринуич, днес е вчера; ако сме пред Гринуич, вчера е днес; но, щом вчера е днес, какво за бога е днес? Утре ли?“

Теорията ни учи едно, а практиката показва точно обратното – да разбере това, не е по силите на беляя човек, според Джек Лондон. Тази история ми напомня за ротния ми фелдфебел – майката на 6-а рота в 16-а Пехотна Ловчанска Дружина, Ботевград, към 25-и Пехотен Драгомански Полк, Сливница – през незабравимата 1942 г. Казваше се Стоев, а малкото му име съм забравил. Веднъж се опитах да се правя на умен пред него, а той: „Каква е разликата между теорията и практиката?“ Аз (дипломатично): „Съвсем не знам, гусинфебел!“ Той: „Не знаеш, я! Практиката е това, дето разплаква мамката на теорията!“ (Не беше „разплаква“, но нейсе!)

И има за какво да се чудиш: в казана водата е много повече от спирта, а в ракията фифти-фифти.

Току-що ми хрумна великолепна идея: а защо не направя справка във „Физика-та“. Имам си аз една такава [3] от 1883 г.; въпреки острастия си правопис, тя винаги ми е помагала при трудни ситуации. Тази книга ме е впечатлила до степен да мисля, че след нея физическата наука

почти е престанала да се развива – или ако не е престанала, то това не личи от гимназиалните учебници по физика, които в сравнение с [3], публикувана само 4 години след Освобождението, са направо аутсайдери. Та ето какво може да се прочете там по интересувация ме проблем (стр. 50-51):

„Дестиляция наричаме обръщане-то на течни-тъ тъла чръзъ загръзване в пари и на паритъ чръзъ охладяване пакъ въ течно тъло.“

... Чръзъ дестилиране можемъ да отдълми лътливи-тъ течности отъ нелътливи-тъ или по-малко лътливи-тъ. Напр. ако загръваме съмъщение на спиртъ съ вода, спиртови-тъ пари ся отдъл-жтъ при по-ниска температура, понеже спирта ври при  $79^{\circ}\text{C}$ , а водата остава в котела.“

Или, както се казва, те ти, булка, Спасовден.

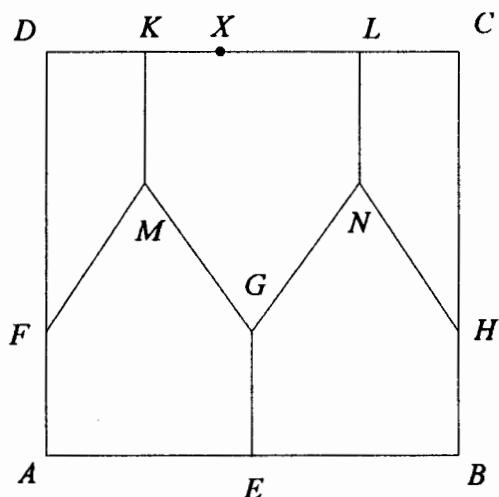
Та това е всичко. Иначе задачата си е много хубава – само дето няма решение. Ако имаше, то щеше да е единствено: 80 литра. Това е класически пример за *единствено несъществуващо решение*. За да се оправи задачата, достатъчно е вместо „изпари“ да се каже „отстрани“. Това може да стане по много начини. Един от тях е чрез охлаждане до лед. Синият камък има химическа формула  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  и дължи синия си цвят на 5-те молекули кристална вода. При изпечане я губи и се превръща в много жаден за вода бял прах – толкова жаден, че, като се сипе във водно-спиртен разтвор, може да го превърне в 100%  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ .

Задачата може да се оправи също, като в условието ѝ вместо „спирт“ се каже „готварска сол“. Тогава и редакцията на „МАТЕМАТИКА ПЛЮС“ щеше да е по-доволна, а и аз щях да се занимавам с нещо било по-полезно, било по-приятно. ЧАО.

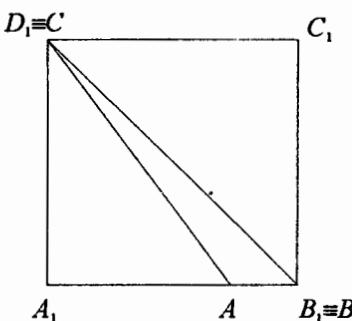
### Цитирана литература

1. Джером К. Джером. Трима на бумел. „Георги Бакалов“, Варна 1983.
2. Бернхард и Михаел Гжимек. Серенгети не трябва да загине. 367 000 животни търсят своя държава. „Наука и изкуство“, София 1967.
3. Учебникъ по физика-та. За долни-тъ класове на сръдни-тъ училища състивили М. Т. Бракаловъ и П. Жилковъ пръподаватели въ Пловдивска-та Реална Гимназия. Часть I. Съ 119 фигури и таблица за спектралната анализа. Часть II. С 274 фигури. Прага 1883. На свое иждивение. – Въ печатница-та на Алойсъ Р. Лауэрман-на. (119+304 стр.)

лесно се пресмята, че  $\max(d_1, \dots, d_5) = 5\sqrt{17}/32 := d$ . Ще докажем, че  $d$  е възможно най-малкото. Да допуснем противното и да означим с 1, 2, 3, 4 и 5 частите на едно разделяне на  $ABCD$ , за което  $d_i < d$ . Тъй като  $d < 1$ , то  $A, B, C$  и  $D$  са от различни части. Нека за определеност  $A \in 1, B \in 2, C \in 3, D \in 4$ . Тогава  $G \in 5$ . Нека частта 5 има обща точка  $X$  със страна на квадрата, например  $CD$ . Тогава от допускането следва, че  $X \in KL, K \in 4, L \in 3, F \in 1, H \in 2$ . Сега е ясно, че  $E$  не се покрива от никоя част на разделянето – противоречие. До същото противоречие се достига и в случай, че частта 5 няма обща точка със страна на  $ABCD$ .



**Бележка на редакцията:** Публикуваната в решението на задача  $M^+16$  а) ( списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС, бр. 1, 1994 г.) оценка  $R \leq 1/\sqrt{2}$  не е вярна. Контрапример ни бе съобщен от участниците в школата по математика за 11 клас в НПМГ – София с ръководител **Боянка Савова**. Вярната оценка е  $R < 1$ . Наистина, тъй като  $2R = AC \cdot BC$  и  $AC \leq \sqrt{2}$ ,  $BC \leq \sqrt{2}$ , то  $R \leq 1$ , като равенство се достига само ако  $A \equiv B$  и  $C$  са срещуположни върхове на квадрата (т.е.  $T$  е изроден триъгълник). Оценката  $R < 1$  е точна, защото ако разгледаме  $\Delta AB_1D_1$  (вж. чертежа), при  $A \rightarrow B_1$  следва, че  $R \rightarrow 1$ .



*m* +

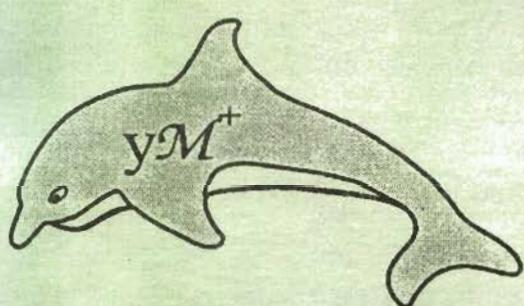


Драги читатели,

МАТЕМАТИКА ПЛЮС си поставя благородната задача да издиরва и поощрява най-талантливите от вас чрез задочното математическо състезание **ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ - уМ<sup>+</sup>**. На следващите страници в този брой ще откриете четива за 4 - 5 и 6 - 7 клас, а след тях - конкурсните задачи от последния III кръг. Прочетете внимателно четивата и решете упражненията след тях. Поне една от конкурсните задачи е свързана с четивото за съответния клас, затова горещо ви препоръчваме да положите усилия, за да го разберете и изучите задълбочено. Ако нещо ви затруднява, обрнете се към учителя по математика или пишете до редакцията. Но задачите решавайте самостоятелно! Знаете ли колко голямо е удоволствието, когато успеете да намерите сами отговора? Не се отчайвайте, ако не се справите с всички задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. Допуска се и колективно участие.

В бр. 4 за 1994 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС очаквайте резултатите от състезанието. Жури под председателството на известния български математик академик Благовест Сенцов ще преглежда вашите решения. Най-добрите от вас, т.е. тези, които решат най-много задачи или направят впечатление с оригиналните си идеи (пък дори и една единствена), ще бъдат поканени заедно с учителите си на специално организирания ФЕСТИВАЛ уМ+, който ще се проведе по време на Конгреса на Световната федерация на националните математически състезания в гр. Правец от 23 до 28 юли 1994 г. Там ги очакват многообразни изненади. Ще ги запознаем с известни математици, ще им осигурим разнообразни математически игри и развлечения. И всичко това бесплатно - награда за положения през учебната година труг.

Тези от вас, които ще бъдат поканени на Фестивала уМ+, ще бъдат уведомени за това до края на месец юни 1994 г.



Конкурсът се провежда със съдействието на



Фондация "Св. св. Кирил и Методий"

За инициативата на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС - ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ уМ+ е създаден специален фонд. Желаещите да спонсорират или да направят дарение могат да използват банковата сметка на фонда: 586 180 0775 005, Банка за земеделски кредит АД, София, за фонд "ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ".



# m + семинар



## С ребус ли?

*Четиво за 4 и 5 клас*

Сигурно всеки от вас е решавал ребуси от забавните страници на списания и вестници и знае, че ребусът е задача, в която трябва да се възстанови математическо действие, зашифровано с букви, знаци и символи.

Понякога обаче, ребусите помагат при решаването на така наречените "задачи с суми". Вместо да въвеждаме неизвестни и да пишем уравнения, съставяме ребус и го решаваме. Ето, вижте:

**Задача 1.** Цифрата на стотиците на едно трицифрене число е 7. Ако тази цифра преместим на последно място, ще получим ново трицифрене число, което е с 567 по-малко от първоначалното. Да се намери чистото.

*Решение.* Нека записът на даденото число е  $7xy$ , където  $x$  и  $y$  са цифри (не непременно различни!). Тогава новополученото число е  $xy7$ . От условието на задачата съставяме равенството  $7xy - xy7 = 567$ . Да запишем действието във вид на ребус:

$$\begin{array}{r} 567 \\ + xy7 \\ \hline 7xy \end{array}$$

Понеже  $7 + 7 = 14$ , то  $y=4$ . Сега лесно се съобразява, че  $x=1$ . Следователно търсеното число е 714.

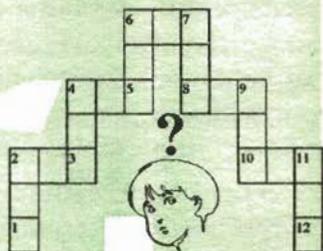
**Задача 2.** От ляво и от дясно на дадено двуцифрене число написваме цифрата 1 и полученото четирицифрене число е 23 пъти по-голямо от даденото. Да се намери двуцифреното число.

*Решение.* Нека означим даденото двуцифрене число с  $ab$ , където  $a$  и  $b$  са цифри (не непременно различни). Тогава четирицифреното число е  $1ab1$  и от условието на задачата получаваме ребуса:

$$\begin{array}{r} ab \\ \times 23 \\ \hline 1ab1 \end{array}$$

Тъй като  $b \cdot 3$  завършва на 1 (и  $b$  е цифра), единствената възможност е  $b=7$ . Понеже  $a7 \cdot 23$  е четирицифрене число само когато  $a$  е по-голямо от 3, то  $a$  може да е някоя от цифрите 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Проверяваме за всяка от тях и установяваме, че единствената възможност е  $a=7$ . Следователно търсеното двуцифреното число е 77.

**Задача 3.** Сумата от дължините на ръбовете на куб е трицифрене число. Ако в това число зачертаем цифрата на десетиците, ще се получи двуцифрене число,



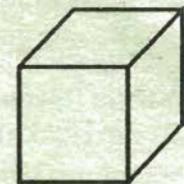
което е два пъти по-голямо от дължината на ръба на куба. Да се намери дължината на ръба, ако всички дължини са изразени в сантиметри.

*Решение.* Да означим с  $abc$  трицифреното число, което е сумата от дълчините на ръбовете на куба. Тогава числото  $ac$  е два пъти по-голямо от дължината на ръба. Понеже всеки куб има 12 ръба, получаваме ребуса:

$$\begin{array}{r} ac \\ \times \quad 6 \\ \hline abc \end{array}$$

Ако  $a$  е по-голяма от 1, цифрата на стотиците на числото  $ac$  е по-малка от  $a$  (например  $24.6 = 144, 36.6 = 216$  и т.н.). Следователно  $a = 1$ , т.е.  $1bc = 1c.6$ . Тъй като 6 с завършва на  $c$ , то  $c = 0, 2, 4, 6$  или 8. Ако  $c \leq 6$ , то  $1c.6$  е двуцифренено число. Ето защо  $c = 8$ . Цифрата  $b$  намираме от равенството  $18.6 = 108$ , т.е.  $b = 0$ . Дължината на ръба на куба е половината от  $ac = 18$ , която е 9 см.

Ето и една задача за самостоятелна работа.



**Задача 4.** Дължината на ръба на куб е двуцифренено число, записано с еднакви цифри. Обемът му е четирицифренено число, на което първата и последната цифра е равна на повтарящата се цифра в двуцифреното число, а средните две са равни на 3. Да се намери повърхнината на куба, ако всички дължини са в сантиметри.

*Отговор.* 726 кв. см.

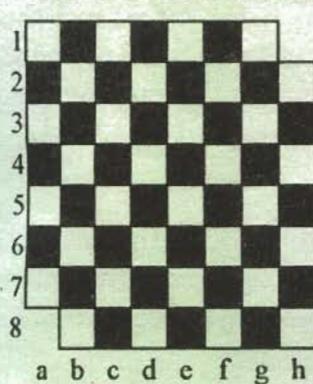
*Автори на четивото Ирина Шаркова и Румяна Караджова*

## Конструктивен и неконструктивен метод

### Четиво за 6 и 7 клас

Когато в една задача искаме да докажем невъзможност на някакво събитие или несъществуването на някакъв математически обект или обекти, полезен се оказва така нареченият *метод на опровергаване на отрицанието*. Как действа той, ще разберете, като проследите внимателно решението на

**Задача 1.** От обикновена шахматна дъска са изрязани най-долното ляво и най-горното дясното квадратче. Възможно ли е останалата част от дъската да бъде покрита (без застъпване и припокриване) с площи за домино, като всяка плошка покрива точно две квадратчета?



*Решение.* За пръв път чух тази задача като петокласник в кръжок по математика. Бързо пресметнах, че на дъската остават още 62 квадратчета, всяка плошка покрива точно две и следователно останалата част от дъската ще се покрие с  $62 : 2 = 31$  площи. Когато обясних *решението* на нашия ръководител, той мълчаливо поставил пред мен

шахматна дъска и плочки за домино. И започна една история... С ужас установих, че опитите ми да направя такова покриване са безрезултатни.

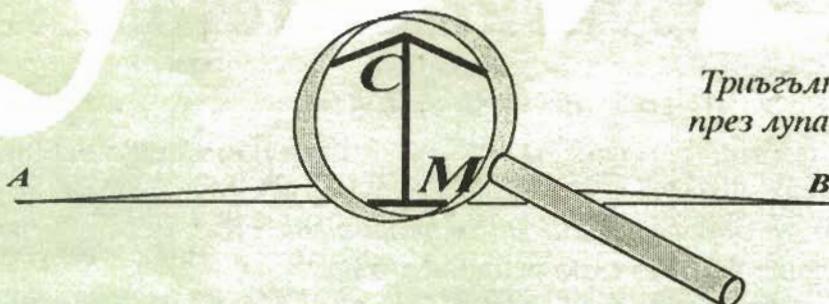
Сигурно вие се досещате за правилния отговор: такова покриване не е възможно! Хайде да разсъждаваме заедно. Да допуснем, че е възможно да се покрие останалата част от дъската. Вземете сега една обикновена шахматна дъска. Какъв цвят имат изрязаните квадратчета? Той е еднакъв (черен!). Както и да поставяме една плочка за домино върху две квадратчета, тя винаги ще покрива едно бяло и едно черно квадратче. Тъй като според допускането останалата част от дъската е покрита, то в тази останала част броят на белите и черни квадратчета трябва да е еднакъв. Но в действителност това не е така - останалата част има 32 бели и 30 черни квадратчета! Следователно нещо не е напред, а това е именно допускането, че покриването е възможно.

Ако добре сте внимавали, сигурно сте разбрали кое е най-трудното, но и най-красивото и привлекателно в задачи от подобен тип. Това е *отгатването* на правилния отговор. Сега ще решим последната задача от упражнението в миналия брой.

**Задача 2.** Възможно ли е трите страни на един триъгълник да са по-големи от 100 см, а лицето му да е по-малко от 0,01 кв.см?

*Решение.* На пръв поглед въпросът като че ли предполага отрицателен отговор. Но това е само "на пръв поглед". Нека конструираме такъв триъгълник: да вземем отсечка  $AB = 200$  см и от средата  $M$  да издигнем перпендикуляр  $MC = 0,00001$  см. Не забравяйте, че в света на математиката това е напълно възможно. Вън от всякакво съмнение е, че точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  са върхове на триъгълник. За лицето му получаваме:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot MC = \frac{1}{2} 200 \cdot 0,00001 = 0,001 \text{ кв.см}$$



Да видим сега какви са страните на триъгълника. Най-напред  $AB = 200$  см  $> 100$  см. След това  $AC > AM = 100$  см, защото  $AC$  и  $AM$  са съответно наклонена и перпендикуляр. По същия начин се убеждаваме, че  $BC > 100$  см. Получихме, че страните на триъгълника  $ABC$  са по-големи от 100 см, а лицето му е по-малко от 0,01 кв.см.

В решенията на горната задача, както и на някои от задачите от четивото за 6 и 7 клас в бр.1 от 1994 г. на МАТЕМАТИКА ПЛЮС използвахме конструктивния метод. Но той е практически неприложим при задачи за съществуване, в които се

търсят например 1 000 000 обекта или при задачи, в които желаният обект трябва да има например 5 000 свойства. За да се справим с трудности от подобен характер, математиците са разработили и други методи, наречени неконструктивни. Такова е например решението на следната задача.

**Задача 3.** Виши ли е възможно от 1994 цели числа да се изберат

- а) 183;
- б) 182,

за които разликата на всеки две да се дели на 11?

*Решение.* Най-напред да отбележим, че разликата на две числа се дели на 11 точно тогава, когато числата дават еднакви остатъци при деление на 11.

а) Да допуснем, че това е възможно. Да разгледаме числата 1, 2, 3, ..., 1994. Според допускането между тях има 183 на брой, които дават едни и същи остатък при деление на 11. Убедете се сами, че това не е така: остатък 1 дават числата 1, 12, 23, 34, ..., 1992, които са 182 на брой; остатък 2 дават числата 2, 13, 24, 35, ..., 1993, които са 182 на брой и така нататък, докато изчерпим остатъците.

б) Отговорът е положителен. Но за да стигнем до него, не можем да използваме конструктивен метод. Не сме в състояние да посочим точно кои са числата, тъй като всичките 1994 числа са произволни. На помощ идва принципът на Дирихле (виж четищото за 4 и 5 клас, бр. 1 от 1994 г. на МАТЕМАТИКА ПЛЮС). Възможните остатъци при деление на 11 са 11 на брой: 0, 1, 2, ..., 10. Да разгледаме 11 чекмеджета, номерирани с числата от 0 до 10, и да поставим всяко от числата в чекмеджето с такъв номер, какъвто е остатъкът на числото при деление на 11. Тъй като имаме 1994 числа и  $1994 = 11 \cdot 181 + 3$ , то поне в едно чекмедже ще имаме поне 182 числа. Точното същество на търсенията.

В заключение ще добавя, че много от предизвикателствата, на които съвременната математика трябва да отговаря, са всъщност от вид на разгледаните тук. Например, възможно ли е да се изгответят дълготрайни метеорологични прогнози; възможно ли е да се предава снимков материал от един континент на друг с помощта на телекс, телеком или телетайп; съществува ли начин да бъде познат автора на намерено древно произведение на изкуството и много други. А има и такива въпроси, които още чакат своя отговор: възможна ли е прогноза за земетресения или за вулканични изригвания; може ли компютрите да се научат да играят шахмат по-добре от световния шампион. Но това е друга тема. А сега ви предлагаме задача за самостоятелна работа:

**Задача 4.** Съществува ли четирицифрено естествено число, което след задраскване на първата цифра се намалява

- а) 73 пъти,
- б) 72 пъти?

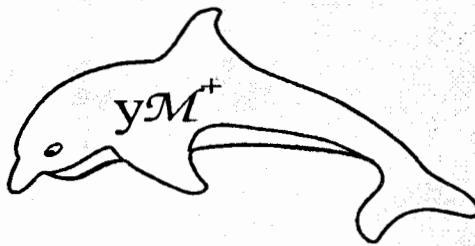
*Автор на четищото Светлозар Дойчев*



# *m* + конкурс



## Издирване на таланти



**ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ** е за-  
дочно математическо състезание,  
победителите от което ще бъдат  
поканени заедно с учителите си на  
специално организиран лагер, къ-  
дето ги очакват страховни изненади.  
Състезанието се провежда в 3 кръга.  
В този брой ви представяме задачите  
от последния III кръг. Задачите от  
I и II кръг бяха публикувани в бр. 4  
за 1993 г. и бр. 1 за 1994 г. на списа-  
ние МАТЕМАТИКА ПЛЮС. Поне  
една от задачите е свързана с четива-  
та за съответните класове от пред-  
ните страници. Прочетете ги внимат-  
елно, решете задачите за упражне-  
ние и едва тогава се захванете със  
задачите от състезанието. Не се  
отчайвайте, ако не се справите и с  
трите задачи. Пишете ни дори и в  
случай на непълно решена задача.  
В писмата отбелязвайте трите си  
имена, адреса, класа, училището,  
името на учителя ви по математика.  
Допуска се и колективно участие  
(ако например задачите се разглеж-  
дат в школата по математика). В  
този случай изпращайте само едно  
писмо с името на избран от вас  
капитан на отбора. Пишете на адрес:

**МАТЕМАТИКА ПЛЮС**

Институт по математика - БАН  
ул. "Акад. Г.Бончев", бл.8  
1113 София

### III КРЪГ

#### Задачи за 4 клас

7. На мястото на звездичките поставете цифрите  
от 0 до 9, като всяка се използва точно по веднъж  
така, че да се получи вярно изваждане и  
умаляемото да е възможно най-голямо.

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*

8. Дадени са 11 картички. На всяка от тях е  
написано точно едно от числата 1, 2, 3,..., 11 и  
всяко от числата е написано на някоя от  
картичките. Възможно ли е картичките да се  
разделят на две групи така, че сумата от числата,  
написани на картичките в една група, да е с

- a) 6;
- б) 5

по-голяма от сумата на числата, написани на  
картичките в другата група.

9. Всяко от разстоянията в километри между  
градовете А и В, както и между В и С е трицифрен  
число. Разстоянието от В до С е 216 км по-малко  
от разстоянието от А до В. Когато един шофьор  
изминал пътя от А през В до С, той забелязал, че  
цифрата на стотиците на разстоянието от А до В  
е 9, а като я преместил на последно място, получил  
разстоянието от В до С. Колко километра  
е изминал шофьорът по маршрута ABC?

#### Задачи за 5 клас

7. Обиколката на един квадрат е петцифрен  
число. Цифрите на това число, но записани в  
обратен ред, определят петцифрене число, което  
е дължината на страната на квадрата. Да се  
намери дължината на страната на квадрата, ако  
всички дължини са изразени в сантиметри.

8. Напишете на един ред няколко цели положителни числа. След това поставете стрелка и вдясно от нея напишете тяхната сума  $S$ . На следващия ред напишете цели положителни числа по следното правило: първото число е равно на броя на числата от първия ред, които са по-големи от 0; второто число е равно на броя на числата от първия ред, които са по-големи от 1; третото число е равно на броя на числата от първия ред, които са по-големи от 2 и т.н. Поставете стрелка и вдясно от нея напишете сумата  $T$  на числата от втория ред. Например:

$$5, 2, 5, 1, 4, 7 \rightarrow S=24$$

$$6, 5, 4, 4, 3, 1, 1 \rightarrow T=24.$$

Покажете, че винаги  $S=T$ .

9. Учителят и всеки от 30-те ученика в класа записват на лист естествените числа от 1 до 30 в никакъв, произволен за всеки един участник, ред. Учителят сравнява своя запис с този на всеки от учениците: ако на едно и също място в записа на учителя и ученика стоят едни и същи числа, ученикът получава по една точка за всяко такова съвпадение. Известно е, че всички ученици получили различен брой точки. Покажете, че записът на някой ученик съвпада с този на учителя.

### Задачи за 6 клас

7. Да се намерят целите числа  $k$ , за които пресечните точки на графиките на функциите  $f(x)=2x+1$  и  $g(x)=3x-k$  с координатните оси са върхове на четириъгълник с лице  $5/12$ .

8. Възможно ли е страните на един триъгълник да са по-малки от 10 см, а лицето му да е по-голямо от 100 кв. см.?

9. Възможно ли е сумата от цифрите на квадрат на естествено число да е равна на

а) 1995;

б) 1993?

### Задачи за 7 клас

7. Да се докаже, че числото  $2^{1094} + 5^{1994}$  се дели на 29.

8. Нека  $x$  е  $n$ -цифreno число и  $y$  е естествено число, което се получава чрез никакво разместяване на цифрите на  $x$ . Възможно ли е равенството  $x+y = \underbrace{99\dots\dots 9}_n$ , ако

а)  $n=1994$ ;

б)  $n=1995$ .

9. Да се намерят всички цели положителни числа  $n$ , за които равностранен триъгълник със страна  $n$  може да се разреже на еднакви трапеци със страни 1, 1, 1, 2.

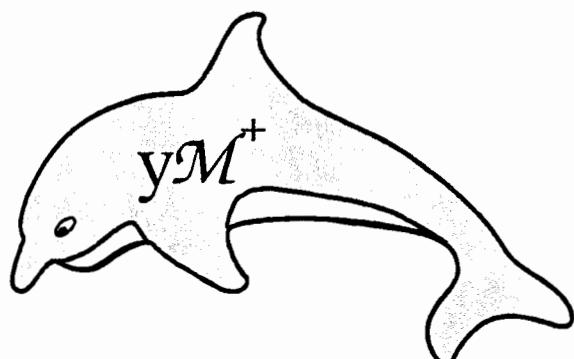
*Задачите са предложени от*

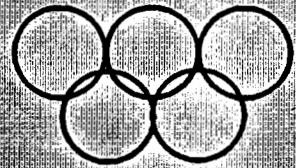
*И. Шаркова, К. Банков, Св. Дойчев, Хр. Лесов и Б. Михайлов.*

**Краен срок за изпращане на всички решения - 10 юни 1994 г.**

Не забравяйте да изпратите решения и на Десетата задача, публикувана в бр. 1 за 1994 г.

Победителите в състезанието ще получат покана за участие във Фестивала **ум<sup>+</sup>** до края на месец юни 1994 г.





# ОЛИМПИАДИ

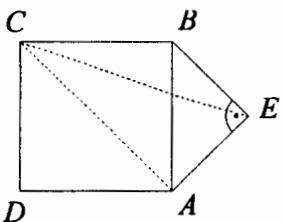
# ПОДГОТОВКА

## XXVI ОЛИМПИАДА В ЩАТА НЮ МЕКСИКО, САЩ (Време за работа 3 часа)

**Задача 1.** Пресметнете

$$\frac{1992^3 - 1991 \cdot 1992 \cdot 1993}{2 \cdot 3 \cdot 83} = 4$$

**Задача 2.** На фигурата  $ABCD$  е правоъгълник и  $AEB$  е равнобедрен правоъгълен триъгълник ( $AE = BE$ ,  $\angle AEB = 90^\circ$ ). Да се намери лицето на триъгълника  $AEC$ , ако  $AB = 4$  см и  $BC = 3$  см.



**Задача 3.** Двама плувци, Сам и Джим, тръгват едновременно един срещу друг от двата края на 50-метров басейн. Скоростта на Сам е  $\frac{3}{4}$  м/сек., а тази на Джим е  $\frac{2}{3}$  м/сек. Всеки път, когато стигнат противоположния край, двамата плувци тръгват обратно без да спират.

- След колко време Сам ще застигне Джим?
- Колко пъти ще се срещат плувците до първото застигане на Джим от Сам?

**Задача 4.** Даден е триъгълникът  $ABC$  със страни  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $CA = 15$  см. Вписаната окръжност се допира до  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  съответно в точките  $D$ ,  $E$  и  $F$ .

- Намерете дълчината на  $CE$ .
- Намерете радиуса на вписаната окръжност.

**Задача 5.** Решете неравенството

$$\frac{x-1}{x-3} \geq \frac{x-2}{x-4}.$$

**Задача 6.** Дадени са 30 възела от квадратна мрежа  $5 \times 6$ . Измежду квадратите с върхове във възлите намерете броя на тези:

- които имат хоризонтална страна;
- които нямат хоризонтални страни.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

**Задача 7.** Нека  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = 1-x$ ,  $f_3(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $f_5(x) = \frac{x}{x-1}$ ,  $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$ .

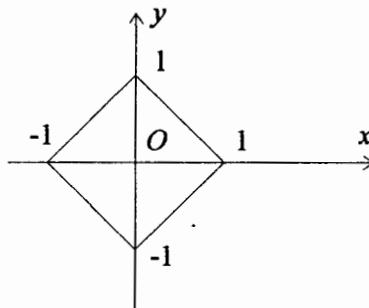
- Намерете всички  $m$ , за които

$$f_6(f_m(x)) = f_4(x).$$

- Намерете всички  $n$ , за които

$$f_n(f_4(x)) = f_3(x).$$

**Задача 8.** Всички точки  $(x, y)$  в равнината, за които  $|x| + |y| \leq 1$ , образуват квадрат с лице 2. Всички точки  $(x, y)$  в равнината, за които  $||x| - 1| + ||y| - 1| \leq 2$ , образуват многоъгълник.



- Намерете броя на страните на този многоъгълник.

- Намерете лицето на този многоъгълник.

**АВСТРАЛИЙСКА ОЛИМПИАДА  
1993 г.**

*Първи ден (време за работа 4 часа)*

**Задача 1.** Даден е триъгълник  $ABC$  с  $\angle ACB > 90^\circ$ . Точката  $D$  е петата на перпендикуляра от  $C$  към  $AB$ ,  $M$  е средата на  $AB$ ,  $E$  е точка върху продължението на  $AC$  така, че  $EM = BM$ ,  $F$  е пресечната точка на  $BC$  и  $DE$ . Да се докаже, че  $\angle CBE = 2 \angle ABC$ , ако  $BE = BF$ .

**Задача 2.** Функцията  $f$  е дефинирана върху реалната права и изпълнява условията  $f(x \cdot y) = x \cdot f(y) + f(x) \cdot y$  и  $f(x + y) = f(x^{1993}) + f(y^{1993})$ . Да се намери  $f(\sqrt{5753})$ .

**Задача 3.** Намерете всички тройки  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$  от цели положителни числа, за които всяко число дели сумата на другите две.

**Задача 4.** Нека  $f(n) = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]$  за всяко цяло положително число  $n$ . Намерете всички  $n$ , за които  $f(n) = 1$ . (С  $[x]$  е означена цялата част на числото  $x$ .)

*Втори ден (време за работа 4 часа)*

**Задача 5.** Решете в цели числа уравнението

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$

**Задача 6.** Даден е остроъгълен триъгълник  $ABC$  с височини  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$ . Да се докаже, че  $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$ , където  $H$  е ортоцентърът на триъгълника.

**Задача 7.** Нека  $n$  е цяло положително число и  $a_1, a_2, \dots, a_n$  са реални положителни числа. Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n \frac{s - a_i}{a_i} \geq n(n-1),$$

където  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

**Задача 8.** Даден е триъгълник  $ABC$ , чийто върхове са единствените точки от страните му с целочислени координати. Ако  $G$  е единствената точка от вътрешността на триъгълника с целочислени координати, да се докаже, че  $G$  съвпада с центъра на тежестта на  $\triangle ABC$ .

**АВСТРАЛИЙСКА ОЛИМПИАДА  
1994 г.**

*Първи ден (време за работа 4 часа)*

**Задача 1.** В триъгълника  $ABC$  точките  $M$  и  $N$  са от страната  $BC$  така, че  $BM = MN = NC$ . Права, успоредна на  $AC$ , пресича правите  $AB$ ,  $AM$  и  $AN$  съответно в точките  $D$ ,  $E$  и  $F$ . Докажете, че  $EF = 3DE$ .

**Задача 2.** Докажете, че ако  $x$  е цяло число, то числото  $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{15}x$  е също цяло.

**Задача 3.** Дълчините на страните на  $\triangle ABC$  са цели числа, а дълчините на  $AB$  и  $AC$  са взаимно прости. Допирателната към описаната окръжност в точката  $A$  пресича правата  $BC$  в точката  $D$ . Докажете, че дълчините на  $AD$  и  $CD$  са рационални числа и никоя от тях не е цяло число.

**Задача 4.** Намерете всички функции  $f$ , дефинирани в множеството на рационалните числа, приемащи реални стойности и изпълняващи условието  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ .

*Втори ден (време за работа 4 часа)*

**Задача 5.** Нека  $\{a_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) е редица, за която  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1 + q$  и

$$\frac{a_{2k-1}}{a_{2k-2}} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}, \quad a_{2k} - a_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k}$$

за всяко цяло положително число  $k$ . Докажете, че за всяко положително реално число  $q$  съществува цяло положително число  $N$  така, че  $a_n > 1994$  за всяко  $n > N$ .

**Задача 6.** Нека  $n$  е цяло положително число. Докажете, че  $2n+1$  и  $3n+1$  са точни квадрати тогава и само тогава, когато  $n+1$  е едновременно сума на два последователни точни квадрати и сума на точен квадрат и удвоен точен квадрат.

**Задача 7.** В Петата азиатска пасифик математическа олимпиада през 1993 г. участвали ученици от 13 страни. Те били разпределени в 5 възрастови групи. Докажете, че поне 9 от участниците са имали повече противници от своя пол в своята група отколкото сътборници (от същата страна) от същия пол.

**Задача 8.** В успоредника  $ABCD$  точките  $E$  и  $F$  са съответно от страните  $AB$  и  $CD$ . Нека  $G$  е пресечната точка на  $AF$  и  $ED$ , а  $H$  е пресечната точка на  $EC$  и  $FB$ . Докажете, че  $DL = BM$ , където  $L$  и  $M$  са пресечните точки на  $GH$  съответно с  $AD$  и  $BC$ .

# ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КОНТРОЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА НАЦИОНАЛНИЯ ОТБОР ЗА БАЛКАНИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА (от стр. 3)

1. Нека  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 17$  и  $g(y) = y^3 - 3y^2 + 5y + 11$ . Докажете, че уравненията  $f(x) = 0$  и  $g(y) = 0$  имат единствен реален корен. След това проверете, че  $g(2 - x) = 0$ , ако  $f(x) = 0$ .  
Отг.  $x + y = 2$ .

2. Нека  $CE$  и  $BF$  са височините в  $\Delta ABC$  съответно към страните  $AB$  и  $AC$ . Точки  $A, E, P, H, F$  и  $Q$  лежат на една окръжност с диаметър  $AH = QP$ . По-нататък покажете, че  $QP$  е симетрала на  $EF$ . Освен това точките  $E, B, C, F$  лежат на една окръжност с център – средата  $M$  на  $BC$ . Централата на двете окръжности е симетрала на  $EF$  и значи съвпада с  $QP$ , т.e.  $QP$  минава през  $M$ .

3. Нека  $s$  е показателят на  $m$  по модул  $p$ . С помощта на условието от задачата покажете, че  $s = 2^{n+1}$ . От друга страна, по малката теорема на Ферма следва, че  $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  и значи  $2^{n+1}$  дели  $p - 1$ .

4. а) Нека оцветяването е такова, че всеки правоъгълник, успореден на координатна равнина, изпълнява условието. Използвайте това условие за шестте стени на някой от разглежданите паралелепипеди и покажете, че той има 0, 4 или 8 бели върха. Ако е изпълнено обратното условие и  $ABCD$  е правоъгълник с  $a$  бели върха, разгледайте паралелепипедите  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ,  $ABCDA_2B_2C_2D_2$  и  $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ , където правоъгълниците  $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$  имат съответно  $a_1$  и  $a_2$  бели върха и са получени от  $ABCD$  чрез трансляция по онази от осите, която е перпендикулярна на  $ABCD$  (такава трансляция съществува, поради  $n > 1$ ). От условията  $a + a_1 \equiv a + a_2 \equiv a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{4}$  следва, че  $a \equiv 0 \pmod{2}$ .

б) Нека  $f(x, y, z) = 1$ , ако точката  $(x, y, z)$  е бяла и  $f(x, y, z) = 0$  в противен случай. Покажете, че за търсените оцветявания е изпълнено  $f(x, y, z) \equiv f(x, 0, 0) + f(0, y, 0) + f(0, 0, z) \pmod{2}$ . Последното означава, че оцветяването на точките от осите определя еднозначно оцветяването и на останалите точки. Отг. 72 при  $n = 1$  и  $2^{3n+1}$  при  $n > 1$ .

## АКО КАНДИДАТСТВАТЕ В АМЕРИКАНСКИЯ КОЛЕЖ

(от стр. 33)

- |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1.  | (D) | 2.  | (D) | 3.  | (E) | 4.  | (A) |
| 5.  | (B) | 6.  | (B) | 7.  | (E) | 8.  | (C) |
| 9.  | (C) | 10. | (C) | 11. | (D) | 12. | (C) |
| 13. | (D) | 14. | (C) | 15. | (B) | 16. | (B) |
| 17. | (A) | 18. | (C) | 19. | (C) | 20. | (D) |
| 21. | (D) | 22. | (C) | 23. | (A) | 24. | (A) |
| 25. | (D) |     |     |     |     |     |     |

## АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ

(от стр. 21)

1. а) Остроъгълен; б)  $S = 84$ ; в)  $h_a = 12$ ; г)  $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{673}$ ; д)  $l_c = \frac{28\sqrt{13}}{9}$ ; е)  $r = 4$ ; ж)  $R = \frac{65}{8}$ ; з) 6, 6, 7, 7, 8, 8; и) Разгледайте правоъгълния трапец с върхове центровете на двете окръжности и ортогоналните им проекции върху страната  $AB$ . Отг.  $\frac{1}{8}\sqrt{65}$ .
2.  $AB = 25, BC = 20, AC = 15$ .
3.  $BC = 7, AC = 8, S = 10\sqrt{3}$ .
4.  $BC = 14, AC = 6, AB = 10$  (или  $AC = 10, AB = 6$ ).
5.  $AC = 5, BC = 7$ .
6. 7, 15, 20.
7.  $AB = 15, BC = 14, AC = 13$ .
8.  $AB = 7, AC = 3, BC = 5$  (или  $AC = 5, BC = 3$ ).
9.  $AB = 7, BC = 5, AC = 3$ .
10. а)  $A_1B_1 = \sqrt{291}, B_1C_1 = 19, A_1C_1 = 26$ ;  
б)  $AM = \frac{38}{\sqrt{3}}, BM = \frac{52}{\sqrt{3}}, CM = 2\sqrt{97}$ ; в)  $\frac{70}{\sqrt{3}}$ .
11. Използвайте предната задача. Отг.  $BC = 13; AC = 8, AB = 15$  (или  $AC = 15, AB = 8$ ).
12. Използвайте равенството  $\cot \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$  (което се получава от  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  и  $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ ) и аналогичното равенство за  $\cot \gamma_1$ ; в) Равностранен.
13. а)  $30^\circ$  или  $150^\circ$ ; б) Използвайте равенството  $\cot \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$  (което се получава от  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  и  $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ ) и аналогичното равенство за  $\cot \gamma_1$ ; в) Равностранен.
14. а)  $\frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \varphi$ ; б)  $\frac{p^2 - q^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$ .
15.  $\frac{108}{25} \cdot \frac{8R^3 r^3}{(R^2 + r^2)^2}$ .
16.  $\frac{2ab}{a+b}$ .
17.  $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ .
18. а) За триъгълника  $AMB$  приложете упътването към задача 13 б); б) Ъгълът  $AMB$  е най-малък, когато  $M$  съвпада с  $C$  или с  $D$  и е най-голям, когато  $M$  е средата на  $CD$ .
19. а)  $MN = \frac{2ab}{a+b}$ .
20.  $MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .

22. а) 354; б) 84; в) 354; г) Означете  $AB = x$  и по хероновата формула изразете чрез  $x$  лицата на равнолицевите триъгълници  $ABC$  и  $ABD$ . От полученото уравнение се намира  $x = 28$ . След това пресметнете височината на трапеца и от триъгълника  $ACD$  намерете  $CD$ . Отг. 330.

23. 84.

24.  $18\sqrt{5}$ .

26. Използвайте предната задача.

Отг.  $\frac{ab(a+b)}{2(a-b)} \operatorname{tg} \alpha$ .

27.  $\frac{2\sqrt{3}a^2}{9}$ .

29.  $2\sqrt{505}$  и 672.

30.  $6\sqrt{2}$ .

31. Четвъртият ъгъл на четириъгълника има мярка  $\frac{\pi}{2}$ . Възможни са два случая: двата прави ъгъла на четириъгълника са при съседни върхове или са при срещуположни върхове. Отг. Лицето на четириъгълника е равно на  $6R^2$ , а ъгълът между диагоналите му има синус, равен на  $\frac{6}{\sqrt{37}}$  в първия случай и е прав ъгъл във втория случай.

32. а) Използвайте задача 25; б)  $r^2 + r\sqrt{r^2 + 4R^2}$ .

33. б)  $\alpha = 60^\circ$ .

34.  $\alpha = 45^\circ$ .

35. а) Докажете, че триъгълниците  $ABC$  и  $ADC$  са равнолицеви, откъдето изведете равенството  $ABC = AD \cdot CD$ ; б)  $x = 2$  (и тогава  $ABCD$  е квадрат).

36.  $\frac{a^3}{12\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} - 1}$ .

39. а)  $\frac{1}{6}$  и  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $30^\circ$ .

40. Търсеното разстояние е равно на разстоянието от коя да е точка на правата  $BC_1$ , например  $B$ , до равнината  $ACD_1$  (която е успоредна на  $BC_1$  и минава през  $AC$ ). За намирането му изразете по два начина обема на пирамидата  $ABCD_1$ .

Отг.  $60^\circ$  и  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

41.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

42.  $\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$ .

43. а)  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  и  $\frac{4 + \sqrt{3} + \sqrt{7}}{4}$ ; б)  $\sqrt{\frac{3}{7}}$ ; в)  $\sqrt{6}$ .

44.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .

45. Основата на пирамидата е правоъгълен равнобедрен триъгълник и ортогоналната проекция на върха ѝ е средата на хипотенузата му. Отг.  $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ .

46. Докажете, че около трапеца  $ABCD$  може да се опише окръжност (и следователно той е равнобедрен) и ортогоналната проекция на върха  $M$  е центърът на тази окръжност. Отг.  $756\sqrt{7}$ .

47. Докажете, че в основата на пирамидата може да се впише окръжност и ортогоналната проекция на върха ѝ е центърът на тази окръжност.

Отг.  $\frac{h^3 \operatorname{tg} \beta}{6 \sin \alpha}$  и  $\frac{h^2}{\sin \alpha \cos \beta}$ .

48. Сечението е равнобедрен трапец.

Отг.  $\frac{\sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$ .

49. Сечението е четириъгълник с взаимно перпендикуляри диагонали. Отг.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

50. а) Равенството се достига, когато точката  $M$  е средата на ръба  $AB$ ; б) Сечението е ромб, когато точката  $M$  е такава, че  $AM : MB = a : b$ .

51. Сечението е правилен шестоъгълник с върхове средите на ръбовете  $AA_1$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CC_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $A_1D_1$ . Отг.  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

52. Сечението е ромб. Отг.  $\frac{\sqrt{11}}{3}$ .

53. Сечението е равнобедрен трапец с голяма основа  $AC$ . Отг.  $\frac{9\sqrt{127}}{4}$ .

54. Точката  $H$  е ортоцентърът на остроъгълния триъгълник  $A_1BD$ . Сечението е трапец с голяма основа  $BC_1$  и малка основа с краища средите на ръбовете  $AD$  и  $DD_1$ . Отг.  $36\sqrt{5}$ .

55. а) Приложете косинусовата теорема за триъгълниците  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$  и използвайте, че  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$ ; б) Сечението е петоъгълник, четири от върховете на който са средите на ръбовете  $AB$ ,  $AD$ ,  $BM$ ,  $DM$ , а петият връх лежи върху ръба  $CM$ . Отг.  $\frac{28}{3}$ .

## АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛАС...

(от стр. 28)

1. а)  $b^2$  б)  $2a^4(1 - 2a^4)$

2. а)  $a^m(1 + a)$  б)  $a^{2m-1}(a - 2)(a + 2)$

в)  $a^{m+1}(1 - 5a)(1 + 5a)$

3. а)  $a(a + 1)(a + 2)$

4. а)  $(a + 3)(a + 1)(a - 1)$

5. а)  $a(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)$

8. а)  $(a - b)(b - c)(c - a)$

9. а) 3 б) 0; -0,8 в) -1 г) всяко  $x$

д) няма решение

10. а)  $x \geq 3$  б) всяко  $x$  в) няма решение

11. а)  $4a(a - 1)^2(a + 1)^2$

13. а) няма б)  $-5, -4, -3, -2, -1$

14. а)  $-5; 7$  б)  $-3; 1; 5; 9$  в) 3 г) 2

15. а)  $x = \frac{a+3}{a^2+1}$

6)  $a \neq 0, \pm 1; x = \frac{1}{a(a+1)}$ ;

$a = 0, -1$ ; няма решение

$a = 1$ ; всяко  $x$

в)  $a \neq 2; x = \frac{b-1}{a-2}$ ;

$a = 2, b \neq 1$ ; няма решение;

$a = 2, b = 1$ ; всяко  $x$

г)  $a \neq 0; x = -\frac{1}{a}, x = \frac{2}{a}$

$a = 0$ ; няма решение

д)  $a > 2; x = \frac{a-1}{a}, x = \frac{3-a}{a}$

$a = 2; x = 0,5$

$a < 2$ ; няма решение

16. а)  $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$  б)  $a = -0,2$

17.  $a = 4; (1; -1)$

18. 7,5 кв.см

19. а)  $f(x) = x + 3$ ; б)  $(-3; 0), (0; 3)$ ; в)  $x \geq 8$

20. а)  $(x - 2)^2(x + 2)$

21. 25

22. а) 18 км/ч, 12 км/ч; б) 4 мин.; в) най-много на 18 км

23. 13.00 ч.; 5 ч., 3 ч. 45 мин.

24.  $\frac{v_1 t}{v_2 - v_1}$

25. 1200 билета

26. След 6 дни

27. а) 2160 дка; б) 6 дни; в) най-малко за 8 дни.

28. 6 дни

29. ако  $a < b$ ,  $\frac{b(a-1)}{b-a}$ ; ако  $a \geq b$ , няма решение

30. 50 см<sup>3</sup>, 100 см<sup>3</sup>

31. 1 кг, 7 кг

32. 200 г; най-малко 1,8 кг

33.  $\frac{bp}{a+b}\%$ ;  $\frac{ap}{100-p}$  л.

(продължение от стр.41)

```

h : array[0..n] of 0..2 = (0,0,0,0,0,0,0);
var a,b,c : array[1..3] of integer;
procedure find1(var i:integer);
begin
  i:=1;
  while (i<=n) and (d[i][0]<4) do i:=i+1;
end{find1};
procedure find2(var i:integer);
  var j,k,l : integer;
begin
  j:=1;
  while (j<=n) and (h[d[a[1]][j]]<>2)
    do j:=j+1;
  if j>n then j:=1;
  for k:=1 to 3 do
    begin
      l:=j+k;
      if l>d[a[1]][0] then l:=l-d[a[1]][0];
      c[k]:=d[a[1]][l];
    end;
  i:=c[2];
end{find2};
procedure find3(var i: integer);
begin
  if h[c[1]]=0 then i:=c[1] else i:=c[3];
end{find3};
begin
  find1(a[1]); h[a[1]]:=1;
  writeln('My first move: ',a[1]);
  write('Your first move ->');
  readln(b[1]);
  h[b[1]]:=2; find2(a[2]); h[a[2]]:=1;
  writeln('My second move: ',a[2]);
  write('Your second move ->');
  readln(b[2]); h[b[2]]:=2; find3(a[3]);
  writeln('My third move: ',a[3],' I win.');
end.

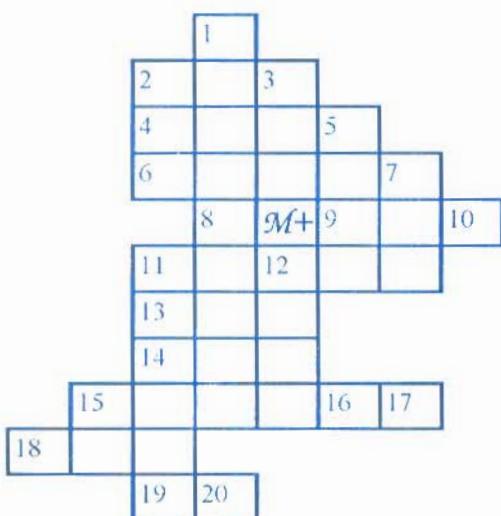
```

### Очаквайте в следващия брой:

- \* Ако кандидатствате във ВУЗ – подготовка и примерни теми
- \* Ако кандидатствате в езикови училища, математически гимназии и техникуми – примерни теми
- \* Ако кандидатствате в Американския колеж – примерен тест
- \* Обобщение на една екстремална задача – проф. д-р Сп. Манолов
- \* Етюди на тема инверсия – ст.н.с. Г. Ганчев
- \* Конкурсът ПЪТНАМ – доц. Л. Давидов
- \* M+ томбола и M+ игра с награди ЛЕГО
- \* Притурка M+



# М + УСМИВКА

## Кръстосло В И Ца

**Водоравно:** 1. Една третина от ЛЕВ.  
 2. Главен виновник за гвойките по Анализ I част (виж [1]). 4. Геометрично понятие, което в случай, че приема стойности между  $90^\circ$  и  $180^\circ$ , получава епитет, използваш се и за хора (предимно в емоционални спорове).  
 6. БъРЗ със знак минус. 8. Общото начало на РИБА и РАК. 9. Международният олимпийски комитет (поставен натясно). 11. Голям английски физик и математик - предсказал позитрона, прословут с изискването

си за прецизност в изказванията (виж [2]). 13. Откривателят на моторния двигател (погледнато математически, името му започва от нищо и завършва като нищо). 14. Знакът : , преведен на български. 15. Първа братовчедка на буквата А, която е от гръцки произход и е дала името на вид смятане. 18. Това, с което шахът завършва, а МАТЕМАТИКА започва. 19. Прочут вълшебник, името на който никои произнасят като кратък телефонен номер.

**Отвесно:** 1. Това, което прави единицата на нищо. 2. Част от геометричното тяло или от чорап (не от всеки). 3. Цар, на когото депутатите дълго не даваха корона. 5. Теорема с комплекс за малоценост. 7. Това, което за бабите ни е било връх на математическа компетентност, а за днешните ученици от 3 клас е необходимо условие да вържат тройката. 10. Това, което най-често застава между 2 и  $\pi$  при решаване на тригонометрични уравнения. 11. Команда, която предшества условие, свързано с изпълнението или прекратяването на цикъл. 12. Геометрична фигура, започваща с Р и завършваща на ОМБ. 15. Първият или шестият тон от гама без диези и bemoli в зависимост от това, дали настроението ви е минорно или мажорно. 16. 50% съгласие. 17. Обичаен монолог на пациент при ларинголог. 18. Звук, имитиращ мислене, когато се правим, че знаем отговора. 20. Близнак на любимата оценка на студентите.

### ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Я. Тагамлички, Учебник по диференциално и интегрално смятане  
 [2] МАТЕМАТИКА ПЛЮС, бр. 1, 1993, стр.13



Жен И Сен

# MONTANA TRADING COMPANY

Winsome Computing Systems

Представя

# Key2Win

Version 2.0

## Кирилица и многоезикова работа с Windows и DOS

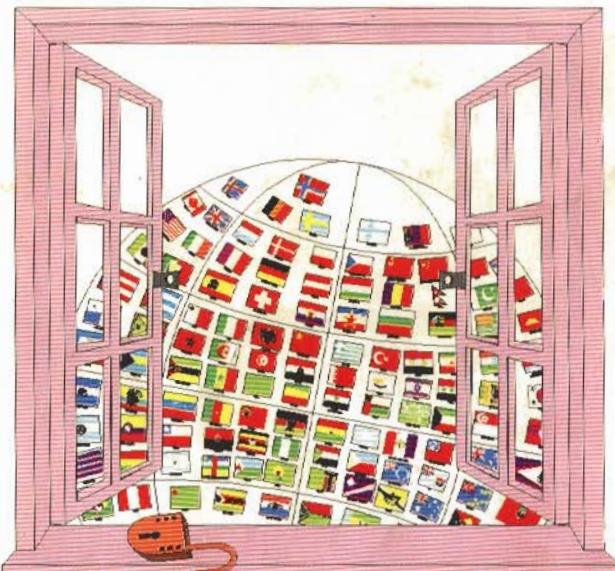


НЕНАДМИНАТА ФУНКЦИОНАЛНОСТ НА ДОСТЪПНА ЦЕНА

*Най-интернационалната програма за Windows в света – Key2Win позволява работа с почти всички езици на земята в средата на Windows. Пълна съвместимост с всички приложения за Windows. Дори да използвате само кирилица, Key2Win е най-разумният избор за Вас.*

Някои от възможностите, които Key2Win предоставя са:

- Едновременна работа с практически неограничен брой клавиатури, с поддържане на отделни лични конфигурации за всеки потребител на даден компютър.
- Бързо превключване между клавиатурите чрез указанi от потребителя произволни „горещи“ клавиши.
- Лесно създаване на нови или промяна на съществуващи клавиатурни таблици, с използване на всички възможности на оригиналните клавиатурни драйвери за Windows.
- Поддържане на специфични за всеки език системни обработки, като правилно сортиране и прехвърляне между големи и малки букви.
- Възможност за автоматично превключване между кодови таблици и избор на езиковата обработка при което и да е национална клавиатура.
- Пълна съвместимост между текстове за DOS и Windows, с използване на специфична езикова информация, автоматично осигурена при използване на Key2Win за DOS.
- Автоматична промяна на посоката на писане при използване на клавиатури за арабски и иврит.
- В българското издание на Key2Win са включени всички системни шрифтове и 8 True Type шрифта с (всичките им очертания) за кирилица, покриваща български, руски, сърбо-хърватски и гр.
- Стандартният пакет включва над 30 клавиатурни дефиниции за различни езици (включващи български, гръцки и турски).



... Системни и True Type шрифтове, както и библиотеки за специфична езикова обработка, за национални азбуки, различни от кирилица, като арабски, гръцки, иврит и турски, се продават отдельно за \$9.99 за пакет. Моля проверете за наличност.

ОТКЛЮЧЕТЕ ВАШИТЕ ПРОЗОРЦИ КЪМ СВЕТА:

## Key2Win - Ключовият Избор за Windows

Key2Win струва \$49.99, а цената на подобренето (Upgrade) за потребители на Версия 1.0 или на други кирилизации програми за Windows е само \$8.99 спрям оригиналните дискети.

Цените не включват ДДС и могат да бъдат променени без предупреждение. Key2Win е регистрирана търговска марка на Winsome Computing Systems. Всички други споменати търговски марки, регистрирани или не, са собствености на съответните им притежатели.

Официален дистрибутор:  
Монтана Трейдинг Къмпани,  
бул., „Цар Борис“ III 1368, София 1618  
тел.: (+3592) 560 821; факс: (+3592) 576 973.  
OEM enquires are welcome

ISSN 0861-8321

Цена 35 лв.