

МАТЕМАТИКА и ИСКУССТВО

Математика и Искусство

списание за математика и информатика

2

1995

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

списание за математика и информатика

*одобрено от Министерството на образованието, науката
и технологията за класна и извънкласна работа*

Редакционна колегия:

Сава Грозев и Олег Мушкаров — главни редактори

*Евгения Сендова, Георги Ганчев, Иван Тонов, Емил Келеведжиев,
Петър Миланов, Яни Арнаудов, Ваня Хаджийски, Кирил Банков,
Кристиян Янков, Светлозар Дойчев, Христо Лесов*

Компютърен дизайн:

Татяна Пархоменко, Огнян Тунтев, Владимир Ангелов

Директор:

Мадлен Петрова

Списанието се издава със съдействието на
Институт по математика – БАН

Адрес на редакцията:

Институт по математика — БАН, стая. 517,
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София
тел. 713-28-26

e-mail: SAVAGROZ@BGEARN.BITNET

Материалите за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници, да са напечатани на пишеща машина (листове формат А4, 30 реда по 60 знака) или на компютър. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

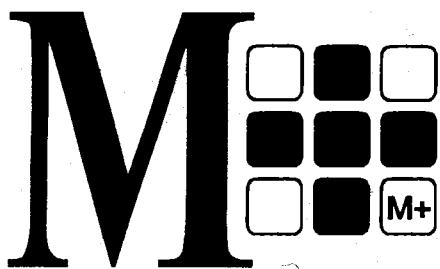
© МАТЕМАТИКА ПЛЮС ®

Формат: 600 × 840/8

Ладена за печат на 20.04.1995 г.

Печатни коли 9

Подписана за печат на 02.05.1995 г. ISSN 0861-8321



МАТЕМАТИКА ПЛЮС е списание за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и информатиката направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математическите гимназии и техникумите; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

ДЕСЕТ ГОДИНИ БЕЗ ИВАН ПРОДАНОВ – проф. Иван Чобанов	4
М+ЕКСПРЕС – НАЦИОНАЛНИЯТ ОТБОР ЗА БАЛКАНИАДАТА В ПЛОВДИВ	6
М+СВЯТ – ЗАДАЧНИК КВАНТА	7
КОНКУРС С НАГРАДИ ЛЕГО	9
М+ПОСТЪР (ЗАДАЧИ 4–11 КЛ.)	11
ОЛИМПИАДИ + ПОДГОТОВКА	12
ОБОЩЕНИЕ НА ГЕОМЕТРИЧНАТА ЗАДАЧА ОТ МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА В ХОНКОНГ – Георги Ганчев	13
ЗАДАЧИ М+	16
АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛАС	19
АКО КАНДИДАТСТВАТЕ В АМЕРИКАНСКИЯ КОЛЕЖ	23
ПОДГОТОВКА ЗА ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ	25
АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ	27
ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ, РЕШЕНИЯ	32
КОНКУРС ПО ИНФОРМАТИКА	45
АКО КАНДИДАТСТВАТЕ В 1 КЛАС	46
М+НАЙ-МАЛКИТЕ – ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ (КОНКУРС уМ+)	48
ТОМБОЛА М+ (НАГРАДИТЕ ОТ БР. 4, 1994 Г.)	56
М+УСМИВКА	
ПРИТУРКА М+	

Драги читатели,

В началото на м. април в гр. Свищов се състоя V конгрес на Съюза на математиците в България и традиционната Пролетна конференция. Наред с богатата научна програма на конференцията се провеждаха инициативи в Ученическата секция. Участниците в нея докладваха свои реферати и се състезаваха в решаването на тест. Измежду проявилите се ще спомена десетокласника Калин Костадинов от гр. Видин. Една от кулминациите на конференцията беше обявяването на наградите на Фондация „Св. св. Кирил и Методий“, за които се състезаваха изявени учители по математика и информатика от цялата страна. При определяне на победителите се взеха предвид класирания на ученици на кандидата на международни, национални и регионални състезания и олимпиади, публикации на кандидата или на негови ученици, изяви в научни и методически конференции и др. Главният секретар на фондацията г-н Михаил Тачев обяви Пламен Пенчев, ПМГ – гр. Добрич за учител на 1995 г. Той получи грамота и награда в размер на 35 хил. лв. Подгласници на Пл. Пенчев са Боянка Савова и Павлин Peev. Те също получиха грамоти, а наградите им са командировки за участие съответно в Балканиадата по математика и Балканиадата по информатика през настоящата година. Наградата на СМБ спечели Румен Раев от гр. Русе, който също се командирова за участие в Балканиадата по математика. Ето кратки данни за победителите.



Пламен Пенчев е пом. директор на ПМГ „Иван Вазов“ в гр. Добрич. Той е автор на множество статии и съавтор на математическите пособия „Задачи за математически олимпиади“ и „Факултативна подготовка по математика за X клас“. От 1982 г. е председател на секцията на СМБ в гр. Добрич, а от 1992 г. е член на УС на СМБ. Ежегодно той участва в подготовката на националния ни отбор със свои материали, лекции и публикации. Някои от най-изявените му ученици са: Дико Михов, Владимир Балчев, Владимир Михов, Августин Marinov, Живко Велев, Валентин Стоянов и др.

Боянка Савова е завършила математика през 1970 г. в Софийския университет. Била е учителка в МГ „Баба Тонка“, Русе. По-късно става асистент в сектор „Образование“ на ЕЦММ, където работи под ръководството на проф. Алипи Mateev. Понастоящем е пом. директор на НПМГ. Автор е на няколко статии. Измежду най-изявените ѝ ученици са: Драгомир Петков, Ивайло Кортезов, Пламен Коев, Ивайло Бакалов и Тихомир Аспарухов.



Павлин Peev е роден през 1956 г. в гр. Стара Загора. Завършил е математика в Пловдивския университет. Работил е като завеждащ отдел в ЦУТНТ – Ст. Загора. Понастоящем е учител по информатика в ПМГ „Гео Милев“, Ст. Загора. Ръководител е и на кабинет по ЕИТ. Автор е на няколко разработки. Ученици, подгответи от него, са участвали в редица международни състезания и олимпиади по информатика. Популярни от тях са: Павел Бойчев, Атанас Банов, Цветомир Петров, Йасмин Желев и Георги Peev.

Румен Раев е роден през 1959 г. в гр. Русе. От 1983 г. до 1985 г. е учител, а от 1985 г. до 1987 г. е завеждащ отдел „Математика“ в ЦУТНТ, Русе. Понастоящем е асистент в катедра „Математически анализ“ в ТУ „А. Кънчев“. Най-изявените му ученици са Борислав Деянов, Борис Димитров и Любомир Борисов.

Драги читатели, благодаря ви за многобройните писма. В много от тях поставяте интересни и важни проблеми. Предлагам ви писмото на проф. д-р Петър Попиванов, ръководител на секция „Диференциални уравнения“ при Института по математика на БАН.

„Уважаеми господи,

Пиша ви като читател на вашето списание и някогашен участник (преди повече от 30 години) в математическите олимпиади. Силно впечатление ми прави изключително динамичната работа по математика със средношколците, а напоследък и с 10–13 годишните младежи. Висококвалифицирани специалисти от система на БАН, СУ и други висши учебни заведения, а също така и многочислени групи от учители с много ентузиазъм, трудолюбие и завидна енергия подготвят младото поколение за достойно място в областта на природните, а до известна степен и в редица хуманитарни науки. Става дума не само за обучението в клас, но и за впечатляващо разнообразните форми на извънкласна активност – задочни школи, олимпиади, състезания и др.

Аз разглеждам цялата тази активност като подборна дейност, като възможност да „се отсегат“ в известен смисъл младежите в зависимост от техните заложби, да се намерят най-добрите, да се открият солидна „средна линия“, която е гръбнакът на всяко научно или научно-приложно дирене.

Не пиша за несъмнените успехи – тях читателите ги знаят по-добре от мен.

Моята цел е да се опитам да ги предпазя от известно неразбиране или увлечение. Наистина голяма част от гореспоменатите форми имат състезателен характер и навяват определени асоциации със спорта – за фиксирано време да се спечелят максимален брой точки.

Затова да не смесваме селективността, бързото хрумване, сръчното комбиниране на заучени положения и спортната стръв, с реалните ценности на математическата наука. Достатъчно е да си спомним повече от 300 годишната история на Великата теорема на Ферма и факта, че дори гени като Ойлер, Гаус и крупни умове като Кумер не се справиха с нея за целия си живот. Следователно не всичко е мат „в два хода“, не всичко е спорт. Талант и дългогодишен упорит труд са гаранция за истински успех.“

Мисля, че проф. Попиванов е прав, и вие ще се съгласите с мен. Умението да се решават задачи, било то бавно или бързо, е важно, но не е достатъчно, за да стане човек истински математик. Математиката е не само боравене с числа и факти. Тя е култура и изкуство и затова трябва да се изучава задълбочено. Очаквам вашите мнения по повдигнатия въпрос. Пишете ни!

Искрено ваш, д-р М. Плюс

ДЕСЕТ ГОДИНИ БЕЗ ИВАН ПРОДАНОВ

професор Иван Чобанов

*"Sine me, liber, ibis in Urbem"**
Ovidius: Elegiae

Преди 10 години, на 24 април 1985 г., внезапно почина Иван Проданов, роден на 5 август 1935 г. – сиреч, преди да е навършил 50 години. Няма да повтарям шаблона, че това беше голяма загуба за българската математика, защото такова нещо не съществува. Както е казал Чехов, няма национална наука, както няма и национална таблица за умножение. Също шаблон би било да кажа, че угасна една от най-ярките (ако ли не и най-ярката) звезди на математическия ни небосклон. Угасна в миг като метеор и като метеор остави блъсъка на следата си в очите на онези, които бяха имали щастията да го видят. Защото казано е някъде за някои: „Очи имат и не ще видят“. Той умря в разцвета на силите си, сред кипежа на трескаво творчество, в центъра на амбициозни научни проекти, на прага на обаятелни професионални перспективи.

Иван Проданов беше феномен. И то феномен не само за една територия от 100 000 кв.км. Той би могъл да бъде украсение на кой да е университет в света, на която и да е академия, на който и да е център за перспективни изследвания. За нашата страна той би бил без прецедент, ако не беше явлението Обрешков. Във всеки случай щафетата не бе изпусната.

Читателите не ще намерят в тези бележки нито биографични данни за человека, нито библиография на трудовете му, нито анализ на постиженията му. Такива сведения има в научния некролог във „Физико-математическо списание“ (т. 27 (60), 1985 г.) на Тодор Генчев и в статията „Иван Проданов“ в сборника „Български математици“ („Народна просвета“, 1987 г.) на Димитър Скордев. Характеризирали Проданов, колегите Генчев и Скордев го квалифицират като „един от най-талантливите и най-ярко изявени математици от средното поколение“, „самобитен учен, вдъхновен и всеотдаен университетски преподавател и неуморим, темпераментен популяризатор“, „надарен с ярък педагогически талант“, „човек с будна гражданска съвест и с изострено чувство за лично достойнство“, „леко и беззлобно ироничен, с фини аристократични маниери“, „изключително надарен човек“, „забележителен човек и учен“, „голям математически талант ... със силно развито чувство за истинските ценности в математиката“ и пр. Всичко това е така и аз се присъединявам към тези оценки. Но има неща, които бих желал да добавя, за да допълня картината.

Случвало ми се е на лекции да казвам: „Правилният избор на координатната система в една геометрична или механична задача е не по-малко важен от правилния избор на родителите на човека в буржоазно общество“. (Това „буржоазно“ беше разбира се за камуфлаж и в почти вски курс имаше студент, който да не се стърпи: „А в социалистическо?“) Какъв е бил изборът на родителите му от страна на Иван Проданов с оглед на бъдещото му призвание? Отговорът е: във висша степен неблагоприятен. Той не е имал и най-нищожни предимства – с изключение на самия себе си. Това, че се е самооткрил, смятам за най-голямото математическо откритие на Иван Проданов. Представете си момента, в който едно селско момче е разбрало, че може нещо и то не какво да е, а математика – както никой



* Без мене, книго, ще идеш в Града (лат.).

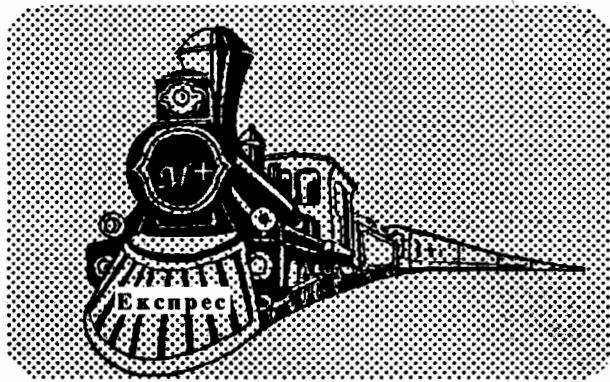
наоколо не го може! В автобиографията си той формулира това така: „В Габрово завършил петгодишния курс на Техникума по механо-електротехника, но ми се наложи с помощта на приравнителни изпити да се дипломирам в Априловската гимназия, за да избегна необходимостта преди следването си да правя двугодишен трудов стаж“. Ако той не бе онова, което американците наричат *self-made*, то аз не знам, кой друг е. Като казах „селско момче“, желая да уточня. Казано е с любов. Фолклорът твърди, че всеки българин може да намери на тавана цървулите на дядо си. Иван Проданов беше селянин с всички онези добродетели на селото, за които скоро ще може да се говори само в минало време. Но той беше най-големият аристократ на духа, а маниерите му бяха много по-аристократични от мнозина, завършили Дойче шуле или Френския или Американския колеж. Можем само да гадаем докъде би стигнал Иван, ако от дете бе култивиран в друга среда, например средата на династията Бернули. Но всъщност, знае ли човек?

Иван Проданов беше човек и нищо човешко не му беше чуждо. Но онова, което най-силно ме е впечатлявало, беше неговият интегритет. ~~Тази дума няма адекватен български еквивалент.~~ В речника за чужди думи се казва, че произлиза от немската *Integrität*, която пък идва от латинската *integritas* – цялостност. За английската *integrity* се посочват значенията цялост, пълнота, непокътнатост, но също и честност, почтеност, чистота. Освен тях за френската *intégrité* се дават и ненарушеност, неначенатост, неприкосновеност, неподкупност. Целия този комплекс от неща имам предвид, когато говоря за интегритета на Проданов. А може би ми помогнала известната фраза „човека можеш да унищожиш, но не и да победиш“ на Хемингуей, което с Проданов всъщност и стана. Може би бих бил по-разбираем, ако се обърна за помош към геометрията. Ако мога да метафоризирам с геометрична фигура, бих казал, че той беше сфера.

Но той беше и багер. Или, ако предпочитате, булдозер. ~~Правили сме заедно~~ и други неща, но с него имам едно преживяване, когото не бих повярвал, ако друг ми го разкажеше. Имах договор с „Народна просвета“ за една книжка за числата. Нахвърлих предварителен вариант и споделих с Проданов, че не ми харесва противостествения начин, по който Ландау въвежда наредбата на натуралните числа след събирането. Не би ли могло да стане обратно? След два дни той каза, че може. Беше средата на юли. Отидохме в издателството. Обясних, че книгата трябва да се пренапише и затова оттеглям първоначалния ръкопис и искам нов договор с Проданов като съавтор. Разбрахме се с издателството окончателният ~~вариант~~ да бъде готов до края на август. Добре, но Проданов имаше карта за летуване в Созопол с по-големия си син. Договорихме се и аз да ида там, за да свършим работата от 5 август на сестне. До 4 август бях в Родопите за пъстърва. На 29 август книгата беше в издателството. Заглавието ѝ е „Числови системи“, обемът – над 300 печатни страници, а съдържанието няма нищо общо с първоначалния вариант.

В „Апология на един математик“ Харди пише: „Аз все още си казвам, когато съм подтиснат и съм принуден да слушам надути и отегчителни хора: Е добре, аз все пак съм направил нещо, което вие никога не бихте могли да направите – аз съм сътрудничил на почти равна нога с Литлууд и Рамануджан...“ Не скривам, че подобна мисъл ласкае и мен – с тази разлика, че не мога да кажа дори „почти“. В един от разказите си Джек Лондон казва за своя герой: „Той имаше сърцето на Исус и неговото търпение.“ В един от романите му пък пионер-златотърсач казва за свой другар: „И когато Господ започне да промива душите, за неговата ще трябва да сипе в коритото няколко лопати пясък.“

Такива бяха сърцето и душата на Иван Проданов. И човек се пита: Беше ли той, все пак, от мира сего?



НАЦИОНАЛНИЯТ ОТБОР ЗА БАЛКАНИАДАТА В ПЛОВДИВ

На 26 март в гр. Казанлък се проведе контролното състезание за определяне на националния отбор за Балканиадата по математика в гр. Пловдив, 7 – 13 май 1995 г. До това състезание бяха допуснати следните ученици от 8, 9, 10, 11 и 12 клас въз основа на резултатите от Зимните математически състезания, гр. Варна, 27 – 29 януари 1995 г. и Пролетния математически турнир, гр. Казанлък, 24 – 26 март 1995 г. (Пълна информация за това състезание ще намерите в притурката на този брой.)

8 клас: Кирил Сакалийски, София $19 + 15 = 34$ т.

9 клас: Иrena Наджакова, София $20 + 19 = 39$ т.; Райко Чалков, Пловдив $18 + 17 = 35$ т.; Иван Иванов, София $20 + 14 = 34$ т.; Спас Божанов, Пловдив $17 + 17 = 34$ т.

10 клас: Йордан Милев, Габрово $16 + 14 = 30$ т.; Ивайло Тодоров, Ст. Загора $10 + 19 = 29$ т.; Иван Янчев, Плевен $13 + 15 = 28$ т.; Людмила Каменова, София $19 + 16 = 26$ т.

11 клас: Тодор Миланов, Плевен $15 + 19 = 34$ т.; Иво Николов, София $20 + 9 = 29$ т.; Владимир Чалков, Пловдив $18 + 11 = 29$ т.; Григор Григоров, София $14 + 13 = 27$ т.; Борис Видолов, Пловдив $16 + 10 = 26$ т.

12 клас: Николай Николов, Бургас $20 + 20 = 40$ т.; Николай Стоянов, Варна $20 + 18 = 38$ т.; Детелин Досев, В. Търново $17 + 19 = 36$ т.; Владимир Йорданов, Варна $11 + 20 = 31$ т.; Боян Стефов, Варна $10 + 19 = 29$ т.; Диана Веселинова, Бургас $14 + 14 = 28$ т.

Контролното състезание се проведе по официалните правила на балканиадите по математика – време за работа 4 ч. 30 мин., всяка задача се оценява с 10 т. Ето и условията на задачите (кратки упътвания са дадени на стр. 32):

Задача 1. Дадени са квадратните тричлени $f(x) = 1993x^2 + 1994x + 1995$ и $g(x) = 1994x^2 + 1992x + 1996$. Да се докаже, че ако $h(x)$ е такъв квадратен тричлен, че $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ за всяко x , то съществува единствено число $\lambda \in [0, 1]$, за което $h(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ за всяко x .

Задача 2. В правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC = 15$ и $BC = 20$ е вписан $\triangle DEF$ с лице 24 така, че $EF \parallel AB$, $E \in BC$, $F \in AC$ и $D \in AB$. Намерете минималната стойност на периметъра на $\triangle DEF$.

Задача 3. Естествените числа m и n са от една и съща четност и $m^2 + 1 - n^2$ дели $n^2 - 1$. Да се

докаже, че числото $m^2 + 1 - n^2$ е точен квадрат.

Задача 4. Дадена е правоъгълна таблица $m \times n$. Едно подмножество от клетки на тази таблица се нарича Y -таблица, ако за всяка клетка (i, j) на това подмножество клетките (k, l) , $k \leq i$, $l \leq j$ са също от подмножеството. Таблицата е запълнена с цели числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Разрешени са следните операции:

1. заместване на числата a_{ij} и $a_{i+1,j}$ съответно с числата $a_{ij} - 1$ и $a_{i+1,j} + 1$;
2. заместване на числата a_{ij} и $a_{i,j+1}$ съответно с числата $a_{ij} - 1$ и $a_{i,j+1} + 1$;
3. заместване на числата a_{ij} с числото $a_{ij} - 1$.

Да се докаже, че с помощта на тези три операции таблицата може да се приведе до таблица само с нули тогава и само тогава, когато сумата от числата във всяка Y -таблица на дадената таблица е неотрицателна.

Работите на учениците бяха оценени от жури в състав: ст.н.с. С. Гроздев (ръководител на отбора за балканиадата), ст.н.с. О. Мушкаров, Пл. Кошлуков и гл. експерт Н. Райков (МОНТ). Националният отбор за Балканиадата по математика в Пловдив беше определен въз основа на сбора от точките, получени на споменатите по-горе две състезания и на контролното. Поради това, че Балканиадата се провежда в България, нашата страна се представя от два отбора. Вторият отбор беше съставен от незавършили през тази учебна година ученици.

I отбор: Н. Николов (учител Г. Панайотова) – 70 т.; Н. Стоянов (учител С. Матеева) – 58 т.; И. Николов (учител Здр. Петров) – 57 т.; Т. Миланов (учител Ж. Влахова) – 57 т.; Вл. Чалков (учител Е. Маринска) – 57 т.; Д. Досев (учител В. Иванова) – 57 т.

II отбор: Ив. Иванов (учител И. Шаркова) – 55 т.; И. Наджакова (учител Н. Попова) – 49 т.; Р. Чалков (учител Н. Радев) – 46 т.; Сп. Божанов (учител Н. Радев) – 44 т.; Ив. Янчев (учител Д. Николов) – 42 т.; К. Сакалийски (учител В. Колев) – 41 т.

Резервен състезател – Ив. Тодоров – 40 т.

В бр. 3 на МАТЕМАТИКА ПЛЮС очаквайте информация за Балканиадата по математика в Пловдив.

Д-р M. Плюс



М + СВЯТ

Поради големия интерес към конкурсените задачи на списание "Квант" ви предлагаме условията на задачите от бр. 2 и бр. 3 за 1994 г. В бъдеще МАТЕМАТИКА ПЛЮС ще публикува преводи и на други интересни материали от списание "Квант".

ЗАДАЧНИК КВАНТА

Квант 2 – 1994 г.

М 1421. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с прави ъгли при върховете B и D е вписан четириъгълник с периметър P . Да се докаже, че $P \geq 2BD$. Кога се достига равенство?

М 1422. Да се докаже, че числата 312500051 и 1280000401 са съставни.

М 1423. В шахматен турнир с трима участници всеки е изиграл с всеки от останалите двама равен брой партии. Възможно ли е победителят в турнира да има най-малко победи, а последният – най-много? (За победа се дава една точка, а за реми – половин точка).

М 1424. В редица са написани 10 цели числа. От нея се получава втора редица, като под всяко число A от първата редица се записва броят на числата, които са вдясно от A и са по-големи от A . Аналогично от втората редица се получава трета и т.н.

а). Да се докаже, че след краен брой стъпки ще се получават редици, съдържащи само нули.
б). Да се намери възможно най-големият брой редици, които не съдържат само нули.

М 1425. Три от вътрешните ъгли на неизпъкнал и несамопресичащ се четириъгълник са равни на 45° . Да се докаже, че средите на страните му са върхове на квадрат.

М 1426. Нека $S(n)$ е сумата от цифрите на числото n (в десетичен запис). Съществуват ли три различни числа m , n и p , за които $m + S(m) = n + S(n) = p + S(p)$?

М 1427. Във всяко от полетата на шахматна дъска 8×8 е прекаран един от диагоналите. Разглежда се обединението на тези 64 диагонала. То се състои от няколко свързани части (всяка такава част е начупена линия, състояща се от един или няколко диагонала). Може ли броят на тези части да е:

а). По-голям от 15?

б). По-голям от 20?

в). Може ли в аналогичната задача за шахматна дъска с размери $n \times n$ ($n > 8$) да се получат повече от $n^2/4$ свързани части?

М 1428. Всички естествени числа от 1 до n са записани едно след друго:

$$123456789101112\dots(n).$$

Може ли в полученото число всички цифри от 0 до 9 да се срещнат равен брой пъти?

М 1429. Изпъкнал многоъгълник е разрязан на изпъкнали седмоъгълници така, че всяка страна на многоъгълника е страна на някой от седмоъгълниците. Да се докаже, че съществуват четири съседни върха на многоъгълника, които са върхове на един от седмоъгълниците.

М 1430. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща редица от цели числа, за които $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_{pq} = a_p a_q$ за произволни взаимно прости числа p и q .

а). Да се докаже, че $a_3 = 3$.

б). Да се докаже, че $a_n = n$ за всяко n .

Квант 3 – 1994 г.

М 1431. С дадено естествено число се извършва следната операция: отделя се последната му цифра, умножава се по 4 и се събира с останалото число (така от 1993 се получава 211). С полученото число се извършва същото и т.н. Да се докаже, че ако в получената редица фигурира числото 1001, то в нея няма нито едно просто число.

М 1432. Да се докаже, че за всяка редица от положителни числа a_n , целите части на квадратните корени от числата

$$b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

са различни.

M 1433. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, около който може до се опише окръжност. Върху лъчите BA^\rightarrow и DC^\rightarrow са нанесени отсечки BM и DP с дължини, равни на $(AB + CD)/2$. Аналогично върху лъчите CB^\rightarrow и AD^\rightarrow са нанесени отсечките CN и AQ с дължини, равни на $(BC + AD)/2$. Да се докаже, че $MNPQ$ е правоъгълник с лице, равно на лицето на $ABCD$.

M 1434. Да предположим, че Земята е плоска. Вярно ли е, че всеки изпъкнал многостен може да се освети с фенер, разположен в точка от пространството така, че сянката му върху Земята да бъде многоъгълник с поне един о斯特ъгъл?

M 1435. Да се докаже, че за всеки полином $P(x)$ от степен по-голяма от 1 съществува полином $Q(x)$ такъв, че $P(Q(x))$ се разлага на два множителя (всички полиноми са с цели коефициенти).

M 1436. Какъв е най-големият обем на тетраедър, в който: а) 4 ръба; б) 5 ръба; в) всичките 6 ръба, не надминават 1?

M 1437*. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ е зададена с условията: a_1, a_2 и a_3 са неотрицателни цели числа

и $a_{n+3} = a_{n+1} + a_n$, $n = 1, 2, \dots$. Да се докаже, че ако p е просто число, то p дели $a_{n+3p+1} - a_{n+p+1} - a_{n+1}$ за всяко n .

M 1438. Да се докаже, че за всяко n съществува естествено число $P(n)$ такова, че всяко естествено число, което има точно n различни прости делители, всеки от които е по-голям от $P(n)$, не е съвършено. (Едно число е съвършено, ако е равно на сумата от всичките си делители, по-малки от него).

M 1439. В триъгълник страните са a, b и c , а медианите към тях са m_a, m_b и m_c . Да се докаже, че

$$\text{a). } \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{б). } \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}.$$

M 1440. Шахматна дъска с размери $m \times n$ е покрита с еднакви плочки с размери $1 \times k$. Разрешено е всеки квадрат $k \times k$, съставен от k плочки, да се завърти на 90° около центъра си. Да се докаже, че след краен брой такива операции всички плочки могат да станат успоредни.

INTERNATIONAL UNIVERSITY

1000 София, пл. Славейков 4

Обучението в International University е на английски език по програмата на Университета в Портсмут, Великобритания по специалностите: Компютърни науки, Бизнес информационни системи, Бизнес администрация, Управление на хотелите и туризма. Учебната програма в направлението по Информатика например предоставя възможност да бъдат изучавани около 80 предмета за 6 семестъра, към които се прибавят и 12 предмета през първите 2 семестъра на подготвителната първа година. Или общо над 90 дисциплини в областта на информатиката, изчислителната техника, приложната математика и програмирането са налични за изучаване. Кредитната система и личните предпочитания определят около 50 дисциплини, които всеки студент трябва да избере. Част от дисциплините са задължителни, а друга част са за свободен избор. Разбира се трябва да се следва приемственост, т.е. за да може да се изучават определени дисциплини в по-горните курсове, е необходимо в по-началните курсове да са били изучавани съответни дисциплини. Студентите разполагат с библиотека с над 3500 оригинални заглавия на английски език, компютърна лаборатория, оборудвана с хардуер и софтуер съгласно стандартите на Университета в Портсмут, с мрежа от персонални компютри, работещи под NOVELL и UNIX.

Конкурс, подгответ съвместно с

ComseD

1142 София, ул. Раковски 174

Тел/факс: 66 67 26, 68 73 75

генерален дистрибутор на

LEGO

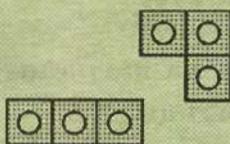


За вас, почитатели на ЛЕГО и МАТЕМАТИКА ПЛЮС!

В четирите броя на списанието от тази година се публикува по една занимателна задача. Фирма COMSED осигурява по 3 сувенирни награди за всеки брой. Наградите са за тези, които изпратят в срок вярно решение на съответната задача. Ако правилните решения са повече от 3, наградите ще бъдат разпределени чрез жребий. Читателите, които решат задачите и от четирите броя на списанието, ще участват в томболата за голямата награда ЛЕГО – конструктор 8837.

Очакваме вашите писма!

Ето и задачата за бр. 2, 1995 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС



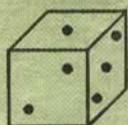
Разполагате с 3 правоъгълни и 9 „ъглови“ елементи от игрите ЛЕГО. Видът им е показан вляво. Покрайте с тях квадрат с размери 6×6 .

Краен срок за изпращане на решения 20 септември 1995 г.

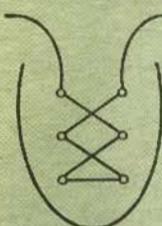
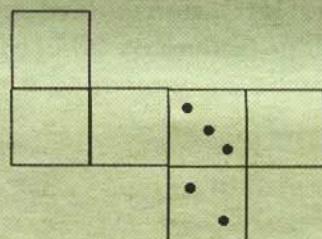


M+ томбола

ПОПЪЛНЕТЕ ВАШИТЕ ОТГОВОРИ, ЗА ДА УЧАСТВАТЕ В
ТОМБОЛА M+



1. Върху всеки две противоположни стени на едно картонено кубче са отбелязани еднакъв брой точки (от 1 до 3), както е показано на чертежа. Попълнете празните стени на развивката на такова кубче.



2. Една маратонка има 3 цифта дупки. На чертежа е показано едно симетрично навървяне на връзка, като тя минава през всяка дупка точно по веднъж, а двата ѝ края излизат през най-горните дупки. Начертайте още 4 симетрични навървания.





$\mathcal{M} + u \Gamma P A$

Ако желаете да се включите в разпределението на наградите ЛЕГО за брой 2 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете този фиш, изрежете го и заедно с решение на задачата го изпратете не по-късно от 20 септември 1995 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име Фамилия
код Селище
ул.

Изпращайте на адрес:

София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" № 49
Мадлен Николова Петрова (за М+ ИГРА)

**ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ: В разпределение на наградите
участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци,
изпратени в посочения срок!**



М + томбола

Ако желаете да се включите в лотарийното разпределение на предметните награди за томболата *M+* в брой 2 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете лицевата страна на фиша, изрежете го и го изпратете не по-късно от 20 септември 1995 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име Фамилия
код Селище
ул.

Изпращайте на адрес:

София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" № 49
Мадлен Николова Петрова (за М+ ТОМБОЛА)

ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ: В томболата участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!



М+ ПОСТЪР

(Що ли значи? - На стената и задачи!!!)

4 клас

1. Колко различни шестцифрени телефонни номера могат да се запишат с цифрите 0, 0, 7, 3, 4 и 5. Кои са повече – четните или нечетните номера?

2. Един четвъртокласник разделил квадрат на 7 квадрата, после някои от получените квадрати на още 7 квадрата и т.н. Може ли по този начин да се раздели квадрат на 1995 квадрата?

5 клас

3. Даден е четириъгълник $ABCD$ с лице 20 кв.см. Точките M, N, P и Q са среди съответно на страните AB, BC, CD и DA . Колко кв.см. е лицето на четириъгълника $MNPQ$?

4. Пресметнете израза

$$\frac{\frac{10}{63} - \frac{44}{84}}{\left(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9}\right)} : 4 - \frac{3}{4}$$

6 клас

5. Докажете, че за всяко естествено нечетно число n числото $n^3 - 7n - 6$ се дели на 12.

6. Дадена е триъгълна пирамида с връх S и основа ABC . Точките M, N и P са среди съответно на ръбовете AB, BC и CA . Намерете отношението на обемите на пирамидите $SABC$ и $SMNP$.

7 клас

7. В правоъгълен триъгълник един от остриите ъгли е равен на 60° , а сумата от дълчините на хипотенузата и по-малкия катет е равна на 18 м. Намерете хипотенузата.

8. Докажете, че уравнението $x^4 + y^4 + z^4 = 1994$ няма решения в цели числа.

8 клас

9. Да се определи най-малката стойност на

функцията $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. За кое x се достига тази стойност?

10. Докажете, че ако a, b и c са дълчините на страните в един триъгълник и

$$ab(b-a) + bc(c-b) + ac(a-c) = 0,$$

то триъгълникът е равнобедрен.

9 клас

11. Да се реши уравнението $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$.

12. Височината CD в ΔABC дели страната AB вътрешно на части AD и DB така, че дълчините на отсечките AD, CD и DB образуват геометрична прогресия. Ако M е средата на AB , докажете, че дълчините на отсечките AD, CM и BD образуват аритметична прогресия.

10 клас

13. Решете уравнението

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8) = 1+a+a^2+\dots+a^x,$$

където a е реален параметър.

14. Ако $\sin \alpha - \cos \alpha = m$, изразете

$$\frac{\sin 4\alpha + \sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + 1 - 2\sin^2 4\alpha}$$

чрез m .

11 клас

15. Да се реши уравнението

$$\sin^{1994} x - \cos^{1994} x = 1.$$

16. Намерете всички точки от повърхнината на куб, от които даден диагонал на куба (без краищата му) се вижда под най-малък ъгъл.

Задачите са предложени от Ирина Шаркова и Румяна Караджова



ОЛИМПИАДИ + ПОДГОТОВКА

В този брой ви предлагаме задачите от XVII австрийско-полско състезание (Полша, 29 юни – 1 юли 1994 г.) и тазгодишния III кръг на гръцката олимпиада – състезанието „Архимедес“ (февруари 1995 г.). В „Архимедес“ участваха около 60 ученика. От тях са подбрани 15, от които след две контролни ще бъдат определени шестимата представители на Гърция в Международната олимпиада по математика в Канада (16 – 25 юли 1995 г.).

Австрийско-полско състезание

Задача 1. Функцията $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ изпълнява условията $f(x+19) \leq f(x)+19$ и $f(x+94) \geq f(x)+94$. Да се докаже, че $f(x+1) = f(x)+1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Редищите $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ се дефинират чрез равенствата: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}$ и $c_0 = 4$, $c_{n+1} = c_n^2 - 2c_n + 2$. Да се докаже, че $a_n = \frac{c_n}{c_0 c_1 \dots c_{n-1}}$ при $n \geq 1$.

Задача 3. Правоъгълна сграда има два реда от по 15 квадратни стаи, разположени като полетата на шахматна дъска с два реда. Всяка стая има три врати, които водят към една, две или трите съседни стаи. (Вратите, водещи извън сградата, се игнорират.) Вратите са разположени по такъв начин, че от всяка стая може да се отиде в произволна друга, без да се напуска сградата. По колко начина могат да се разположат вратите така, че да е изпълнено горното условие?

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е фиксирано естествено число и нека P_0 е фиксиран връх на правилен $(n+1)$ -ъгълник. Останалите върхове са означени с P_1, P_2, \dots, P_n по произволен начин. На всяка страна $P_i P_j$ се съпоставя числото $|i-j|$. Нека S е сумата на получените по този начин $n+1$ числа.

- a) Коя е възможно най-малката стойност на S ?
- b) Колко са различните номерации, при които се получава тази минимална стойност?

Задача 5. Да се реши в цели числа уравнението $\frac{1}{2}(x+y)(y+z)(z+x) + (x+y+z)^3 = 1 - xyz$.

Задача 6. Нека $n > 1$ е нечетно естествено число. Да предположим, че целите числа $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ удовлетворяват системата

$$(x_2 - x_1)^2 + 2(x_2 + x_1) + 1 = n^2$$

$$(x_3 - x_2)^2 + 2(x_3 + x_2) + 1 = n^2$$

$$\dots$$

$$(x_1 - x_n)^2 + 2(x_1 + x_n) + 1 = n^2.$$

Да се докаже, че или $x_1 = x_n$ или $x_j = x_{j+1}$

за някое $1 \leq j \leq n-1$.

Задача 7. Да се намерят всички двуцифренi числа (в десетичен запис) $n = \overline{ab} = 10a+b$ ($a \geq 1$) със свойството, че за всяко естествено число x разликата $x^a - x^b$ се дели на n .

Задача 8. Разглеждаме функционалното уравнение $f(x, y) = af(x, z) + bf(y, z)$ с реални константи a и b . За всяка двойка реални числа (a, b) да се намери общият вид на функциите $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяващи уравнението за произволни $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Задача 9. В равнината са дадени четири различни точки A, B, C и D , лежащи на една прива g , като $AB = a$, $BC = b$ и $CD = c$.

- a) Да се построи (ако е възможно) точка P , която не лежи върху g така, че $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$.
- b) Да се докаже, че точка P с горното свойство съществува тогава и само тогава, когато $(a+b)(b+c) < 4ac$.

Архимедес '95

Задача 1. Да се намерят всички цели стойности на x , за които числата $5^x + 5^5 - 5^4$ и $2^x + 2^7 + 2^4$ са точни квадрати.

Задача 2. Върху основата BC на равнобедрен триъгълник ABC ($AB = AC$) е взета точка D така, че радиусът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$ е равен на радиуса на описаната окръжност около $\triangle ADC$. Да се докаже, че този радиус е равен на $\frac{1}{4}$ от височината през върха B в $\triangle ABC$.

Задача 3. Да се докаже, че уравнението $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \lambda x + k = 0$ има поне един реален корен, ако корените на уравнението $\alpha x^2 + (\gamma - \beta)x + (k - \lambda) = 0$ са реални и по-големи от 1.

Задача 4. В равнината са дадени k прости, всички две от които се пресичат и никои три нямат обща точка. Общите точки са номерирани с числа измежду $1, 2, \dots, k-1$ (някои точки могат да имат едни и същи номера). За кои стойности на k съществува номерация, при която всяка права съдържа точно $k-1$ точки с различни номера?



M + КОЛОКВИУМ

ОБОБЩЕНИЕ НА ГЕОМЕТРИЧНАТА ЗАДАЧА ОТ МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА В ХОНКОНГ

ст.н.с. Георги Ганчев, Институт по математика, БАН

Цел на настоящата статия е развитието на идеите, свързани със задачата по геометрия, дадена на XXXV МОМ, 1994 г. Ето и самата задача, редактирана по-близко до традициите в нашето училище.

Задача A. В равнобедренния триъгълник ABC ($AC = BC$) перпендикулярът през върха A към бедрото AC пресича симетралата на основата AB в точка D . През произволна точка M от основата AB ($M \neq A, B$) е построена права, която пресича правите CA и CB съответно в точки X и Y , $X \neq Y$. Да се докаже, че:

- ако $MX = MY$, то $DM \perp XY$;
- ако $DM \perp XY$, то $MX = MY$.

Ще отбележим, че тази задача е относително лека и общо взето е типична за равнището на геометричните задачи, давани на международните олимпиади през последните години. Липсата на сериозна трудност в задачата се дължи на факта, че даденият триъгълник е равнобедрен.

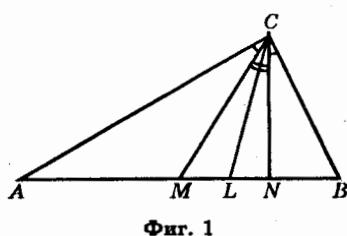
Сега ще дадем едно обобщение на тази задача за произволен триъгълник и в този по-сериозен вариант задачата повече подхожда за равнището на националните олимпиади у нас.

Задачата, която си поставяме, може да се формулира така: *Да се намери аналог на задача A за произволен триъгълник.*

Най-напред да видим кой е аналогът на отсечката CD . За тази цел ще припомним определението за симедиана в триъгълник.

Нека CM и CL са съответно медиана и ъглополовяща през върха C на триъгълник ABC (фиг.1).

Симедиана през върха C се нарича отсечката CN , за която $\angle MCL = \angle NCL$.



Фиг. 1

Ако $BC = a$, $CA = b$, от определението за симедиана следва, че

$$\frac{S_{ANC}}{S_{BMC}} = \frac{b \cdot CN}{a \cdot CM}, \quad \frac{S_{BNC}}{S_{AMC}} = \frac{a \cdot CN}{b \cdot CM}.$$

Тогава $\frac{AN}{BN} = \frac{S_{ANC}}{S_{BNC}} = \frac{a^2}{b^2}$. Следователно $\overrightarrow{CN} = \frac{a^2\overrightarrow{CA} + b^2\overrightarrow{CB}}{a^2 + b^2}$.

Основата на следващите разглеждания ще бъде следната

Задача 1. Лъчът на симедианата през върха C на триъгълник ABC пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D . Да се докаже, че:

а) ако окръжност k през C и D пресича повторно правите CA и CB съответно в точки X и Y , то средата M на отсечката XY лежи на правата AB ;

б) ако точките X и Y лежат съответно на правите CA и CB така, че средата M на отсечката XY лежи на правата AB , то точките X и Y лежат на окръжност k през C и D .

Решение: Нека CN е симедианата през върха C , а O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност (фиг.2). Тогава

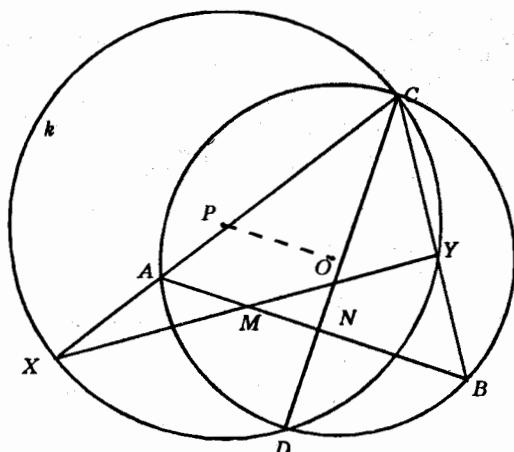
$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{b^2}{2}, \quad \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}.$$

Ако X и Y са произволни точки съответно върху правите CA и CB , то $\overrightarrow{CX} = x\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CY} = y\overrightarrow{CB}$. За средата на отсечката XY имаме формулата $\overrightarrow{CM} = \frac{(x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB})}{2}$. От познато твърдение знаем, че точката M лежи на правата AB точно когато $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$.

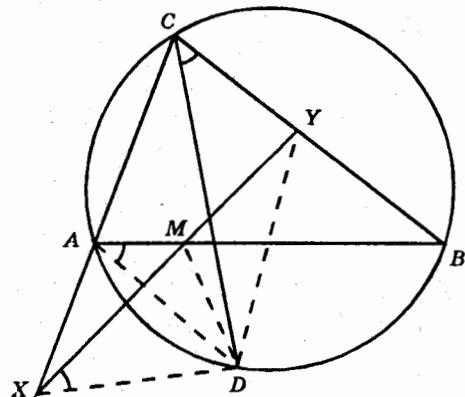
Да означим с $k(XYC)$ окръжността, която минава през точките X , Y и C , а с P – нейния център. В случая, когато $X \equiv C$ ($x = 0$), окръжността k минава през C , Y и се допира до CB . Аналогично се определя k в случая, когато $Y \equiv C$ ($y = 0$).

Условието P да е център на k се изразява с равенствата

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CX} = \frac{CX^2}{2} = \frac{x^2b^2}{2}, \quad \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CY} = \frac{CY^2}{2} = \frac{y^2a^2}{2}.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Тъй като $\overrightarrow{CX} = x\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CY} = y\overrightarrow{CB}$, то $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{b^2x}{2}$ и $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2y}{2}$.

Последните две равенства са верни и в случая, когато $x = 0$ или $y = 0$.

Сега можем да пресметнем

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CO}) \cdot \frac{a^2\overrightarrow{CA} + b^2\overrightarrow{CB}}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 1 \right).$$

а) Нека $k(P)$ е окръжност, която минава през C и D и пресича правите CA и CB съответно в точките X и Y . Тъй като $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$, то $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$. Следователно средата M на отсечката XY лежи на правата AB .

б) Нека точките X и Y лежат съответно на правите CA и CB така, че средата M на отсечката XY лежи на правата AB . Тогава $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$. Ако P е центърът на окръжността $k(XYC)$, то $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$. Следователно окръжността $k(XYC)$ минава през D .

Сега можем да формулираме и решим един аналог на задача A за произволен триъгълник.

Задача 2. Лъчът на симедианата през върха C на ΔABC пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D . През точка M от страната AB ($M \neq A, B$) е построена права, която пресича правите CA и CB съответно в точки X и Y ($X \neq Y$). Да се докаже, че:

- а) ако $MX = MY$, то точките A, D, M и X лежат на една окръжност;
- б) ако A, D, M и X лежат на една окръжност, то $MX = MY$.

Решение: (фиг.3) а) Нека $MX = MY$. Според Задача 1 точките X, Y, C и D лежат на една окръжност. Тогава $\angle DXM = \angle DCY = \angle DAM$. Следователно точките A, D, M и X лежат на една окръжност.

б) Нека точките A, D, M и X лежат на една окръжност. На фиг.3 точката A е между C и X . Тогава $\angle DXM = \angle DAB = \angle DCB$. Следователно точките C, D, X и Y лежат на една окръжност. Според Задача 1 точката M е среда на отсечката XY .

Читателят лесно ще се убеди, че в случая на равнобедрен триъгълник ($AC = BC$) отсечката CD е диаметър на описаната около ΔABC окръжност и $DA \perp AC$. Тогава условието точките A, D, M и X да лежат на една окръжност се свежда до условието $DM \perp XY$.

Представяме на читателя да намери и директно решение на Задача 2.



ЗАДАЧИ +

В тази рубрика се публикуват задачи, достъпни за ученици от горните класове на средното училище, за студенти от първите курсове на университетите и за учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. По-широкият смисъл на оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие.

Рубриката разчита на Вашето активно участие както с решения, така и с предложения за задачи. Изпращайте ги на адрес:

1113 София,
ул. "Акад. Г. Бончев", блок 8,
Институт по математика при
БАН,
Вася Хаджийски

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. След условията ще бъдат отбелязвани имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес.

Без да извършва класиране, M+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани. Ще се публикуват Ваши коментари по повод на задачите и техните решения (обобщения, интересни частни случаи и т.н.).

M⁺61. Дадена е редицата $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots, 1, 2, 3$, в която групата $(1, 2, 3)$ се повтаря 342 пъти. Изтриваме цифрите, които стоят на нечетни места, с получената редица постъпваме по същия начин и т.н., докато остане само една цифра. Коя е тя?

(Д-р М. Плюс)

M⁺62. В остроъгълния ΔABC височината $AD(D \in BC)$ и ъглополовящата $BE(E \in AC)$ се пресичат в точка O така, че $AO : OD = BO : OE = 2 : 1$. Да се докаже, че ΔABC е равностранен.

(Д-р М. Плюс)

M⁺63. Върху страните AB, BC и CA на равнобедрен $\Delta ABC(AC = BC)$ са взети съответно точки E, F и G така, че $EFCG$ е успоредник. Нека O е точката върху симетралата на AB , за която $OA \perp AC$. Да се докаже, че правите OE и FG са перпендикуляри.

(Н. Николов, 11 кл., МГ, Бургас)

M⁺64. Нека M е множеството от стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $x^3 - 2ax^2 + 5x - a = 0$ има три различни положителни корена.

а) Да се намери M .

б) Нека $a \in M$ и $x_1 < x_2 < x_3$ са корените на даденото уравнение. Да се докаже, че $x_1 + \frac{1}{x_2} < x_3$.

(Св. Дойчев, Ст. Загора)

M⁺65. Нека $p > 3$ е просто число и x, y, z са взаимно прости естествени числа, за които $x^{p-1} + y^{p-1} = z^{p-1}$. Да се докаже, че $z^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

(Пл. Кошлуков, София)

M⁺66. Нека $ABCD$ е тетраедър с прав тристанен ъгъл при върха D . Ако h е дължината на височината му през D , а r е радиусът на вписаната в ΔABC окръжност, да се докаже, че $h \leq r\sqrt{2}$.

(Б. Михайлов, Пловдив)

Срок за изпращане на решения – 15 октомври 1995 г.

ЗАДАЧИ M^+ РЕШЕНИЯ

M^+43 . Записваме числото 1234...19931994 и извършваме следната операция: зачертаваме първата цифра и я събираме с полученото число. Продължаваме, докато получим 10-цифрен чифт. Възможно ли е всички цифри на това число да са различни?

(Ив. Тонов, София)

Решение на Л. Каменова, 10 кл., СМГ, София и Ил. Ерев - студент 1 курс, ВИАС, София. Нека $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ е произволно естествено число и с $S(A)$ да означим сумата от цифрите му. Добре известно е, че $A \equiv S(A) \pmod{9}$. Тогава $\overline{a_2 \dots a_n} \equiv S(A) - a_1 \pmod{9} \Leftrightarrow \overline{a_2 \dots a_n} + a_1 \equiv S(A) \equiv A \pmod{9}$. Така, ако $a = 1234 \dots 1994$ и b е полученото от a (чрез описаната в условието операция) десетцифрен чифт, то $b \equiv a \pmod{9}$. Ако всички цифри на b са различни, то $b \equiv 0 + 1 + \dots + 9 \equiv 0 \pmod{9}$, докато $a = 1 \cdot 10^l + 2 \cdot 10^{l-1} + \dots + 1993 \cdot 10^4 + 1994 \equiv 1 + 2 + \dots + 1994 \equiv 6 \pmod{9}$. Следователно не е възможно всички цифри на b да са различни.

Задачата е решена и от К. Рахнев - 8 кл., МГ, Пловдив; Ст. Атанасов - 10 кл., НПМГ, София; А. Юмерефendi - 8 кл., ПМГ, Ловеч; Ст. Миревски - 8 кл., ПМГ, Ловеч и Д. Цветков - 10 кл. ПМГ, Монтана.

M^+44 . В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) са построени перпендикулярите AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 , съответно към диагоналите BD и AC . Нека $AC \times BD = O$. Правата през O , успоредна на AB , пресича AD и BC , съответно в точки E и F , а правата през O , успоредна на A_1B_1 , пресича A_1D_1 и B_1C_1 съответно в точки E_1 и F_1 . Да се докаже, че $EE_1 = FF_1$.

(Хр. Лесов, Казанлък)

Решение на А. Юмерефendi. Най-напред ще докажем, че $OE = OF$. Тъй като $AB \parallel EF \parallel CD$, то от теоремата на Талес следва, че $\frac{DE}{DA} = \frac{CF}{CB}$, а от $\triangle EOD \sim \triangle ABD$ и $\triangle OFC \sim \triangle ABC$, че $\frac{OE}{AB} = \frac{DE}{DA}$ и $\frac{OF}{AB} = \frac{CF}{CB}$. Тогава $\frac{OE}{AB} = \frac{OF}{AB}$, т.e. $OE = OF$. Ако $\angle AOB = 90^\circ$, то $A_1 \equiv B_1 \equiv C_1 \equiv D_1 \equiv O \equiv E_1 \equiv F_1$ и твърдението е доказано. Нека $\angle AOB \neq 90^\circ$. Точките A , B , A_1 и B_1 лежат на окръжността с диаметър AB , а точките C , D , C_1 и D_1 - на окръжността с диаметър CD . Поради това $\angle A_1B_1D_1 = \angle ABD$ и $\angle C_1D_1B_1 = \angle CDB$. Но $\angle ABD = \angle CDB$, като кръстни ъгли. Следователно $\angle A_1B_1D_1 = \angle C_1D_1B_1$ и значи $A_1B_1 \parallel C_1D_1$. Така $A_1B_1C_1D_1$ е трапец, в който $E_1F_1 \parallel A_1B_1 \parallel C_1D_1$. От вече доказаното имаме, че $OE_1 = OF_1$. Това

заедно с $OE = OF$ доказва, че EE_1FF_1 е успоредник и значи $EE_1 = FF_1$.

Задачата е решена и от А. Асенов - гара Бов; Г. Пламенов - 9 кл., ПМГ, Враца; Б. Банков - 11 кл., ЕГ, Ловеч; Л. Каменова; Ил. Ерев; Ст. Атанасов; Ст. Миревски.

M^+45 . Да се намерят последните четири цифри на числото $\left[(\sqrt{641} + \sqrt{609})^{288} \right]$, където с $[x]$ е означено най-голямото цяло число, ненадминаващо x .

(А. Симеонов, Своге)

Решение на Г. Пламенов. Нека $a_n = (\sqrt{641} + \sqrt{609})^{2n} + (\sqrt{641} - \sqrt{609})^{2n} = (1250 + 2\sqrt{641 \cdot 609})^n + (1250 - 2\sqrt{641 \cdot 609})^n$. Ясно е, че за всяко n , a_n е цяло число, а понеже $0 < \sqrt{641} - \sqrt{609} < 1$, и че $[(\sqrt{641} + \sqrt{609})^{2n}] = a_n - 1$. Търсим последните четири цифри на a_{144} , т.e. остатъка на a_{144} при деление на 10^4 . Тъй като числата $1250 \pm 2\sqrt{641 \cdot 609}$ са корени на квадратното уравнение $t^2 - 2500t + 1024 = 0$, то е в сила следната рекурентна зависимост за редицата a_n :

$$(1) \quad a_{n+2} - 2500a_{n+1} + 1024a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

като $a_1 = 2500$, $a_2 = 6247952 \equiv -2048 \pmod{10^4}$. Тъй като $4/a_1$ и $4/a_2$, то от (1) индуктивно следва, че $4/a_n$ за всяко n . Сега пак от (1) получаваме:

$$(2) \quad a_{n+2} \equiv -1024a_n \pmod{10^4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В частност $a_4 \equiv -1024a_2 \equiv -2848 \pmod{10^4}$. Ще докажем по индукция, че

$$a_{2n} \equiv a_4 - (n-2)800 \pmod{10^4}$$

за всяко $n \geq 2$. При $n = 2$ твърдението е очевидно. Да допуснем, че за някое n , $a_{2n} \equiv a_4 - (n-2)800 \pmod{10^4}$. Тогава от (2) следва, че $a_{2n+2} \equiv -1024a_{2n} \equiv -1024(a_4 - (n-2)800) \equiv -1024(a_4 - (n-1)800 + 800) \equiv 21 \cdot 10^5 + 82 \cdot 10^4(n-1) + a_4 - (n-1)800 \equiv a_4 - (n-1)800 \pmod{10^4}$. Сега за $n = 72$ получаваме, че $a_{144} \equiv a_4 - 70 \cdot 800 \equiv -2848 - 56000 \equiv -8848 \equiv 1152 \pmod{10^4}$, т.e. a_{144} завършва на 1152. Следователно последните 4 цифри на числото $[(\sqrt{641} + \sqrt{609})^{288}]$ са 1151.

M^+46 . Редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е дефинирана по следния начин: $x_0 > 0$, $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$, $n \geq 0$.

Да се докаже, че редицата с общ член $\frac{x_n^2}{n}$, $n \geq 1$ е сходяща.

(Р. Козарев, София)

Това е условието на оригиналната задача предложена от автора. В публикуваното в бр. 3 (1994)

условие и в „поправката“ в бр. 4 (1994), двойката най-напред падна под дробната черта, а после съвсем изпадна. Но и в двата случая твърдението остава вярно, в което няма нищо чудно, тъй като $0 < \frac{x_n}{n^2} < \frac{x_n}{n} < \frac{x_n^2}{n}$, $n > 1$. Редакцията се извинява на автора и на читателите си. Ще изложим авторовото решение (а кое друго?!). Най-напред ще докажем по индукция, че $x_n^2 > n + \sqrt{n^2 + n}$. За $n = 1$, $x_1 = x_0 + \frac{1}{x_0} \geq 2\sqrt{x_0 \cdot \frac{1}{x_0}} = 2$
 $\Rightarrow x_1^2 \geq 4 > 1 + \sqrt{2}$. Да допуснем, че за някое n , $x_n^2 > n + \sqrt{n^2 + n}$. Ще докажем, че $x_{n+1}^2 > n + 1 + \sqrt{(n+1)(n+2)}$. Преди всичко да отбележим, че ако $p > q \geq 1$, то $p + \frac{1}{p} > q + \frac{1}{q}$. Тогава
 $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2 > n + \sqrt{n^2 + n} + \frac{1}{n + \sqrt{n^2 + n}} + 2 > n + 1 + \sqrt{(n+1)(n+2)}$. Последното неравенство е в сила понеже след стандартни, еквивалентни преобразувания се свежда до очевидното неравенство $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n+2} \Leftrightarrow n + \frac{1}{n} + 2 > n + 2$.

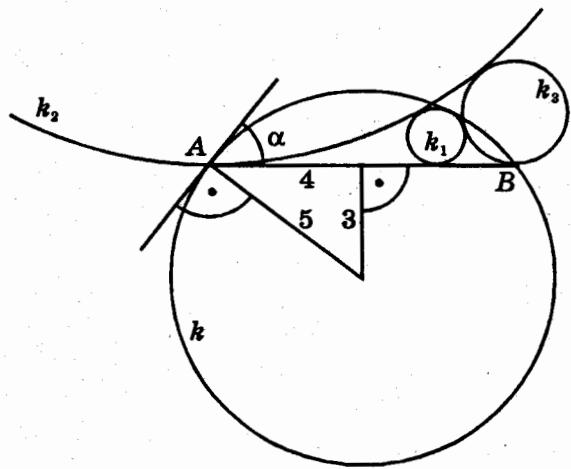
От доказаното следва, че $\frac{x_n^2}{n} > 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}} > 2$ т.e. редицата $\left\{\frac{x_n^2}{n}\right\}$ е ограничена отдолу. Ще докажем, че тя е монотонно намаляваща, откъдето ще следва нейната сходимост. Наистина, тъй като $\frac{x_n^2}{n} > \frac{x_{n+1}^2}{n+1} \Leftrightarrow x_n^4 - 2nx_n^2 - n > 0$, да разгледаме квадратният тричлен $\varphi(t) = t^2 - 2nt - n$. Понеже корените му са $n \pm \sqrt{n^2 + n}$, то за $t > n + \sqrt{n^2 + n}$ е изпълнено $\varphi(t) > 0$. Но, според доказаното по-горе $x_n^2 > n + \sqrt{n^2 + n}$ и значи $\varphi(x_n^2) > 0$. С това задачата е решена.

Задачата (във вида, в който е публикувана) е решена от Л. Каменова, К. Рахнев, Ат. Асенов, Ат. Иванов – 10 кл., II МГ Варна, Ил. Ерев и Д. Цветков.

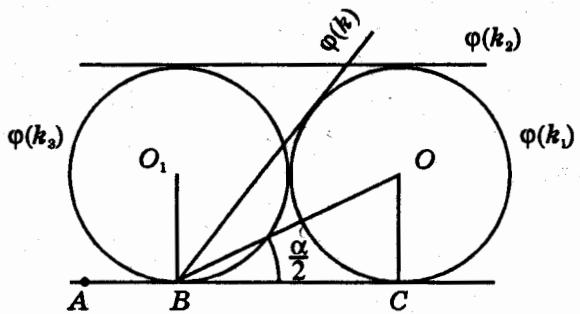
M⁺47. В окръжност k с радиус 5 хордата AB има дължина 8. Окръжността k_1 се допира до хордата AB и до по-малката от дъгите \widehat{AB} . Окръжността k_2 се допира до AB в т. A и до k_1 , а окръжността k_3 се допира до AB в т. B и до k_1 . Да се докаже, че окръжностите k_2 и k_3 се допират.

Решение: Тази задача „плач“ за инверсия. Всичко необходимо за разбиране на решението, което ще изложим, читателят ще намери в статията на Г. Ганчев, Етюди на тема „инверсия“, бр. 3 и 4 (1994) на списание Математика плюс.

Да разгледаме инверсия φ с център точката A и радиус отсечката AB . Тъй като φ запазва тъглите, то k_2 и k_3 ще се допират само ако образите им при φ , $\varphi(k_2)$ и $\varphi(k_3)$ се допират.



черт. 1



черт. 2

Отсечката AB се изобразява в лъча от правата AB с начало т. B , несъдържащ т. A ; $\varphi(k_2)$ е права успоредна на AB и лежаща в една и съща полуравнина относно AB с k_2 ; $\varphi(k)$ е права през т. B , успоредна на допирателната към k в т. A , т.e. права, която сключва с AB тъгъл α такъв, че $\cos \alpha = \frac{3}{5}$; $\varphi(k_1)$ е окръжност, която се допира до правите AB , $\varphi(k_2)$ и $\varphi(k)$, като допиранието до AB е в т. $C \notin BA^\perp$ (вж. черт. 2); $\varphi(k_3)$ е окръжност, която се допира до AB в т. B и до окръжността $\varphi(k_1)$. Ясно е сега (вж. черт. 2), че $\varphi(k_3)$ ще се допира до $\varphi(k_2)$ само ако тя има радиус, равен на радиуса на $\varphi(k_1)$. Това наистина е така, защото (вж. черт. 2)

$$\frac{OC}{BC} = \tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$$

и $BC = 2\sqrt{OC \cdot O_1 B}$. С това задачата е решена.

Решения (без използване на инверсия) ни изпратиха: А. Асенов, Ст. Атанасов, Ил. Ерев, Л. Каменова и Г. Пламенов.



M + ПРАКТИКУМ



АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛАС
в езикови училища,

математически гимназии,

техникуми

ДРУЖЕСТВО



София, пл. "Позитано" 1
тел: 87 42 41, факс: 87 49 50

За Вас, кандидат гимназисти!
Подготвителни курсове по математика
за езикови гимназии, техникуми
и американския колеж

Знание — 87-63-13, 25-73-51, 87-26-26

И в този брой публикуваме задачи за подготовка. След задачите ви предлагаме примерни изпитни теми. Препоръчваме ви да работите по всяка тема в продължение на 4 часа – толкова, колкото е времето и на самия изпит.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС!

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

Юлия Георгиева, учителка в 151-во СОУПИ, София

Пенка Никкова, експерт по математика в РИ – София на МОНТ

Мариана Тодорова, експерт в МОНТ

1. Докажете, че стойностите на изразите не зависят от променливата y

a) $(7,5x - 2y)^2 + 30x(y - x^2) - (2y - 15)(2y + 15)$;
b) $(1,3x - y)(y + 1,3x) + (0,5x + y)^2 - 4x(0,25y - 1)$.

2. Разложете на множители изразите:

a) $x^2 - 10x + 25 - 9y^2$; б) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$;
в) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$; г) $x^4 + 64$; д) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$; е) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$;
ж) $x^2 + 8x + 12$.

3. Дадени са многочлените $A = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2$, $B = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$, $D = x^2 - 1$.

а) За коя стойност на a многочленът A се дели на 10 без остатък?

б) За кои стойности на a и b изразът $C = B : D$ е цяло число?

в) За кои стойности на a и b изразът $F = B \cdot D$ не съдържа x^3 и x^2 ?

4. Докажете тъждеството:

$$\frac{(ax - 2(a+2))(a(x-1) + 2) + 2(-a^2 + 4) + 3a^2x}{-2ax} = -\frac{1}{2}ax + 1;$$

6) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$;

в) $(2x-y)(3x^2 - xy - 2y^2) = (6x^2 + xy - 2y^2)(x-y)$.

5. Да се докаже, че

а) ако $a+b = 1$, то $a^2b^2 + 3 = (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)$;

б) ако $a+b+c = 1$, то $a^2 - b^2 + ac - bc = a - b$;

в) ако $a+b+c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

6. Решете уравненията:

а) $2x(3x-4) - 3 \left(1 - (2-x)(2x+3) - \frac{x-3}{3} \right) = 13$;

б) $3 \left(x - \frac{3x-1}{3} - \left(1 - 5 \left(x - \frac{x+3}{5} \right) \right) \right) = 5x - 2$;

в) $\frac{7x}{12} - \frac{4x-3}{15} + \frac{7x-7}{20} = \frac{2}{3}$;
 г) $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$;
 д) $(x-1)^3 + (2-x)^3 = 3x^2 - 10$;
 е) $x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$;
 ж) $3(4x-2) - 2x = 5(x-1) - (4-5x)$;
 з) $\frac{x-1}{3} + \frac{3x+1}{2} = 2x + \frac{1-x}{6}$.

7. Решете уравненията, в които a , b и c са параметри:

а) $by + 4 = b^2 + 2y$; б) $a^3x - a = ax + 1$;
 в) $ax + b = cx + c$.

8. За кои стойности на параметъра a даденото уравнение е от първа степен спрямо неизвестното x : $(x+a)(x^2 - ax + a^2) = (x-a)^3 - (x-1)^2$?

9. За кои стойности на параметъра a уравнението $5(ax-3) = 4ax - 7$ има корен естествено число?

10. Решете уравненията: а) $2|x| = x$;
 б) $5|y| = -y$; в) $3|x| - 6 = 2$; г) $|3 - 5|x|| = 3$.

11. Решете уравнението $|x-1| - |x+1| = 2$ при $x \geq 4$.

12. Решете уравнението $|x-1| + |2-x| = 3$ при $x > 2$.

13. Решете уравненията: а) $|x-2+b| + a = 5$; б) $|p-3x| = \frac{2}{3}$; в) $|ax-b(x-a)| - 7 = 0$; г) $|mx+n(x-1)| - m^2 = 0$; д) $|ax-3x| = a^2 - 9$; е) $|(a^2-4)x| = a-2$.

14. Дадени са многочлените $A = 1 - x^2 + 6kx - 9k^2$ и $B = x^2 - 5kx + 6k^2 + x - 2k$.

а) Да се разложат A и B на множители.

б) Да се реши уравнението $|A - B| = 1$ при $k = 1$.

15. Разложете на множители многочлена $A = 9x - 9p - x^3 + 3px^2 - 3p^2x + p^3$ и намерете стойностите на p , при които коефициентът пред x в нормалния вид на многочлена е равен на по-големия корен на уравнението $5 - 2|y-2| = |y-2| - 16$.

16. Решете неравенствата: а) $(2x-1)^2 - 4(x-1)(x+1) \leq -2(x - \frac{5}{2})$; б) $\frac{x+1}{12} - 5\left(\frac{3-x}{15} - 1\right) > \frac{x}{18} + 3$; в) $x^2 + \frac{2x-3}{-3} - \left(\frac{2}{3}x - 5\right) \cdot \frac{1}{5} \geq x(x-1)$;
 г) $(x-0,5)^2 - 3(3 - \frac{2}{3}x) + 9 \leq 0$.

17. Да се намерят целите отрицателни числа, които са решения на неравенствата: а) $\frac{3x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{4}\right) > 1$; б) $(2-x)(3+x) \leq x(4-x) + 11$.

18. Решете относно x неравенствата: а) $2ax+2 > x$; б) $2a(a+1+x) - ax \geq 0$; в) $x+ax > 1$.

19. Докажете че: а) $9x^2 + 6x + 3 > 0$ за всяко x ;
 б) $a^2 + 2a + b^2 + 4b + 5 \geq 0$ за произволни a и b .

20. Докажете, че ако $x \geq 1$, то $x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0$.

21. Дадени са функциите $f(x) = x - 3$ и $g(x) = x + 6$.

а) Да се реши уравнението $(f(x))^2 - 6g(x) + f(-6) = 0$.

б) Да се реши неравенството

$$\frac{x \cdot f(x)}{2} - \frac{\frac{1}{2}x(g(x+3) + 2x)}{3} \geq -3x.$$

в) Докажете, че графиките на двете функции са успоредни.

22. Дадени са функциите $f(x) = 3x - 2$ и $g(x) = -x + 2a - 4$.

а) Намерете параметъра a така, че графиките на $f(x)$ и $g(x)$ се пресичат в точката A с ордината, равна на -5 .

б) Начертайте графиките на $f(x)$ и $g(x)$ и намерете лицето на фигурата, определена от двете графики и от абсцисната ос.

23. Дадена е функцията $f(x) = -x + b$. Намерете параметъра b така, че равенството $f(x) + f(-x) = 0$ да е изпълнено за всяко x .

24. Дадена е функцията $f(x) = ax^2$. Намерете параметъра a така, че графиката на функцията да минава през точката $A(-3; 3)$.

25. Докажете, че точките $A(0; 2)$, $B(1; 0)$ и $C(-\frac{1}{4}; 2,5)$ лежат на една права.

26. В 8 ч. 20 мин. велосипедист тръгнал от град A за град B със скорост 18 км/ч. По средата на пътя той спрял и почивал 16 минути, след което продължил да се движки със скорост 15 км/ч и пристигнал в гр. B в 11 ч. 10 мин. Намерете разстоянието от A до B .

27. Автобус изминава разстоянието от град A до град B със средна скорост 54 км/ч. При едно пътуване, след като изминал 30% от маршрута си, автобусът бил задържан от КАТ 20 минути. Останалата част от пътя автобусът изминал, като увеличил средната си скорост с 6 км/ч и пристигнал в гр. B една минута по-рано от времето, предвидено по разписанието.

а) Намерете разстоянието от A до B и времето, през което автобусът е пътувал с по-висока скорост от предвидената в разписанието.

б) На не по-малко от колко километра от гр. B автобусът може да направи 5 минутна почивка, за да не закъсне за гр. B , ако след тази почивка се движки със скорост 66 км/ч?

28. Една кола изминава разстоянието между два града за 3 ч. и 30 мин., а друга за $\frac{2}{3}$ от времето на първата. Ако двете коли тръгнат едновременно една срещу друга от двата града, намерете:

а) след колко време ще се срещнат;

б) кога разстоянието между тях ще е повече от 5 км, ако скоростта на по-бавната кола е 60 км/ч?

29. На състезание по колоездене велосипедистът *A* изминал първата половина от пътя със средна скорост 30 км/ч, а втората половина от пътя със средна скорост 20 км/ч. Велосипедистът *B* пропътувал първата половина от времето си на движение със средна скорост 30 км/ч, а втората – със средна скорост 20 км/ч. Има ли победител и кой е той?

30. В два цеха се изработвали общо 57 машинни детайла на ден. В единия бил направен ремонт за усъвършенстване на технологията и там производителността се увеличила с $33\frac{1}{3}\%$, поради което двета цеха започнали да произвеждат общо 66 детайла на ден.

а) По колко детайла дневно са изработвали първоначално (преди ремонта) в единия и другия цех?

б) След ремонта на цеха, в който вече се изработвали по-малко детайли, възложили отделна поръчка. Най-много от колко детайла се е състояла тя, ако времето, необходимо за изпълнението ѝ не превишавало времето, за което другият цех изпълнявал поръчка с 72 детайла по-голяма от първата?

31. Един работник може да свърши дадена работа за 8 часа, а друг – същата работа – за 7 часа. Първият работник работил сам 1 час, след което се включил и вторият работник.

а) Ако двамата работници са свършили цялата работа, колко време е работил първият?

б) Колко часа най-малко и колко часа най-много са работили двамата работници заедно, ако са свършили поне $\frac{3}{4}$ от цялата работа?

32. В сплав от злато и мед златото и медта са в отношение 2:3. В друга сплав те са в отношение 3:7. По колко грама трябва да се вземат от двете сплави, за да се получат 120 гр нова сплав, в която златото и медта са в отношение 3:5?

33. В два съда има спиртни разтвори съответно 60% и 90%.

а) Ако от първия разтвор се вземе 2 пъти по-голямо количество отколкото от втория и двете количества се смесят, с каква концентрация ще е новият спиртен разтвор?

б) Ако от първия разтвор се вземат 20 л, колко литра може да се вземат от втория, за да се получи след смесването им разтвор с концентрация не по-голяма от 85%?

34. Сума, възлизаша на x лв., е внесена в банка, която начислява $p\%$ месечна лихва. След 2 месеца вноската била олихвена, в резултат на което тя нараснала на y лв.

а) Да се намери y , ако $x = 100\ 000$ и $p = 5,1$.

б) Колко е първоначално внесената сума, ако $p = 4,8$ и при тегленето на парите след изминаването на 2 месеца касиерката изплатила на клиента 27 458 лв., като поискала 40 ст. ресто?

35. За рождения ден на сина си една майка трябва да купи безалкохолни напитки: кока-кола, портокал и лимонада. Тя решила да купи 2 пъти повече кока-кола отколкото лимонада, а портокалът да е с 1 бутилка по-малко от кока-колата. И трите вида напитки били в еднолитрови бутилки, като 1 бутилка кока-кола струвала 52 лв., една бутилка портокал – 48 лв. и една бутилка лимонада – 12 лв. Колко най-много бутилки кока-кола може да купи майката, ако тя разполагала само със 700 лв.?

36. В една викторина участвали 20 ученика. Въпросите от викторината били 37 и за всеки верен отговор се давала по една награда. Всеки ученик си отишъл с награда, но никой от тях не успял да спечели повече от 3 награди. Известно е, че броят на учениците, спечелили по една награда, е равен на общия брой на учениците, получили по 2 и 3 награди. Колко ученици са получили по 3 награди?

37. Единият от двама братя е с 4 години по-голям от другия, а преди 8 години той е бил два пъти по-голям от него.

а) На колко години са двамата братя?

б) В продължение на колко време сумата от годините им ще е не повече от годините на баща им, който е 3 пъти по-възрастен от по-малкия си син?

38. Дадени са две числа, разликата на които е 36, а при деление на едното с другото се получена частно 3 и остатък 4.

а) Кои са числата?

б) Намерете най-голямото цяло число със следното свойство: ако това число се извади от по-голямото от двете дадени числа и се прибави към по-малкото, разликата от квадратите на новополучените две числа е положителна.

ПРИМЕРНИ ТЕМИ ЗА КАНДИДАТСТВАНИЕ СЛЕД 7 КЛАС

Тема 1.

Юлия Георгиева, учителка по математика в 151-во СОУПИ, София; Пенка Нинкова, експерт по математика в РИ – София на МОНТ

Задача 1. а) Да се реши неравенството

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}\right).$$

б) Намерете за кои стойности на параметъра a уравнението $a(3x+a)+6x=4$ има едно решение, което удовлетворява неравенството от а).

Задача 2. Разстоянието между градовете A и B е 225 км. В 7 ч. 50 мин. от B за A тръгва камион със скорост 30 км/ч., а 10 минути по-късно от A за B тръгва лека кола със скорост 90 км/ч.

а) В колко часа и на какво разстояние от B са се срещнали двете превозни средства?

б) След срещата камионът продължил към A , а колата пристигнала в B , престояла там известно време и се отправила обратно за A . Колко време може колата да остане в B , за да пристигне в A преди камиона?

Задача 3. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$). Медианите AA_1 и BB_1 се пресичат в точката O . Правата CO пресича AB в точката D .

а) Докажете, че CO е ъглополовяща на $\angle ACB$.
б) Ако височината AM в $\triangle ABC$ (M принадлежи на правата BC) е два пъти по-малка от страната AB , намерете ъглите на $\triangle ABC$ и докажете, че четириъгълникът MB_1DC е ромб.

Задача 4. Даден е ромб $ABCD$. Ъглополовящата DM на $\angle ADB$ ($M \in AB$) пресича AC в точката P .

а) Намерете ъглите на ромба, ако

$$\angle PAD : \angle PDA = 4 : 7.$$

б) Върху правата DA е взета точка Q (A е между D и Q) така, че $DQ = DB$. През точката M е построена права, успоредна на BD , която пресича AD в точката N . Ако $QM = 4$ и $BD = 7$, намерете периметъра на трапеца $BDNM$ и докажете, че точката P лежи на BN .

Тема 2

Ирина Шаркова и Румяна Караджова,
учителки по математика в СМГ

Задача 1. а) Решете неравенството

$$\frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{4-x}{4} \right) + \frac{x-2}{-3} \right) < \frac{|2-x|}{6} - \frac{x}{4}$$

при $x < 2$ и намерете максималното цяло решение.

б) Решете уравнението $(a^3 + 2a + 1)x = (a+1)^2x - 4a^2$, където a е реален параметър, и намерете за кои стойности на a корените му са положителни числа.

Задача 2. Даден е правоъгълник $ABCD$. Ъглополовящата l на $\angle DAC$ е перпендикулярна на DB и пресича DB и DC съответно в точки M и N .

а) Ако $AN = 20$ см, намерете дълчината на отсечка MN .

б) Намерете каква част от лицето на правоъгълника е равна на лицето на $\triangle DMN$.

Задача 3. За една детска градина по случай празника на детето трябва да се купят кукли, строители, топки и колички. Една кукла струва 25 лв., един строител – 21 лв., една топка – 7 лв., а една количка – 10 лв. Броят на топките е 2 пъти по-голям от броя на количките, а броят на строителите е с 3 по-голям от броя на топките. Колко кукли най-много могат да се купят, ако общата сума на играчките не трябва да надминава 1050 лв.?

Задача 4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC . Симетралата на отсечката AB пресича височината BD в т. P . Точка M е средата на AB .

- а) Ако т. P е на равни разстояния от правите AC и AB , докажете, че $\triangle AMD$ е равностранен.
б) Ако т. N е средата на BP , докажете, че $MN \parallel AP$ и $MN = \frac{1}{2}AP$.

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА КАНДИДАТСТВАНИЕ СЛЕД 8 КЛАС

Светлозар Дойчев,
учител по математика в ПМГ, Стара Загора

Задача 1. Дадено е уравнението

$$\frac{x+a}{x^2+2ax} + \frac{2}{-2a-x} = \frac{1-x}{x^2},$$

в което a е параметър.

- а) Да се реши уравнението при $a = 1$.
б) Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които числото $0.4a$ е корен на уравнението.

Задача 2. Ако между две цифри на дадено двуцифreno число се запише цифрата 9, полученото трицифreno число ще е 11 пъти по-голямо от даденото. А ако пред даденото число запишем цифрата 6, то полученото второ трицифreno число ще бъде по-голямо от полученото първо трицифreno число със 150. Намерете трите числа.

Задача 3. Окръжност k минава през средите на катетите AC и BC на правоъгълен триъгълник ABC и се допира до хипотенузата AB в точка M така, че $AM : MB = 5 : 3$.

- а) Да се намерят острите ъгли на $\triangle ABC$.
б) Да се определи положението на точка C относно k .

Задача 4. Диагоналите на равнобедрен трапец са взаимно перпендикулярни, а основите му имат дължини a и $2a$.

- а) Да се намери лицето на трапеца.
б) Да се докаже, че в трапеца не може да се впише окръжност.

**ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА НАЦИОНАЛНАТА
ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА
ГИМНАЗИЯ**

Надка Попова и Боянка Савова,
учителки по математика в НПМГ

I изпит (за всички специалности)

Задача 1. а) Да се реши неравенството

$$\frac{2x-1}{-3} - \frac{1+x}{0,3} < 4 - \frac{x-4}{6}$$

б) Да се реши уравнението $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 = \frac{ax^2}{36} + x + 1$, където $a = \frac{(-0,05)^3 \cdot 3 \cdot 2}{(0,5)^2 \cdot (-0,2)^5}$.

в) Да се намери най-малкото цяло число y , за което $(y + \sqrt{5})^2 > y^2$.

Задача 2. В съд с вместимост 25 л има 10 л 15%-ен спиртен разтвор.

а) С каква концентрация ще бъде разтворът, след като в съда се добавят 15 л 9%-ен спиртен разтвор?

б) Колко литра вода трябва да се добавят към първоначалния разтвор, за да стане концентрацията му по-малка от 12%?

Задача 3. В ромба $ABCD \nexists ADC > 90^\circ$. Височините DD_1 и BB_1 ($D_1 \in AB$, $B_1 \in AD$) се пресичат в точка O и $DO : OD_1 = 2 : 1$.

а) Да се изчислят ъглите на ромба.

б) Да се докаже, че $2BB_1 = AC$.

в) Да се докаже, че $\frac{3}{2}AB < BB_1 + DD_1 < 2AB$.

II изпит

(за специалност математика и информатика)

Задача 1. а) Решете уравнението $a(ax + 3) = 9x + a^2$, където a е реален параметър. За кои цели стойности на a уравнението има поне едно цяло решение?

б) Решете уравнението $|3x^2 - x - 1| = 1$.

в) Определете координатите на пресечните точки на графиките на функциите $f(x) = (x + 1)^3$ и $g(x) = x^3 + 1$.

Задача 2. Автомобилна гума се износва за 40 000 км, ако е монтирана на предно колело и за 60 000 км, ако е монтирана на задно колело. Ето защо пестеливите шофьори от време на време разменят местата на предните и задните колела. Колко километра могат да изминат комплект от 4 нови гуми, ако предните и задни колела се разменят:

а) през 10 000 км; б) по оптимален начин, осигуряващ пълното износване на четирите гуми?

Задача 3.

В остроъгълен триъгълник ABC са построени височините AD и BE ($D \in BC$, $E \in AC$). Точка M лежи върху правата BC , като C е между M и B , а $CM = AC$. От точка M е спуснат перпендикуляр към правата BE , който я пресича в точка N . Да се докаже, че

а) $\nexists NMA = \nexists AMC = \frac{1}{2} \nexists ACB$;

б) $BN = BE + AD$; в) ако точка S е среда на AB , а $\nexists ACB = 60^\circ$, то $\triangle ESD$ е равностранен.

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ В АМЕРИКАНСКИЯ КОЛЕЖ

Американският колеж в София възстанови дейността си през 1992 г. Тази година колежът ще приеме четвърти випуск на основата на приемен изпит. Кандидатите трябва да са завършили 7-ми клас през 1995 г. и да имат

среден успех от последната година не по-нисък от мн. добър 5.00. Предлагаме ви примерен тест по математика от 25 въпроса. Времето за работа е 25 минути. Самият изпит съдържа два такива теста.

ПРИМЕРЕН ТЕСТ

Донка Гъльбова, София

Всеки от въпросите с номера от 1 до 10 се състои от две части. Едната част е дадена в колона А, а другата част – в колона В. Сравнете двете части и срещу всеки въпрос напишете (A), ако частта в колона А е по-голяма; (B), ако частта в колона В е по-голяма; (C), ако двете части са равни; (D), ако няма достатъчно информация, за да бъде определен отговорът.

Забележка: 1. Информацията, дадена по средата, важи и за двете колони. 2. Ако една буква участва и в двете колони, то тя означава едно и също число.

Към всеки от въпросите с номера от 11 до 25 има дадени по 5 отговора. Решете всяка от задачите наум или на чернова хартия. Сравнете получения резултат с предложените отговори и определете кой от тях е верен. Отбележете Вашия отговор.

Колона А

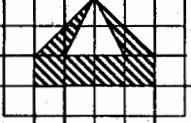
1. Повищението на температурата на въздуха от $-5,2^\circ$ до $13,7^\circ$
2. Периметърът на правоъгълник с лице 9 cm^2

Колона В

$18,9^\circ$

12 cm

Колона А	Колона В
3. Увеличеното с 10% число m	$m + 10$
4. $\frac{1993}{1994}$	1994 1995
5.	a е естествено число, различно от 1. Частното от сбора на числата a и 1 и тяхната разлика
6.	Дванадесет момичета и седем момчета играели на игра, като се хванали за ръце и образували кръг. Броят на момичетата и момчетата
7. Минималната стойност на $3a^2 + b^2$	Броят на хващанията за ръце Максималната стойност на $-(2x + 1)^2$
8. $x \leq 40, y \leq 40$ 50	$x + y$
9. Средната скорост за $(S + 3)$ km, изминати за 4 часа.	Средната скорост за $(S + 6)$ km, изминати за 8 часа.
10. Преди една година Васил е бил 2 пъти по-висок от Асен. От тогава до сега ръстът на Асен се е увеличил с 50%, а на Васил – с 1%. Ръстът на Асен сега	Ръстът на Васил сега.

11. Намерете:
 $1\ 000\ 000 - (1\ 000\ 000 - (1\ 000\ 000 - 999\ 999))$.
 (A) 111 (B) 1 (C) 111 111 (D) 0 (E) 999 999
12. Ако страната на едно квадратче от фигураната е 1 см, да се намери лицето в см² на зашрихованата фигура.
 (A) $7\frac{1}{2}$ (B) 7 (C) 6 (D) 5
 (E) не може да се определи
- 
13. Фирма закупила 300 kg банани по 35 лв за килограм и ги продала по 39 лв за килограм. Печалбата в левове е: (A) 1200 (B) 12000 (C) 1700 (D) 11700 (E) 500
14. Илия повишил успеха си през първия срок с сравнение с предишната година с 10%, а през втория – с 20% в сравнение с първия срок. С колко процента се е повишил успехът на Илия в сравнение с предишната година? (A) 32 (B) 30 (C) 200 (D) 40 (E) 15
15. Два багера могат да направят един изкоп за 6 дни. За колко дни могат да направят същия изкоп 3 багера (всички багери имат една и съща производителност)? (A) 3 (B) 4 (C) 8 (D) 12 (E) 5
16. Иван, Петър и Николай решили да си купят 20 мекици по лев и 50 стотинки едната. Иван и Петър купили по 10 мекици, а Николай дал 18 лева. Как трябва да се разпределят тези пари между тримата, за да са заплатили по равно? (A) 7,5; 7,5; 3 (B) 6; 6; 6 (C) 5; 7; 6 (D) 5,5; 5,5; 7 (E) 5; 5; 8
17. Най-големият общ делител на числата 21, 42 и 77 е: (A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 77 (E) 21
18. За три дни Здравка научила 61 думи по френски език. Кое от следните твърдения е вярно? 1. Всеки ден е научавала не повече от 20 думи. 2. Всеки ден е научавала поне 21 думи.
3. Поне през един от дните е научила повече от 20 думи. (A) само 1 (B) само 2 (C) само 3 (D) и трите (E) нито едно от трите
19. Ако периметърът на квадрат е 36 см, то лицето му в см² е:
 (A) 36 (B) 24 (C) 18 (D) 12 (E) 81
20. Колко литра вода има в пълен аквариум, който има форма на куб с ръб 20 см?
 (A) 8000 (B) 8 (C) 80 (D) 0,8 (E) 800
21. Росен излязъл от къщи в 7 часа и 25 минути и пристигнал в училище в 8 часа и 5 минути. Колко време е пътувал? (A) 75 мин. (B) 20 мин. (C) 50 мин. (D) 40 мин. (E) 65 мин.
22. От борда на кораб е спусната въжена стълба, долните 6 стъпала на която са потопени във водата. Разстоянието между две стъпала е 30 см и всяко стъпало е дебело 5 см. Колко стъпала ще бъдат под водата след прилив, ако нивото на водата се е покачило с 1 метър?
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9
23. $\frac{3}{4}$, извадено от неговото реципрочно, е:
 (A) $-\frac{1}{12}$ (B) $\frac{13}{4}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{5}{12}$
24. Числото 8 е 25% от:
 (A) 100 (B) 4 (C) $\frac{3}{4}$ (D) 32 (E) $\frac{1}{2}$
25. Ако $\frac{a-1}{12} - \frac{3-a}{11} = \frac{a+8}{11} - \frac{1+a}{12}$, то a е равно на:
 (A) $\frac{7}{11}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) 1 (D) 3 (E) 6

Тестът е взет от книгата на издателство „ВЕДИ“ „Есе-тест, ако кандидатствате в Американския колеж“, 1994 г.

Отговорите на теста са дадени на стр. 36.



M + ПРАКТИКУМ

ПОДГОТОВКА ЗА ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В ТЕХНИКУМИТЕ И СОУ

В два последователни броя на МАТЕМАТИКА ПЛЮС публикуваме задачи и теми в помощ на всички, които ще се явяват на зрелостен изпит по математика. Ако един зрелостник иска да е спокоен, когато се явява на изпит, той трябва да може да решава тези задачи. Разбира се, ако той е решил само предложените тук задачи и примерни теми, това не означава, че е готов за изпита, а по-скоро че познава сравнително добре основните факти от училищния материал.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС.

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

1. Да се решат уравненията:

a) $\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{20x-6}{4x^2-1}$;

b) $\sqrt{2-x} - \sqrt{x-3} = -1$;

v) $\log_6(2x+1) + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(2x+1) = 4\log_8 3$;

г) $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$;

д) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1, 0 \leq x \leq \pi$.

2. Да се решат неравенствата:

a) $\frac{1}{2^x-1} > \frac{1}{1-2^{x-1}}$;

б) $\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x 2x^3}$.

3. Да се решат системите:

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=2 \\ 3x^2+y^2=4 \end{cases}$.

4. Да се намерят първите три члена на аритметична прогресия, за която $a_1 + a_5 = 12$ и $a_2 + a_7 = -18$.

5. Да се намерят частното и осмият член на геометрична прогресия, за която са дадени $a_1 = 5$ и $S_3 = 15$.

6. Дадена е функцията $f(x) = \frac{2x-m}{x+m}$, $(x \neq -m)$, където $m \neq 0$ е реален параметър. Да се намерят стойностите на m , при които:

- а) уравнението $f(x) + f'(x) = 1$ няма реални корени;
б) $f'(0) + 4 > 0$;
в) Да се изследва изменението и да се построи графиката на функцията $f(x)$ при $m = 1$.

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

7. Даден е равнобедреният $\triangle ABC$, в който $AB = 12$ см, $AC = BC$ и височината към BC е $AE = 9.6$ см.

- а) Да се намерят дълчината на бедрото и лицето на дадения триъгълник.
б) Да се намери дълчината на радиуса на описаната около триъгълника окръжност.
в) Ако CM е височината на триъгълника към страната AB , да се докаже, че $\triangle ABC \sim \triangle MBE$ и да се намери лицето на четириъгълника $AMEC$.

8. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AB = 21$, $BC = 10$ и $CA = 17$. Да се намери:

- а) лицето на триъгълника;
б) разстоянието от медицентъра на триъгълника до най-голямата му страна;
в) лицата на частите, на които се разделя даденият триъгълник от ъглополовящата на $\triangle ABC$.

9. Лицето на ромб е 24 см^2 , а сборът от дължините на диагоналите му е 14 см. Да се намерят дължините на диагоналите на ромба и лицето на вписания в него кръг.

10. Даден е правоъгълен трапеци $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $DA \perp AB$), в който е вписана окръжност с радиус r . Острият ъгъл $\angle ABC$ е равен на 2α .
- Да се докаже, че лицето на трапеци $S = r^2(2 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)$ и пресметнете за коя стойност на α , $S = (6 + 4\sqrt{3})r^2/3$.
 - Ако вписаната в трапеци окръжност се допира до бедрото CB в т. P докажете, че $r = \sqrt{BP \cdot PC}$.
11. Основата на триъгълната призма $ABC A_1 B_1 C_1$ е равнобедрен триъгълник ABC ($CA = CB$), в който $AB = c$. Ортогоналната проекция на върха C_1 върху равнината на основата лежи на височината CD ($D \in AB$) на $\triangle ABC$.
- Да се докаже, че четириъгълникът ABB_1A_1 е правоъгълник.
 - Да се намери лицето на околната повърхнина на призмата, ако $CC_1 = l$ и двустенният ъгъл, образуван от околните стени AA_1C_1C и BB_1C_1C е с големина α .
12. Околната стена ABM на триъгълната пирамида $ABC M$ е перпендикулярна на равнината ABC . Околният ръб $MC = \sqrt{3}$ образува с основните ръбове CA и CB равни ъгли с големина β .
- Да се докаже, че ортогоналната проекция на MC е ъглополовяща в $\triangle ABC$.
 - Да се намери обемът на пирамидата, ако $\angle A = \alpha$ и $\angle C = 90^\circ$.
13. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCD M$ с основен ръб a и ъгъл между околн ръб и равнината на основата α .
- Да се намери лицето на пълната повърхнина на пирамидата.
 - Ако β е ъгълът между околнна стена и основата на пирамидата, да се докаже, че $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.
 - През върха A на пирамидата е прекарана равнина σ перпендикулярна на околнния ръб CM . Да се определи вида на сечението на пирамидата със σ и да се намери лицето му.
14. В кълбо с дължина на радиуса R е вписан прав кръгов конус. Големината на ъгъла между образувателната и височината на конуса е α . Да се намерят лицето на пълната повърхнина и обема на конуса.
15. Дадени са правоъгълна координатна система Oxy и точките $A(3; 0)$ и $B(0; 5)$. Произволна точка M от отсечката AB има абсциса $OM_1 = x$ и ордината $OM_2 = y$.
- Да се изрази като функция на x обемът на тялото, което се получава от въртенето на правоъгълника $OM_1 M M_2$ около ординатната ос.
 - За коя стойност на x този обем има най-голяма стойност?

ПРИМЕРНА ТЕМА ЗА ПИСМЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В ТЕХНИКУМИТЕ И СОУ

Задача 1. а) Да се реши уравнението

$$\sqrt[3]{8^{x-1}} - 4^x = \frac{1}{16}$$

б) Да се докаже, че

$$\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

при $\alpha \neq (2k+1)\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{4}, k = 0, \pm 1, \dots$

Задача 2. Дадени са два лъча с общо начало точката O . Върху единият от тях са взети последователно точки A и B , а върху другият – последователно точки C и D така, че $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

- Да се докаже, че точките A, B, C и D лежат на една окръжност;
- Да се пресметне лицето на четириъгълника $ABCD$, ако $OA = 6, OC = 8, AC = 4$ и $OD = 18$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = x^3 + px^2 - qx$, където p и q са реални параметри.

- Да се намерят p и q , ако функцията $f(x)$ има локален минимум и локален максимум, които се достигат в две противоположни числа, а разликата от стойностите на локалния максимум и локалния минимум е равна на 4.
- За така намерените p и q да се пресметне

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x} - 1}.$$

Задача 4. Основата $ABCD$ на четириъгълната пирамида $NABCD$ е правоъгълник със страни $AB = CD = 5$ и $AD = BC = 2$. Ортогоналната проекция на върха N върху равнината на основата е точка O , която лежи върху отсечката съединяваща средите на AD и BC , като $OA = OD = \sqrt{2}$ и $ON = 2$.

- Да се намери обема и околната повърхнина на пирамидата.
- Да се намери двустенният ъгъл, образуван от равнините NAD и NBC .

М + ПРАКТИКУМ

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ

В брой 1 на МАТЕМАТИКА ПЛЮС публикувахме задачи по алгебра и примерни теми в помощ на всички, които ще се явяват на кандидатстудентски изпит по математика. В този брой ще намерите "типични" задачи по геометрия и нови пет примерни теми, изгответи от преподаватели във ВУЗ.

Решаването на задачите от брой 1 и 2 е задължителен елемент от подготовката за изпит на един кандидатстудент, защото тяхното преодоляване със сигурност знае, че той владее кандидатстудентския минимум по математика. В предлаганите задачи умислено не са включени тези от конкурсните изпити за 1994 г., понеже те бяха публикувани в брой 4 за 1994 г. на списанието.

Приятно решаване на задачите от МАТЕМАТИКА ПЛЮС.

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЯ

доц. Любомир Давидов, Институт по математика – БАН

Триъгълник

1. В $\triangle ABC$ ($AB > AC$), $\angle BAC = \alpha$. Точка D лежи на страната AB и е такава, че $BD = AC$. С E е означена средата на отсечката AD , а с F – средата на отсечката BC . Да се намери големината на $\angle BEF$.

2. В $\triangle ABC$, $\angle ACB$ е тъп, а страната AB има дължина b . Да се намери дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, ако е известно, че на тази окръжност лежи центъра на окръжността, минаваща през точките A , B и ортоцентъра на $\triangle ABC$.

3. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AB , BC и CA съответно в точките C_1 , A_1 и B_1 . Ако $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $p = \frac{a+b+c}{2}$, да се докаже, че $AB_1 = AC_1 = p - a$,

$BC_1 = BA_1 = p - b$ и $CB_1 = CA_1 = p - c$.

4. В $\triangle ABC$, със страни $AB = \sqrt{3}$ и $BC = 4$ е построена медианата BD . Окръжностите, вписани в триъгълниците ABD и BDC се допират до BD съответно в точки M и N . Да се намери дължината на отсечката MN .

5. В $\triangle ABC$ е построена медианата CM ($M \in AB$). Върху отсечката CM е избрана точка N , такава че $\frac{CN}{NM} = \frac{2}{5}$. Правата AN пресича страната BC в точка K . Да се намери отношението $\frac{CK}{KB}$.

6. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle ABC = 45^\circ$ и $\angle ACB = 60^\circ$. Медианите BM и CN на този триъгълник са диаметри на окръжности, които се пресичат в точки P и Q . Правата PQ пресича средната отсечка MN на дадения триъгълник в

точка F . Да се намери отношението $NF : FM$.

7. Ортоцентърът на остроъгълния $\triangle ABC$ е означен с H . Лицето на $\triangle ABH$ е равно на \sqrt{b} , а разстоянието от центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност до страните AC и BC са равни съответно на $\sqrt{2}$ и 1. Да се намери големината на $\angle ACB$.

8. В остроъгълния $\triangle ABC$ ъглите при върховете A и B имат съответно големини α и β , а радиуса на вписаната окръжност има дължина r . Допирателната към вписаната окръжност, която е успоредна на страната BC пресича страните AB и AC съответно в точки K и M . Да се намери лицето на трапеца $BCM K$.

9. Разстоянието от центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност до върховете A и B са равни съответно на $\sqrt{7}$ и $\sqrt{21}$ и $\angle ACB = 120^\circ$. Да се намерят дълчините на страните на триъгълника.

10. В окръжност k е вписан $\triangle ABC$, такъв че $\angle ACB = 30^\circ$. Окръжност k_1 с център O , лежаща на k минава през точките A и C и пресича правата AB в точка Q такава, че точката A е между Q и B и $QB = \sqrt{3} \cdot AB$. Да се намерят:

- мерките на ъглите на $\triangle ABC$;
- лицето на $\triangle ABC$, ако е известно, че ъглополовящата на ъгъл ACB има дължина l .

11. В $\triangle ABC$ $\angle BAC = \alpha$ и $BC = a$. Известно е, че страната BC е средно геометрична на радиусите на вписаната и описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Да се намерят дълчините на страните AB и AC .

12. Върху страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ са построени външно за триъгълника равностранните триъгълници BCA_1 , CAB_1 и ABC_1 . Около равностранните триъгълници са описани окръж-

ности, центровете на които са означени с O_1 , O_2 и O_3 . Да се докаже, че:

- трите окръжности минават през една точка;
- $\Delta O_1O_2O_3$ е равностранен;

в) $O_1O_2^2 = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)$, където a , b и c са дълчините на страните на ΔABC , а S е лицето му.

13. Нека O и O_1 са центровете, а R и r – дължините на радиусите съответно на описаната и вписаната в произволен триъгълник окръжност.

а) Ако за един триъгълник е известно, че големините на ъглите му са $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ и $\frac{3\pi}{5}$, да се докаже, че O и O_1 са расположени симетрично спрямо една от страните на триъгълника и $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

б) Да се докаже, че измежду всички триъгълници с фиксирана големина α на един от ъглите, отношението $\frac{r}{R}$ е най-голямо за равнобедрен

триъгълник с ъгъл α между бедрата.

14. Ъгълът при върха на равнобедрен триъгълник има големина $\alpha < 90^\circ$. Основата на този триъгълник служи за диаметър на окръжност, радиусът на която има дължина R . Да се намери лицето на частта от триъгълника, която лежи вън от окръжността.

15. Стълба се опира с единия си край на улица, а с другия – на стената на къща на височина 11 м. Стълбата се завърта около долния си край на ъгъл 60° е се обляга на срещуположната къща. Да се намерят дълчината на стълбата и височината, на която тя се е облегнала, ако ширината на улицата е $7\sqrt{3}$ м.

Успоредник. Трапец

16. В успоредник $ABCD$ ъглополовящите през върховете A и B се пресичат върху страната DC . Да се намери отношението на страните на успоредника.

17. Дълчините на страните на успоредник са 3 и 4, а ъгълът между диагоналите му има големина 60° . Да се намери лицето на този успоредник.

18. Дълчината на страната на ромб е 25, а радиусът на вписаната в него окръжност има дължина 12. Да се намерят дълчините на диагоналите на ромба.

19. Даден е успоредник $ABCD$, за който $AB = 2$, $AD = 1$ и $\angle ABC$ е тъп. През върховете B и D са построени прости, перпендикуляри на страните на успоредника. Пресечните точки на тези прости са върхове на успоредник, подобен на дадения. Да се намери лицето на успоредника $ABCD$.

20. Даден е успоредник $ABCD$ със страни $AB = a$ и $BC = b$. Да се намери лицето на успоредника, ако страната AB се вижда от средата на срещулежащата страна под ъгъл φ .

21. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, диагоналите AC и BD на който се пресичат в точка O . Със S_1 , S_2 , S_3 и S_4 са означени съответно лицата на триъгълниците AOD , AOB , BOC и COD . Да се докаже, че $S_1S_3 = S_2S_4$.

Да се докаже, че $AB \parallel CD$ тогава и само тогава, когато $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2S_4}$.

22. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, диагоналите AC и BD на който се пресичат в точка O . С S , S_1 , S_2 и S_3 са означени лицата съответно на четириъгълника и триъгълниците AOD , AOB и COD , при което е в сила равенството $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_1}$.

а) Да се докаже, че правите AB и CD са успоредни.

б) Да се докаже, че $S_1 \leq \frac{1}{4}S$. Кога е в сила равенството?

в) В случая, когато $AO : OC = 4 : 3$, да се изрази S чрез S_1 .

23. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ със среди P и Q съответно на страните AB и CD , като $S_{APQD} = S_{PBCQ}$. Да се докаже, че:

а) правите AB и CD са успоредни;

б) $S_{APCQ} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$;

в) средите на отсечките AQ , BQ , CP и DP лежат на една права.

24. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), страничите на който имат дължини: $AB = 39$, $CD = 26$, $AD = 5$ и $BC = 12$. Да се намери дълчината на радиуса на окръжността, минаваща през точките A и D и допираща се до правата BC .

25. В равнобедрен трапец е вписана окръжност с радиус 1. Друга окръжност се допира до нея и до две страни на трапеца. Разстоянието от общия връх на тези две страни до допирната точка на двете окръжности е два пъти по голямо от диаметъра на втората окръжност. Да се намери лицето на трапеца.

26. В трапеца $ABCD$ средите на основите AB и CD са означени съответно с K и M . Известно е, че $AM \perp DK$, $CK \perp BM$ и $\angle CKD = 60^\circ$. Да се намери лицето на трапеца, ако височината му е равна на 1.

27. Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Права l , успоредна на основите на трапеца пресича бедрата AD и BC съответно в точките E и F , а диагоналите – съответно в точките K и L . Да се докаже, че $EK = LF$.

28. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB = a$ и $CD = b$ ($a > b$). Права l , успоредна на основите на трапеца пресича бедрата AD и BC и диагоналите AC и BD съответно в точките P , Q , L и R . Ако е известно, че $PL = LR$, да се намери дълчината на отсечката PQ .

Многоъгълник

29. Да се докаже, че диагоналите AC и BD на изпъкнали четириъгълник $ABCD$ са взаимно перпендикуляри тогава и само тогава, когато $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

30. Да се докаже, че ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност (AC и BD са диагонали на четириъгълника), то $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. (Теорема на Птоломей)

31. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Центърът на окръжност с радиус r , допираща се

до страните AB , AD и DC , лежи на диагонала AC . Центърът на окръжност със същия радиус r и допираща се до страните BC , CD и AB лежи на диагонала BD . Известно е, че двете окръжности се допират външно. Да се намери лицето на четириъгълника $ABCD$.

32. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, около който може да се опише и в който може да се впиши окръжност. Диагоналът AC го разделя на два равнолицеви триъгълника. Да се намери дължината на диагонала BD , ако радиусът на вписаната окръжност има дължина r и периметърът на четириъгълника е p .

33. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ъглите при върховете A и C са прави. От върховете B и D са спуснати перпендикуляри BE и DF към диагонала AC . Да се докаже, че $CE = FA$.

34. Петоъгълникът $ABCDE$ е вписан в окръжност. Разстоянието от върха E на този петоъгълник до правите AB , BC и CD са равни съответно на a , b и c . Да се намери разстоянието от върха E до правата AD .

Окръжност

35. Нека k_1 и k_2 са концентрични окръжности с център O и радиуси с дължини съответно R_1 и R_2 , като $R_1 < R_2$. През произволна точка M от k_1 е прекарана права l , не минаваща през O и пресичаща k_2 в точките A и B , а k_1 - в точката C . Да означим с D точката, в която перпендикулярът към l в M пресича k_1 .

а) Да се докажат равенствата: $AM \cdot MB = R_2^2 - R_1^2$, $AM^2 + MB^2 + MD^2 = 2(R_1^2 + R_2^2)$.

б) В случая, когато лицето на $\triangle CMD$ е най-голямо, да се изразят чрез R_1 и R_2 дължините на отсечките AM , MB и MD .

36. Дадена е окръжност с дължина на радиуса R и точка A вън от нея. През точката A са прекарани допирателна t и секуща s на окръжността, които сключват помежду си ъгъл с големина α . С B , C и D са означени съответно допирната точка на t с окръжността и пресечните точки на s с окръжността, като D е между C и A . Ако разстоянието от центъра на окръжността до правата s е равно на d , да се намери отношението между лицата на триъгълниците ABC и BCD .

37. В равнината са дадени права l и точки A и B , лежащи в различни полуравнини относно права l .

Измежду всички окръжности, минаващи през точките A и B да се построи тази, която отсича от права l хорда с минимална дължина. При какво положение на отсечката AB спрямо правата l тази минимална хорда има най-голяма дължина?

Многостен

38. Околният ръб на правилна триъгълна пирамида има дължина l . Да се намери обемът на пирамидата, ако всичките ѝ двустенни ъгли са равни.

39. Дадена е четириъгълна пирамида $MABCD$, основата $ABCD$ на която е успоредник. Ръбовете AB , BC и диагоналът AC имат съответно дължини 8, 14 и 18. Равнините MAB и MAD

са перпендикулярни на равнината ABC , а равнината MBD сключва с равнината ABC ъгъл с големина 60° . Да се намерят:

а) обемът на пирамидата;

б) големината на ъгъла, който сключват помежду си равнините MBC и ABC .

40. Основата на пирамида е равнобедрен триъгълник дължината на бедрото на който е a , а ъгълът при върха му има големина α . Всички околни ръбове са наклонени към равнината на основата под ъгъл с големина β . Да се намери обемът на пирамидата.

41. Основата на пирамида е равнобедрен трапец, острите ъгли на който имат големина β . Околните стени на пирамидата образуват с равнината на основата ъгли с големина α . Височината на пирамидата има дължина H .

а) Да се намерят дължините на височините на стените на пирамидата;

б) Да се намери обемът на пирамидата;

в) Да се докаже, че в пирамидата може да се впиши сфера и да се намери радиусът на тази сфера.

42. Околните ръбове на триъгълна пирамида са взаимно перпендикулярни и са с дължини a , b , c .

а) Да се намери дължината на височината на пирамидата;

б) При каква зависимост между a , b и c единият от ъглите на основата на пирамидата е 60° .

43. Околните ръбове на триъгълна пирамида са два по два перпендикулярни. Да се докаже, че върхът на пирамидата, междусърдърът на основата и центърът на описаната около пирамидата сфера лежат на една права.

44. Околните стени на четириъгълна пирамида са еднакви равнобедрени триъгълници, а основата ѝ е ромб, единият диагонал на който има два пъти по-голяма дължина от другия. Лицето на околната повърхнина на пирамидата е равно на 6. Да се намери нейният обем, ако е известно още, че има два околни ръба, които сключват тъп ъгъл.

45. Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранния $\triangle ABC$, дължината на страната на който е равна на $4\sqrt{2}$. Околният ръб DC е перпендикулярен на равнината на основата и има дължина 2. Ако M и N са средите съответно на ръбовете AB и BC , да се намери мярката на ъгъла и дължината на разстоянието между кръстосаните прости DN и CM .

46. В четириъгълна пирамида $MABCD$ е вписана сфера. Основата на пирамидата е равнобедрен трапец $ABCD$ бедрата AD и BC , на който имат дължина l , а острите ѝ ъгли са равни на φ . Околните стени AMB и CMD са равнобедрени триъгълници ($AM = BM$, $CM = DM$) и образуват с равнината на основата един и същи ъгъл, имащ големина α . Да се намери радиусът на вписаната сфера.

47. Основата на четириъгълна пирамида е правоъгълник с дължини на страните a и b . Един от околните ръбове на пирамидата е перпендикулярен на равнината на основата и има дъл-

жина h . Разглеждаме множеството от правите призми, вписани в пирамидата така, че върховете при горната основа на всяка от тях лежат на околните ръбове на пирамидата, а върховете при долната основа – в равнината на основата на пирамидата. Измежду всички тези призми да се намери онази, която има най-голям обем.

48. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основи $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и оконни ръбове AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 . Да се намерят ъглите между правите а) AA_1 и B_1D ; б) AD_1 и A_1B ; в) AD_1 и B_1D . Ако ръбът на куба има дължина 1, да се намерят разстоянията между правите г) AA_1 и B_1D ; д) AD_1 и DC_1 .

Сечения

49. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръба a . Точките P и Q са среди съответно на ръбовете B_1C_1 и C_1D_1 , а точка $M \in AA_1$ е такава, че $AM : MA_1 = 1 : 2$. Да се намери лицето на сечението на куба с равнината през точките M , P и Q .

50. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ (M е върха на пирамидата). Точка N е среда на ръба CM , а точка K лежи на ръба AM и е такава, че $AK : KM = 1 : 3$. Равнината, определена от точките D , K и N пресича ръба BM в точка E . Да се намери отношението $BE : EM$.

51. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е пресечен с равнина, минаваща през центъра му и перпендикулярна на телесния диагонал BD_1 . Да се определи вида на полученото сечение и да се намери неговото лице, ако ръбът на куба има дължина 1.

52. Да се определи ъгълът между околната стена и основата на правилна четириъгълна пирамида, ако се знае, че равнината, разполовяваща този ъгъл, разделя лицето на околната повърхнина на пирамидата на две равни части.

53. Основата на пирамида $ABCDM$ е изпъкналия четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = 5$, $BC = \sqrt{13}$, $CD = \sqrt{5}$, $DA = \sqrt{17}$. Пресечната точка O на диагоналите AC и BD е ортогонална проекция на върха M върху основата и $OM = 4\sqrt{3}$. Равнината α , определена от средите на отсечките AB , AD и OM склучва с равнината на основата ъгъл 60° . Да се пресметне лицето на сечението на пирамидата с равнината α .

ПРИМЕРНИ ТЕМИ

ТЕМА 1.

доц. Л. Давидов, ИМ – БАН

Задача 1. Да се реши системата уравнения

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 2^{y-x+1} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x+1. \end{cases}$$

Задача 2. В ΔABC ъгълът CAB е тъп, а ъглополовящата BE на $\angle ABC$ разделя страната AC на отсечки с дължини $CE = 3$ и $EA = 2$. Правата BE пресича външната ъглополовяща при върха

A в точка F , а центърът K на описаната около ΔAEF окръжност лежи на правата AB , като точката A е между точките K и B . Да се намери лицето на триъгълника ABC .

Задача 3. Оконният ръб DC на триъгълна пирамида $ABCD$ склучва с равнината на основата ABC ъгъл 60° и има дължина равна на дължината на основния ръб AB . Известно е, че върховете A , B и C на пирамидата и средите на околните ръбове лежат на сфера с радиус 1. Да се докаже, че центърът на тази сфера лежи на правата AB и да се намери дължината на височината на пирамидата.

Задача 4. Дадена е функцията

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha)^3,$$

където $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ е реален параметър, а x е реална променлива, за която $-(1 + \cos \alpha) \leq x \leq 1 + \cos \alpha$.

а) Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x)$.

б) Да се докаже, че за всяко $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ и всяко $x \in [-(1 + \cos \alpha), 1 + \cos \alpha]$ е изпълнено неравенството

$$x^4 - 2x^2 \sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha)^3 \leq -2.$$

За кои стойности на x и α в това неравенство се достига равенството?

ТЕМА 2.

доц. Димитър Иванчев – директор на Института по приложна математика и информатика при ТУ, София;
ас. Александър Кючуков – ТУ, София

Задача 1. Нека x , y и a са реални числа.

а) Решете системата:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 2 \\ x^3 + x = 2. \end{cases}$$

б) Да се докаже, че уравнението

$$-ax^3 + x^2 + y^2 + xy - ax - 2(1 - a) = 0$$

има поне едно решение (x_0, y_0) , което не зависи от стойностите на параметъра a .

Задача 2. Дадени са функциите $f(x) = x^2 + 6x + 13$

$$\text{и } g(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}.$$

а) Да се намери най-малката стойност на $f(x)$.
б) Да се намери най-малката стойност на $g(x)$ за $x > 0$.

в) Да се реши уравнението

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{f(y)} = \frac{\log_3 |y| + \log_{|y|} 3}{2}.$$

Задача 3. Катетите на правоъгълен триъгълник са $AC = 4$ см и $BC = 3$ см. Точката M лежи на катета AC , точката N – на хипотенузата AB така, че $CM = BN = BC$.

- a) Да се определи дължината на отсечката MN .
б) Да се докаже, че $\triangle CMN$ е правоъгълен.

Задача 4. Основата на n -ъгълна пирамида е правилният многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$, $n > 2$, като центърът му O е ортогоналната проекция на върха B на пирамидата в равнината на основата. Ъгълът между околна стена и основата на пирамидата има мярка, равна на мярката на ъгъла между околен и основен ръб.

- a) Да се докаже, че $\angle OA_1A_2 < \frac{1}{2} \angle A_1OA_2$.
б) Да се намери n .

ТЕМА 3.

доц. Вл. Тодоров, гл.ас. П. Стоев,
гл.ас. А. Хамамджиев, ВИАС, София

Задача 1. Нека $f(x) = 7x - x^2$ и $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2^t x + 6.4^t$, където t е реален параметър. За кои стойности на t графиките на двете функции

- a) се пресичат; б) не се пресичат; в) се допират?

В последния случай намерете тангенса на ъгъла между общата им допирателна и абсцисната ос.

Задача 2. В равнобедрен трапец с остьр ъгъл α може да се впише окръжност. Нека k е отношението на радиусите на описаната и вписаната окръжности на трапеца.

- a) Да се изчисли $\sin \alpha$.
б) Да се намерят всички стойности, които може да приема k .

в) Нека $k = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, а бедрото на трапеца е $2q$. Да се намери разстоянието между центровете на окръжностите вписани в триъгълниците, на които трапеца е разделен от негов диагонал.

Задача 3. Нека $ABC A_1B_1C_1$ е призма с основи ABC и $A_1B_1C_1$ и околни ръбове AA_1 , BB_1 и CC_1 , като ъгълът между равнините ABB_1 и BCA_1 е φ , а BA_1 има дължина d .

- a) Ако лицата на ABB_1A_1 и ΔBCA_1 са съответно S и σ , да се намери обемът на призмата.
б) Ако ABB_1A_1 е ромб с ъгъл $\angle A = 60^\circ$, а ΔBCA_1 е равностранен, да се намери косинуса на този ъгъл φ , при който повърхнината на пирамидата $ABC A_1$ е най-голяма.

ТЕМА 4.

проф. Ив. Райчинов, УНСС, София

Задача 1. Намерете най-голямата стойност M на функцията

$$f(x) = (0,5)^{\log_8 \log_{\frac{1}{5}} \frac{5x^2 - 4}{5}} - \sqrt{1 - x^2}$$

и пресметнете границата

$$\lim_{x \rightarrow 1-M} \frac{1 + f(x) - [1 - \log_5(5x^2 - 4)]^{-\frac{1}{3}}}{x^2}.$$

Задача 2. Страните на трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) са $AB = a$, $CD = b$ и $AD = BC = c$. При условие, че мерките на два от ъглите на $\triangle OBC$, където O е центърът на описаната около трапеца окръжност, удовлетворяват уравнението

$$\sqrt{3} \sin 2x + \tan x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}},$$

да се докаже, че:

- a) $AC \perp BD$;
б) съществува триъгълник, чийто страни имат дължини a , b и $\sqrt{2}c$. Да се определи и видът на този триъгълник.

Задача 3. Околният ръб SC на триъгълна пирамида $SABC$ е перпендикулярен на равнината на основата и има дължина 1, а другите два околни ръба имат дължини равни на 2. Да се намери обемът на пирамидата като функция на $\angle ASB = \alpha$. При коя стойност на $\cos \alpha$ той е най-голям?

Забележка: По вина на коректора, в условията на последните три задачи от ТЕМА 4, бр.1, 1995 г. са допуснати следните печатни грешки: 1) В задача 2 дясната

страна на неравенството да се чете „ $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\sin 8x}{\sin x}}$ “.

- 2) Първото изречение в задача 3 да се чете „... равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$) ...“.
3) Второто изречение на задача 4 да се чете „Всички околни стени на пирамидата ...“.

Редакцията се извинява на автора проф. Ив. Райчинов и на читателите за допуснатите неточности.

ТЕМА 5.

ст.ас. Пл. Христов, ВМЕИ, Габрово

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\cot g x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$$

Задача 2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$\sqrt{a(2^x - 2)} + 1 = 1 - 2^x$$

има решение. Да се реши уравнението за $a = 1$.

Задача 3. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с голяма основа AB , остьр ъгъл α и $BC = CD = DA = a$. Да се намери диагоналът и лицето на трапеца. За коя стойност на α лицето е най-голямо?

Задача 4. Равнобедреният правоъгълен триъгълник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) е основа на пирамида $ABCD$. Ръбът DA е перпендикулярен на равнината на основата и $DA = AC = BC = a$. През точката C , перпендикулярно на ръба DB , е прекарана равнина.

- a) Да се намери лицето на полученото сечение.
б) Да се намери синусът на ъгъла между ръба AC и равнината на сечението.

Внимание!

Организира се кандидат-студентски курс по МАТЕМАТИКА с ръководител проф. И. Райчинов (УНСС). Справки и записвания на тел. 70-28-22, вечер.

ОТГОВОРИ, УПЪТВАНИЯ, РЕШЕНИЯ

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ КОНТРОЛНОТО ЗА БАЛКАНИАДАТА (от стр. 6)

1. Нека $t(x) = h(x) - f(x) = ax^2 + bx + c$. От условието следва $0 \leq t(x) \leq (x-1)^2$ за всяко x . При $x=1$ имаме $t(1)=0$, т.e. $t(x)=a(x-1)(x-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. От неравенството за $t(x)$ следва $0 \leq a \leq 1$ и $\alpha=1$, т.e. $h(x)=a(x-1)^2+f(x)$. Но $(x-1)^2=g(x)-f(x)$ и значи $h(x)=(1-a)f(x)+ag(x)$. Накрая полагаме $\lambda=1-a$.

2. Нека CH и DH_1 са височините в ΔABC и ΔFDE , $CH \cap EF = H_2$. От условието $AB=25$, $S_{ABC}=150$ и $CH=12$. Нека $\frac{CF}{CA}=x \in (0,1)$. $\Delta FCE \cong \Delta ACB$ и $EF=25x$. Също $DH_1=HH_2=CH-CH_2=12(1-x)$ и значи $S_{EFD}=\frac{1}{2}EF \cdot DH_1=\frac{25x \cdot 12(1-x)}{5}=24$. Оттук $x=\frac{1}{5}$ или $x=\frac{4}{5}$. Ако $x=\frac{1}{5}$, то $EF=5$ и $DH_1=\frac{48}{5}$. От всички триъгълници с дадена страна EF и височина към нея най-малък периметър има равнобедреният (задача на Херон) и в този случай

$P_{DEF}=5+\frac{\sqrt{9841}}{5}<25$. При $x=\frac{4}{5}$ най-малкият периметър е $P_{DEF}=20+\frac{2}{5}\sqrt{2644}>40$. Отг.

$5+\frac{\sqrt{9841}}{5}$, което се достига при $\frac{CF}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{1}{5}$ и D е пресечната точка на симетралата на EF с правата AB .

3. Нека $n^2-1=t(m^2+1-n^2)$, откъдето $m^2=(t+1)(m^2+1-n^2)$. Нека $k=1+t \neq 0$. Достатъчно е да покажем, че k е точен квадрат (зашо?). Разглеждаме множеството $S_k=\{(x,y)/x,y \in \mathbb{Z}, (x+y)^2=k(1+4xy)\}$. $S_k \neq \emptyset$, защото $\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right) \in S_k$.

Ако $(x,y) \in S_k$, то $(y,x) \in S_k$ и $(-x,-y) \in S_k$. Нека $a=\min\{|x|/(x,y) \in S_k\}$. Ше покажем, че $a=0$. Ако $(a,b) \in S_k$, то b е корен на $(x+a)^2=k(1+4ax)$ и следователно вторият корен е също цяло число. Означаваме тези корени с b_1 и b_2 и от формулите на Виет имаме $b_1+b_2=4ak-2a$, $b_1b_2=a^2-k$. Оттук $(a+b_1)(a+b_2)=(4a^2-1)k$. Освен това $|b_i| \geq a$, $i=1,2$. Нека $k < 0$. Тогава $b_1b_2 > 0$ и $b_1+b_2 \leq 0$ ($a \geq 0$), $b_1 < 0$, $b_2 < 0$. От $a \leq |b_i|$ следва $a+b_i \leq 0$. Оттук $(4a^2-1)k > 0$, т.e. $a=0$. Ако $k > 0$ и $a \neq 0$, то $(a+b_1)+(a+b_2)=4ak > 0$ и $(a+b_1)(a+b_2)=(4a^2-1)k > 0$, т.e. $a+b_1 > 0$ и $a+b_2 > 0$. Но $b_1b_2=a^2-k < a^2$ и $|b_1b_2| \geq a^2$, т.e. $b_1b_2 < -a^2 < 0$. Ако $b_2 < 0$, то $-b_2=|b_2| \geq a$, което противоречи на $a > -b_2$. Следователно $a=0$ и от уравнението следва, че $k=b^2$.

4. Нека $f(K)$ е сумата на числата в Y -таблицата K . В едната посока твърдението следва от

факта, че при всяка от трите операции $f(K)$ не нераства. Нека $f(K) \geq 0$ за всяка K . Тогава сумата S на числата във всички Y -таблици е неотрицателна, като тя е нула, точно когато всички числа в таблицата са 0. Нека поне едно число в таблицата не е 0. Ше покажем, че можем да стигнем до таблица с по-малко S и такава, че $f(K) \geq 0$ за всяка K . Ако K_1 и K_2 са Y -таблици, то $K_1 \cap K_2$ и $K_1 \cup K_2$ са също Y -таблици. Освен това $f(K_1)+f(K_2)=f(K_1 \cup K_2)+f(K_1 \cap K_2)$. Оттук множеството на всички K , за които $f(K)=0$, е затворено онтосно обединение и сечение. Нека сега $a_{ij} > 0$ за някои i и j . 1) Ако $a_{ij} \notin K$ за $f(K)=0$, прилагаме третата операция. 2) Нека (i,j) е клетка от Y -таблица със сума 0 и нека K е сечението на всички Y -таблици със сума 0, които съдържат тази клетка. Ше покажем, че $(i+1,j) \in K$ или $(i,j+1) \in K$. В противен случай $K'=K \setminus (i,j)$ е Y -таблица с $f(K') < 0$, противоречие. В зависимост от горните два случая прилагаме първата или втората операция. Да отбележим, че в този случай, ако K' е Y -таблица, за която $(i,j) \in K'$ и $(i+1,j) \notin K'$ и $K' \neq K$, то от $f(K')=0$ следва $f(K \cap K')=0$ и $K \cap K' \subsetneq K$, което е противоречие с минималността на K . бигскип

АКО КАНДИДАТСТВАТЕ СЛЕД 7 КЛАС (от стр. 19)

1. Отг. а) $56, 25x^2 - 30x^3 + 125$; б) $1, 94x^2 + 4x$.
2. а) Отг. $(x-5+3y)(x-5-3y)$; б) представете $4x^2$ като $2x^2+2x^2$, отг. $(2x^2+x+2)(x^2+1)$; в) допълнете до точен куб, отг. $(x+3)(x+7)(x-1)$; г) допълнете до точен квадрат, отг. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$; д) отг. $(x-1)(x+2)(x^2+x+4)$; е) $((x+1)(x+4))((x+2)(x+3))-24=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$; полагаме $x^2+5x=y$, откъдето $(y+4)(y+6)-24=y^2+10y=y(y+10)=x(x+5)(x^2+5x+10)$; ж) след отделяне на точен квадрат, получаваме $(x+2)(x+6)$.
3. а) $A=(2a+3)^2+5$; за да се дели на 10, трябва $(2a+3)^2$ да е число, което завършва на 5, т.e. и $2a+3$ трябва да завършва на 5; при $2a+3=5$, $a=1$; при $2a+3=15$, $a=6$ и т.н.;
- б) от $C=B:D$ следва $B=C \cdot D$, т.e. $B=(x^2-1) \cdot C=(x-1)(x+1) \cdot C$; дясната страна става 0 при $x=1$ и $x=-1$; заместваме с тези стойности в B и получаваме $a+b=8$ и $b-a=10$, откъдето $a=3$ и $b=-7$; в) $F=x^4+(a-2)x^3+(b-2a)x^2-2(6-b)x+24$; оттук $a-2=0$ и $b-2a=0$, т.e. $a=2$ и $b=4$.
4. б) като в задача 2. е) положете $x^2+5x=y$.
6. а) $x=-\frac{1}{4}$; б) $x=\frac{9}{7}$; в) $x=\frac{49}{40}$; г) положете $x^2+x=y$, тогава $y=6$, откъдето $x=2$ и $x=-3$; д) $x=\frac{17}{9}$; е) $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{3}$; ж) отг. $0 \cdot x=-3$,

уравнението няма решение; з) отг. $0 \cdot x = 0$, всяко число е корен на уравнението.

8. Привеждаме уравнението в нормален вид и приравняваме на nulla коефициента пред x^2 .

9. $a \cdot x = 8$, при $a \neq 0$, $x = \frac{8}{a}$, отг. $a = 1, 2, 4$ или 8.

10. Отг. а) $x = 0$; б) $y = 0$; в) $x = \frac{8}{3}$, $x = -\frac{8}{3}$

г) $x = 0$, $x = -\frac{6}{5}$, $x = \frac{6}{5}$.

11. Отг. Няма решение.

12. Отг. $x = 3$.

13. а) За да има решение, трябва $5 - a \geq 0$; отг.

$x = 7 - a - b$ или $x = a - b - 3$; б) отг. $x = -\frac{1}{3} + \frac{p}{3}$

или $x = \frac{1}{3} + \frac{p}{3}$; д) има решение само при $a^2 - 9 \geq 0$;

е) има решение само при $a - 2 \geq 0$.

14. а) Отг. $A = (1+x-3k)(1-x+3k)$,

$B = (x-2k)(x-3k+1)$; б) отг. $x = 4$, $x = 1$.

15. Отг. $A = (x-5)(3+x-p)(3-x+p)$, $y = 9$, $y = -5$; $9 - 3p^2 = 9$, т.e. $p = 0$.

16. Отг. а) $x \geq 0$; б) $x \in (-3, \infty)$; в) всяко x е решение; г) $x = -0,5$.

17. Отг. а) $x = -2$ и $x = -1$; б) $x = -1$.

18. а) Ако $2a - 1 = 0$, то всяко x е решение; ако

$2a - 1 > 0$, то $x > \frac{2}{2a-1}$; б) ако $a = 0$, то всяко x

е решение; ако $a > 0$, то $x \geq -2(a+1)$; ако $a < 0$,

то $x \leq -2(a+1)$; в) ако $a = -1$, то няма решение;

ако $a > -1$, то $x > \frac{1}{a+1}$.

20. $(x-1)(x^2+2) \geq 0$ за всяко $x \geq 1$.

21. а) Отг. $x = 6$ или $x = -6$; б) отг. $x \geq 0$;

в) нека $A(x_A; y_A)$ лежи на графиките на $f(x)$ и $g(x)$, тогава $y_A = x_A - 3$ и $y_A = x_A + 6$, откъде

то $0 \cdot x_A = 9$, което няма решение; следователно

двете графики нямат обща точка.

22. Отг. а) $a = -1$; б) $S = 16 \frac{2}{3}$.

23. Отг. $b = 0$. 24. Отг. $a = \frac{1}{3}$.

25. Точките $A(0; 2)$ и $B(1; 0)$ определят точно една права, която е графика на линейната функция $f(x) = ax + b$. От уравненията $2 = a \cdot 0 + b$ и $0 = a \cdot 1 + b$ намираме $b = 2$ и $a = -2$. Тогава $f(x) = -2x + 2$. Проверяваме, че точката

$C\left(-\frac{1}{4}; 2,5\right)$ лежи на графиката на $f(x)$.

26. Отг. 42 км. 27. а) Отг. 270 км, 3 ч. и 9 мин.; б) на не по-малко от 44 км.

28. а) Отг. 1 ч. и 24 мин.; б) разстоянието между двете коли ще е повече от 5 км в два случая: 1) когато те не са се срещнали; отг. по-малко от 1 ч. и 22 мин. от тръгването; 2) след като се срещнат и разминат, като се отдалечат на повече от 5 км; отг. повече от 1 ч. и 28 мин. от тръгването.

29. Нека пътят е S . Тогава времето на велосипедиста A е $\frac{\frac{S}{2}}{30} + \frac{\frac{S}{2}}{20} = \frac{1}{24}S$. Нека времето на велосипедиста B е t . Тогава $30 \cdot \frac{t}{2} + 20 \cdot \frac{t}{2} = S$, откъдето $t = \frac{1}{25}S$. Но $\frac{1}{24}S - \frac{1}{25}S > 0$ и следователно победител е велосипедистът B .

30. а) Нека броят детайли, произведени в единия цех, е x . Тогава преди ремонта в другия цех се произвеждали $57 - x$ детайла. Имаме $x + \frac{33}{3}\%x + 57 - x = 66$, откъдето $\frac{1}{3}x = 9$. Отг. 27 и 30 детайла. б) Нека y е броят детайли от възложената поръчка. Тогава $\frac{y}{30} \leq \frac{y+72}{36}$, откъдето $y \leq 360$.

31. а) Производителността на I работник (т.e. частта работа, която той свършва за 1 час) е $\frac{1}{8}$, а производителността на II е $\frac{1}{7}$. Нека двамата работят заедно x часа ($x > 0$). Тогава $\frac{x+1}{8} + \frac{x}{7} = 1$, откъдето $x = 3$ ч. и 16 мин. Отг. 4 ч. и 16 мин. б) $\frac{x+1}{8} + \frac{x}{7} \geq \frac{3}{4}$, откъдето $x \geq 2$ ч. и 30 мин. От друга страна от а) следва, че за да свършат цялата работа двамата работят заедно 3 ч. и 16 мин. Следователно времето, през което те са работили заедно и са свършили поне $\frac{3}{4}$ от цялата работа, е най-малко 2 ч. и 20 мин. и най-много 3 ч. и 16 мин.

32. Нека от първата сплав се взимат x г. Изразявайки златото в трите сплави, получаваме $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(120 - x) = \frac{3}{8} \cdot 120$, където $0 \leq x \leq 120$. Оттук $x = 90$ г.

33. а) Отг. 70%. б) Нека от втория съд са взети z л. Изразявайки количеството чист спирт, получаваме $12 + 0,9z \leq \frac{85}{100}(20 + z)$, откъдето $z \leq 100$ л.

34. а) В края на първия месец сумата е $x + x \cdot \frac{p}{100}$, а в края на втория е $x + x \cdot \frac{p}{100} + (x + x \cdot \frac{p}{100}) \cdot \frac{p}{100}$, т.e. $x \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$. Отг. 110 460,1 лв.

б) $x \left(1 + \frac{4,8}{100}\right)^2 = 27 457,6$, откъдето $x = 25 000$ лв.

35. Нека x е броят на бутилките с кока-кола. Тогава бутилките лимонада са $\frac{x}{2}$, а бутилките портокал – съответно $x - 1$. Сумата, която трябва да заплати майката, е $52x + 12 \cdot \frac{x}{2} + 48(x - 1) \leq 700$, x е цяло положително четно число. Получаваме $x \leq 7 \frac{3}{53}$ и значи най-голямото цяло четно решение е 6.

36. Да означим с x броя на учениците, спечелили по една награда. Оттук $2x = 20$, т.e. 10 ученика получили по 1 награда. Останали $37 - 10 = 27$ награди. Нека y ученика печелят по 3 награди. Тогава $10 - y$ ученика печелят по 2 награди, откъдето $3y + 2(10 - y) = 27$ и значи $y = 7$.

37. а) Нека x са годините на по-малкия брат. Тогава по-големият брат е на $(x + 4)$ години. Преди 8 години малкият е бил на $(x - 8)$ години, а големият – на $(x - 4)$ години. Следователно $2(x - 8) = x - 4$, откъдето $x = 12$ години е малкият брат, а големият е на 16 години.

б) След y години малкият брат ще е на $(12 + y)$ години, а големият – на $(16 + y)$ години. Бащата е на 36 години. Оттук $(12 + y) + (16 + y) \leq 36 + y$ и значи $y \leq 8$. Отг. 8 години.

38. а) Нека едното число е x , където $x \neq 0$. Тогава другото число е $x + 36$. Оттук $\frac{x + 36}{x} = 3 + \frac{4}{x}$. Отг. 18 и 54.

б) Да означим търсеното число с y . Имаме $(54 - y)^2 - (18 + y)^2 > 0$, откъдето $y < 18$. Отг. 17.

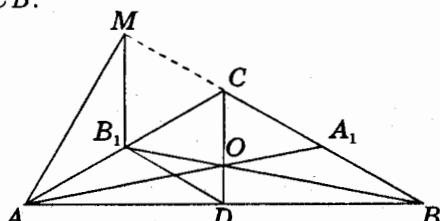
Тема 1

1. а) Отг. $x \in \left[\frac{3}{5}, \infty\right)$. б) Ако $a \neq -2$, то $x = \frac{2-a}{3}$. Тогава x удовлетворява неравенството от а), ако $\frac{2-a}{3} \geq \frac{3}{5}$, т.e. $a \leq \frac{1}{5}$. Отг. $a \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$ и $a \neq -2$.

2. а) Ако x е пътят, който изминава камионът до срещата, то $\frac{x}{30} = \frac{225-x}{90} + \frac{1}{6}$, откъдето $x = 60$ км. Но $\frac{60}{30} = 2$ ч. и значи срещата става в 9 ч. 50 мин.

б) Нека y ч. е времето, което колата престоява в B . Тогава $\frac{225-60}{30} > \frac{225+60}{90} + y$, откъдето $y < \frac{7}{3}$ ч. = 2 ч. 20 мин.

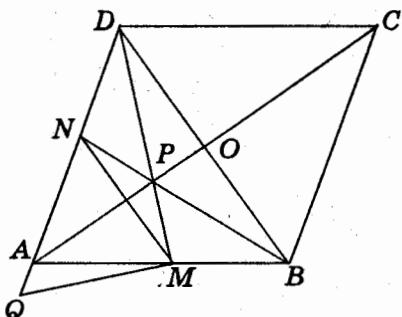
3. а) $\Delta ABA_1 \cong \Delta BAB_1$ (I признак). Оттук $AA_1 = BB_1$ и $\angle A_1AB = \angle B_1BA$. Тогава $AO = BO$ и значи $OA_1 = OB_1$. Имаме $\Delta B_1OC \cong \Delta A_1OC$ (III признак). Следователно CO е ъглополовяща на $\angle ACB$.



б) ΔABD е правоъгълен и $AM = \frac{1}{2}AB$. Тогава $\angle ABM = 30^\circ$. Оттук $\angle BAC = 30^\circ$ и $\angle ACB = 120^\circ > 90^\circ$. Следователно точката C е между B

и M . $\angle ACM = 60^\circ$ (съседен на $\angle ACB$). MB_1 е медиана в правоъгълния триъгълник AMC . Следователно $MB_1 = \frac{1}{2}AC = B_1C$. Тогава ΔB_1MC е равностранен и $MC = MB_1$. Аналогично $DB_1 = B_1C = CD$.

4. а) Нека O е пресечната точка на диагоналите в ромба. Ако $\angle PAD = 4x$, то $\angle PDA = 7x$. Тогава $\angle OAB = 4x$ и $\angle MDB = 7x$. Тъй като ΔDBA е равнобедрен ($AB = AD$), то $\angle ABD = \angle ADB = 14x$. От ΔABD имаме $8x + 14x + 14x = 180^\circ$, откъдето $x = 5^\circ$. Следователно $\angle BAD = 40^\circ$ и $\angle ABC = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.



б) $\Delta QMD \cong \Delta BMD$ (I признак). Оттук $BM = QM = 4$ см и $\angle DQM = \angle DBM$. Но $\angle DBM = \angle ADB$ ($AB = AD$) и $\angle ADB = \angle ANM$ ($MN \parallel BD$). Следователно $\angle MQN = \angle QNM$ и значи $MN = QM = 4$ см. От друга страна $\angle MDB = \angle NMD$ (кръстни). Но $\angle MDB = \angle NDM$ (DM е ъглополовяща). Следователно $\angle NDM = \angle NMD$ и значи $MN = DN = 4$ см. Тогава $PBDNM = BD + DN + NM + BM = 19$ см. Тъй като доказахме, че $BM = MN$, то $\angle MNB = \angle MBN$. Но $\angle MNB = \angle NBD$ (кръстни). Следователно $\angle MBN = \angle NBD$, т.e. BN е ъглополовяща на $\angle ABD$. По условие P лежи на ъглополовящите DM и AO . Тогава P се намира на равни разстояния от раменете DA , DB и AB . Следователно PB е ъглополовяща на $\angle ABD$. Получаваме, че правите BN и PB съвпадат, т.e. P лежи на BN .

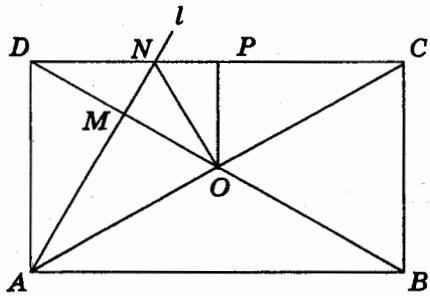
Тема 2

1. а) По условие $x < 2 \Rightarrow |2 - x| = 2 - x$ и тогава решения на неравенството са $x < -\frac{3}{5}$. Най-голямото цяло решение е -2 .

б) След преобразуване получаваме $a^2(a-1)x = -4a^2$. Ако $a = 0$, то $0 \cdot x = 0$ и всяко x е решение; ако $a = 1$, то $0 \cdot x = -4$, което няма решение; ако $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{4}{1-a}$. Всички корени са положителни числа, когато $\frac{4}{1-a} > 0 \Rightarrow 1-a > 0 \Rightarrow a < 1$.

2. а) Нека O е пресечната точка на диагоналите. От условието следва, че AM е височина и ъглополовяща в $\Delta AOD \Rightarrow$ той е равнобед-

рен, т.e. $DA = OA$. Но диагоналите в правоъгълника взаимно се разползват и са равни $\Rightarrow AO = DO$. Получихме, че $\triangle ADO$ е равностранен $\Rightarrow \angle DAM = 30^\circ = \angle MDN$. Разглеждаме $\triangle AND$ – той е правоъгълен и $\angle DAM = 30^\circ \Rightarrow DN = \frac{1}{2}AN = 10$ см. Разглеждаме $\triangle DMN$ – той също е правоъгълен и $\angle MDN = 30^\circ \Rightarrow MN = \frac{1}{2}DN = 5$ см.



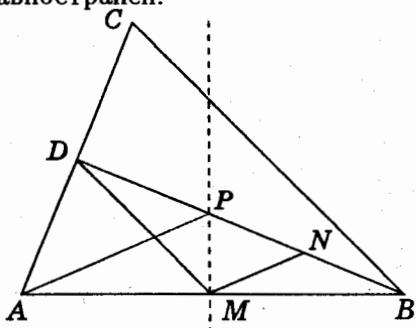
6) Нека т. P е среда на DC . Тогава $\triangle ONP \cong \triangle DNM \cong \triangle ONM \Rightarrow S_{ONP} = S_{DNM} = S_{ONM}$

$\Rightarrow S_{DNM} = \frac{1}{3}S_{DOP}$. OP е медиана в $\triangle DOC \Rightarrow S_{DOP} = \frac{1}{2}S_{DOC} \Rightarrow S_{DMN} = \frac{1}{6}S_{DOC}$. DO е медиана в $\triangle ADC \Rightarrow S_{DOC} = \frac{1}{2}S_{ADC}$, но $S_{ADC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DOC} = \frac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DMN} = \frac{1}{24}S_{ABCD}$.

3. Нека x е броят на куклите (x е естествено число). Строителите са $\frac{x}{3}$, т.e. x се дели на 3. Топките са $x - 3$, т.e. $x > 3$. Цената на всички кукли е $25x$ лв., на строителите е $21 \cdot \frac{x}{3} = 7x$ лв., на топките е $7(x - 3)$ лв. Но броят на топките е 2 пъти по-голям от броя на количките и тогава количките са $\frac{x-3}{2}$ и струват $10 \cdot \frac{x-3}{2} = 5(x-3)$ лв. Тъй като $\frac{x-3}{2}$ е естествено число, то $x - 3$ е четно. Съставяме неравенството $25x + 7x + 7(x - 3) + 5(x - 3) \leq 1050$, където $x > 3$ е нечетно и се дели на 3. Получаваме $44x \leq 1086$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{15}{22}, \text{ т.e. } x = 21.$$

4. a) $\triangle APD \cong \triangle APM$ (IV признак) $\Rightarrow \angle DAP = \angle PAM$, но PM е симетрала $\Rightarrow \triangle APB$ е равнобедрен $\Rightarrow \angle PAM = \angle PBM \Rightarrow \angle DAB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADM$ е равностранен.



b) MN е медиана в $\triangle PMB$, който е правоъгълен $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}PB$, но $AP = PB$ (PM е симетрала) $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}AP$. $\triangle MNB$ е равнобедрен $\Rightarrow \angle NMB = \angle NBM$, но $\angle NBM = \angle PAB$. Следователно съответните ъгли, получени при пресичането на MN и AP с AB , са равни, т.e. $MN \parallel AP$.

Тема за 8 клас

1. a) При $a = 1$ уравнението има един корен $x = 1$. б) За $a = 2$. Упътване: заместете x с $0.4a$ и решете полученото уравнение относно a .

2. 45, 495 и 645. Упътване: Ако даденото число означим с \overline{xy} , то другите две числа ще бъдат съответно $\overline{x9y}$ и $\overline{6xy}$ и тогава от условието следва системата

$$\begin{aligned} 100x + 90 + y &= 11(10x + y) \\ 600 + 10x + y &= 100x + 90y + 150 \end{aligned}$$

3. а) $\angle A = 30^\circ$; $\angle B = 60^\circ$. Упътване: Ако точките A_1 и B_1 са среди съответно на катетите BC и AC на $\triangle ABC$, точката O_1 е среда на отсечката A_1B_1 , а CL и CH са съответно медианата и височината към хипотенузата, то докажете, че O_1M е средна отсечка в $\triangle CLH$.

б) C е вътрешна точка за k . Упътване: Докажете, че $\angle A_1MB_1$ е тъл.

4. а) Лицето на трапеца е $\frac{9a^2}{4}$. Упътване: Докажете, че височината и средната основа на трапеца са равни.

б) Сборът на двете основи е $3a$, докато сборът на бедрата е по-голям от $3a$.

Тема за НПМГ – I изпит

1. а) $x > -2$; б) $a = 5$, $x = \frac{3}{2}$; в) $y = -1$.

2. а) 11,4%; б) повече от 2,5 л.

3. а) 60° , 120° .

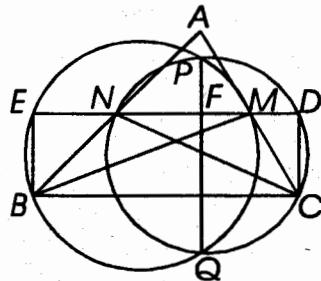
Тема за НПМГ – II изпит

1. а) $(a+3)(a-3)x = a(a-3)$; при $a = -3$ уравнението няма решение; при $a = 3$ всяко x е решение; при $a \neq 3$ и $a \neq -3$, $x = \frac{a}{a+3}$. Уравнението има поне едно цяло решение при a равно на $-6, -4, -2, 0$ или 3 . б) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = -\frac{2}{3}$; в) $(0; 1)$ и $(-1; 0)$.

2. а) $46\ 666\frac{2}{3}$ км; б) $48\ 000$ км.

3. б) Постройте $CP \perp MN$ ($P \in MN$) и докажете, че $\triangle CPM \cong \triangle ADC$ по втори признак, откъдето ще получите, че $EN = CP = AD$, т.e. $BN = BE + EN = BE + AD$. в) $ES = DS =$

$\frac{1}{2}AB$ като медиани в правоъгълните триъгълници ABD и ABE ; $\angle ASE = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ и $\angle BSD = \frac{180^\circ - \beta}{2}$, тъй като $\triangle AES$ и $\triangle BSD$ са равнобедрени; тогава $\angle ESD = 180^\circ - \angle ASE - \angle BSD = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} - \frac{180^\circ - \beta}{2} = 60^\circ$, т.e. $\triangle ESD$ е равностранен.



АМЕРИКАНСКИ КОЛЕЖ (от стр. 23)

1(C), 2(D), 3(D), 4(B), 5(A), 6(C), 7(C), 8(D), 9(A), 10(B), 11(B), 12(C), 13(A), 14(A), 15(B), 16(E), 17(C), 18(C), 19(E), 20(B), 21(D), 22(B), 23(E), 24(D), 25(E)

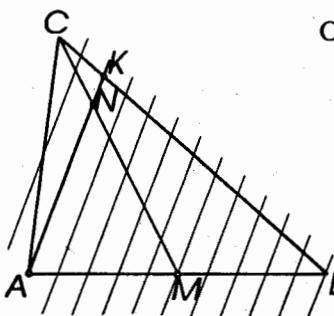
АКО КАНДИДАТСТВАТЕ ВЪВ ВУЗ (от стр. 27)

1. Ако K е средата на AB , докажете, че $\triangle EKF$ е равнобедрен ($EK = KF$). Отг. $\angle BEF = \frac{\alpha}{2}$.

2. Ако H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и P е центърът на окръжността, минаваща през точките A , B и H , докажете, че $\angle ACB = \angle APB = 2\angle AHB$. Отг. $R = 2\sqrt{3}$.

3. Използвайте, че $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(AC_1 + C_1B + BA_1 + A_1C + CB_1 + B_1A) = AC_1 + BA_1 + CB_1$.

4. Използвайте резултата от предната задача.



5. Разделете отсечката CM на 7 равни части и през точките на деление (точка N е една от тях) прекарайте прости, успоредни на AN . Тези прости разделят отсечката AM на 5 равни части (докажете това!). След това разделете отсечката MB на 5 равни части и през точките на деление прекарайте прости, успоредни на AN . Докажете, че всичките построени прости разделят отсечката BC на 12 равни части. Отг. $\frac{CK}{KB} = \frac{1}{5}$.

6. Докажете, че $PQ \perp MN$ и, че $EDCB$ (вж. чертежа) е правоъгълник. Използвайте и равенства $EF \cdot FM = PF \cdot FQ$ и $NF \cdot FD = PF \cdot FQ$. Отг. $\frac{NF}{FM} = \sqrt{3}$.

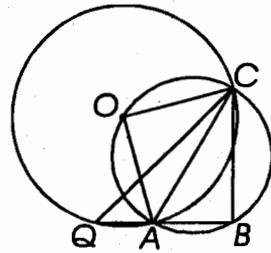
7. Ако CN е диаметър на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, докажете, че $AHBN$ е успоредник със страни $AH = BN = 2$ и $BH = AN = 2\sqrt{2}$. Отг. $\angle ACB = 60^\circ$.

8. Отг. $S = 2r^2 \left(\frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \right)$.

9. Отг. $AB = 7$, $BC = 5$, $AC = 3$.

10. Докажете, че центърът O на k_1 лежи върху онази дъга AC на k , която не съдържа B .

а) Докажете, че $\triangle QBC$ е равнобедрен, т.e. $QB =$



$BC = \sqrt{3}AB$. Тогава от синусовата теорема за $\triangle ABC$ следва $\frac{\sqrt{3}AB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 30^\circ}$, т.e. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откъдето $\alpha = \angle BAC = 60^\circ$ и $\beta = \angle ABC = 90^\circ$ или $\alpha = 120^\circ$ и $\beta = 30^\circ$, като не е трудно да се види, че двете възможности се реализират.

б) Отг. $S = \frac{l^2 \sin(\alpha + 15^\circ) \sin(\beta + 15^\circ)}{4 \sin \alpha \sin \beta}$, откъдето

$$S = \frac{l^2(3 + 2\sqrt{3})}{24} \text{ при } \alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ \text{ и } S = \frac{l^2\sqrt{3}}{6} \text{ при } \alpha = 120^\circ, \beta = 30^\circ.$$

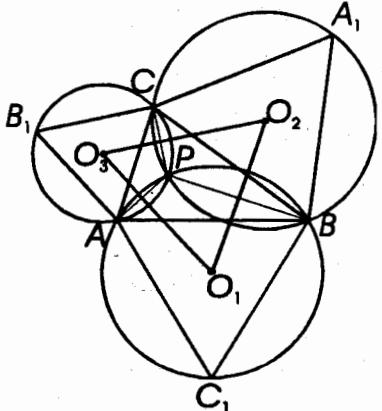
11. Нека $AB = x$ и $BC = y$. Тогава $x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = a^2$ и $a^2 = Rr = \frac{a}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{2S}{a + x + y} = \frac{a}{(a + x + y) \sin \alpha} \cdot \frac{1}{2} xy \sin \alpha = \frac{axy}{2(a + x + y)}$. Следователно дължините на страните AC и BC са решенията на системата

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = a^2 \\ 2a(a + x + y) = xy \end{cases}$$

Отг. $AC = \frac{a}{2} (5 + 4 \cos \alpha + \sqrt{16 \cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha - 23})$ и $BC = \frac{a}{2} (5 + 4 \cos \alpha - \sqrt{16 \cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha - 23})$.

12. а) Нека окръжностите с центрове O_1 и O_2 се пресичат в точка P . Докажете, че $\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$. Тогава и $\angle APC = 120^\circ$, откъдето около $APCB_1$ може да се опише окръжност. б) Използвайте, че централата на две окръжности е перпендикулярна на общата им хорда. в) Приложе-

те косинусовата теорема за $\triangle O_1BO_2$.

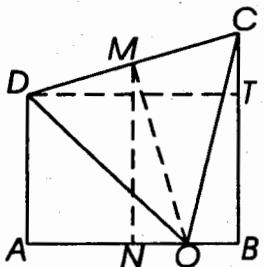


13. б) Докажете, че ако β и γ са големините на другите два ъгъла на триъгълника, то

$$\frac{r}{R} = \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin \alpha \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

откъдето при фиксирано α отношението $\frac{r}{R}$ е най-голямо, когато $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 1$, т.e. $\beta = \gamma$.

14. Отг. $S = \left(\cotg \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) R^2$.



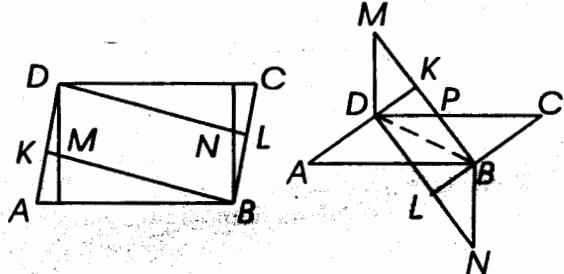
15. Нека двете положения на стълбата са OC и OD . По условие $OC = OD = x$ (x е дължината на стълбата) и $\angle COD = 60^\circ$. Значи $\triangle ODC$ е равностранен. Ако M и N са средите съответно на DC и AB то $\triangle OMN \sim \triangle DTC$, откъдето $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{21}{2}$, т.e. $AD + BC = 21$. И понеже една от дълчините AD и BC е равна на 11, другата ще е равна на 10. За дължината на стълбата пък намираме $x = 2\sqrt{37}$.

16. Отг. 1 : 2 17. Ако успоредникът е $ABCD$ ($AB = CD = 4$, $BC = AD = 3$) и O е пресечната точка на диагоналите му, използвайте, че $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ и приложете косинусовата теорема за $\triangle AOD$. Отг. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

18. Използвайте, че центърът на вписаната в ромба окръжност съвпада с пресечната точка на диагоналите на ромба. Отг. 30 и 40.

19. На чертежа са показани двете възможни разположения на пресечните точки на перпендикулярите през B и D . Първо докажете, че $DM < MB$, откъдето като се използва подобието на $ABCD$ и $MBND$ следва, че $MB = 2DM$. Нека

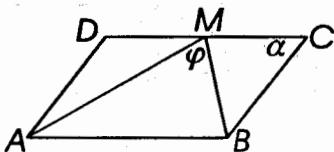
$\angle BAC = \alpha$. Тогава в случая, когато точките M и N са вътрешни за $ABCD$, имаме $BM = \frac{BP}{\sin \alpha} = \frac{2 - AP}{\sin \alpha} = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ и $MD = \frac{KD}{\sin \alpha} = \frac{1 - AK}{\sin \alpha} = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha}$. От $BM = 2MD$ следва, че $2 - \cos \alpha = 2(1 - 2 \cos \alpha)$, т.e. $\cos \alpha = 0$, което е невъзможно,



зашото $\angle BAC$ е оствър. Следователно единственото възможно разположение на точките M и N е когато те са извън успоредника $ABCD$. От подобието на $ABCD$ и $MBND$ веднага следва, че $\triangle ABD \sim BMD$, като $\angle DBM = \angle ABD$ и $\angle DAB = \angle BMD = \alpha$. И тъй като BD е общая страна за двата триъгълника, то те са еднакви, т.e. $MD = BN = 1$ и $BM = DN = 2$. Лесно се вижда, че $\triangle PMD \cong \triangle PCB$, т.e. $PM = PC$.

Тогава $MP^2 = 1 + (2 - MP)^2$, откъдето $MP = \frac{5}{4}$.

Сега $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $S = \frac{6}{5}$.

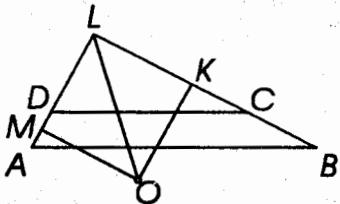


20. Нека M е средата на DC , а $\angle BAD = \angle DCB = \alpha$. Тогава $\angle AMB = \varphi$. Но $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} MA \cdot MB \cdot \sin \varphi$, т.e. $MB \cdot MA = \frac{S_{ABCD}}{\sin \varphi}$ и $AM^2 = b^2 + \frac{a^2}{2} + ab \cos \alpha$, $AM^2 = b^2 + \frac{a^2}{2} - ab \cos \alpha$ и $a^2 = AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \varphi = 2 \left(b^2 + \frac{a^2}{4} \right) - 2 \frac{S_{ABCD}}{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi$, откъдето $S_{ABCD} = \left(b^2 - \frac{a^2}{4} \right) \operatorname{tg} \varphi$.

21. Използвайте формулата за лице на триъгълник чрез две страни и ъгъла между тях за триъгъниците AOB , BOC , COD и DOA . За втората част използвайте, че $AB \parallel CD$ тогава и само тогава, когато височините на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ са равни, т.e. когато $S_1 + S_2 = S_3 + S_2$.

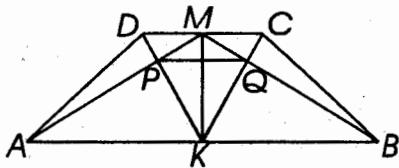
22. а) Докажете, че $S_{AOD} = S_{BOC}$, откъдето следва, че $S_{ABC} = S_{ABD}$ и значи $DC \parallel AB$. б) Използвайте, че $S_2 + S_3 \geq 2\sqrt{S_2 S_3}$, като равенство се достига само ако $S_2 = S_3$. в) Отг. $S = \frac{49}{12} \cdot S_1$.

23. а) Използвайте, че PQ е медиана в $\triangle DPC$ и докажете $S_{APD} = S_{PBC}$. б) Използвайте, че трапеците $APCQ$ и $ABCD$ имат една и съща височина. в) Използвайте, че средните отсечки на $\triangle ABQ$ и $\triangle DPC$ лежат на една права.



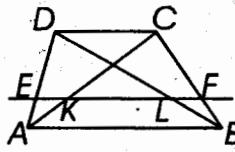
24. Нека O е центърът на разглежданата окръжност и OK и OM са перпендикуляри от O към правите AD и BC . Но окръжността минава през A и D и M е среда на AD , тъй като тя се допира до BC , т.e. $OK = r$. Нека L е пресечната точка на правите AD и BC . Тогава $\triangle ABL \sim \triangle DCL$, $\frac{AL}{DL} = \frac{BL}{CL} = \frac{AB}{DC} = \frac{3}{2}$ и $\frac{DL+5}{DL} = \frac{CL+12}{CL} = \frac{3}{2}$. Оттук $DL = 10$, $CL = 24$ и значи $DL^2 + CL^2 = 10^2 + 24^2 = 26^2 = CD^2$, което показва, че $\angle ALB = 90^\circ$. Значи $OKLM$ е правоъгълник и $OK = r = ML = DL + MD = 12,5$.

25. Докажете първо, че основата на трапеца, до която се допира втората окръжност, има дължина $4\sqrt{2}$. Тъй като дължината на по-малката основа е по-малка от диаметъра на вписаната окръжност, то втората окръжност се допира до голямата основа на трапеца. Отг. $S = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.



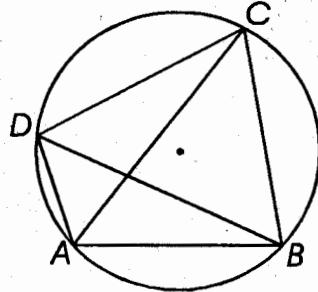
26. $\triangle AKP \sim \triangle MDK$ и $\triangle KBQ \sim \triangle CMQ$. Тогава $\frac{MP}{AP} = \frac{DM}{AK}$ и $\frac{MQ}{BQ} = \frac{CM}{BK}$. Но $DM = CM$ и $AK = BK$, т.e. $\frac{MP}{AP} = \frac{MQ}{QB}$, откъдето $\frac{MP}{AP} = \frac{MQ}{MB}$. Следователно $\triangle PQM \sim \triangle ABM$ и съответни страни са MP и MA . Тогава $\angle PQM = \angle ABM$, което показва, че $PQ \parallel AB$. Значи правоъгълните триъгълници AKP и KBQ имат равни хипотенузи и височини. Това е достатъчно за единаквостта им. Оттук $\angle PKA = \angle QKB = 60^\circ$. (Ако допуснем, че $\angle PKA = \angle QBK$, то $\angle AKP + \angle PKQ + \angle QKB = \angle PKA + 60^\circ + 90^\circ - \angle QBK = 150^\circ$, което е абсурд.) Сега $S = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

27. Използвайте, че $\triangle DCA \sim \triangle EKA$, $DCB \sim \triangle LFB$ и $\triangle ABC \sim \triangle KFC$.



$$28. \text{Отг. } PQ = \frac{3ab}{a+2b}.$$

29. Приложете Питагоровата теорема за триъгълниците AOB , BOC , COD и DOA , където $O = AC \cap BD$.

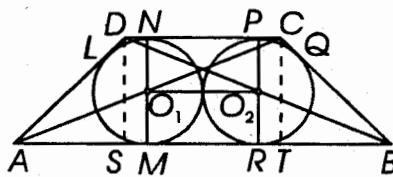


30. От косинусовата теорема следва, че $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$ и $AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC \cdot AD \cdot \cos D$. Но $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, $\cos B = -\cos D$, откъдето $AC^2(AB \cdot BC + DC \cdot AD) = (BC \cdot CD + AB \cdot AD)(AB \cdot DC + AD \cdot BC)$, т.e.

$$AC^2 = \frac{(BC \cdot CD + AB \cdot AD)(AB \cdot DC + AD \cdot BC)}{AB \cdot BC + DC \cdot AD}$$

Аналогично $BD^2 = \frac{(AB \cdot BC + DC \cdot AD)(AB \cdot DC + AD \cdot BC)}{BC \cdot CD + AB \cdot AD}$

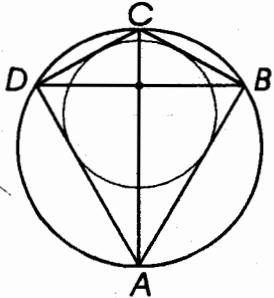
Сега умножаваме последните две равенства.



31. Ще използваме означенията от чертежа. Тъй като общата допирателна на две окръжности с равни радиуси е успоредна на централата им, то $O_1O_2 \parallel DC$ и $O_1O_2 \parallel DC$, т.e. $AB \parallel DC$. Освен това AC е ъглополовяща на $\angle BAD$ и BD е ъглополовяща на $\angle ABC$. Тогава $\angle DCA = \angle BAC = \angle CAD$ и $\angle BDC = \angle DBA = \angle DBC$, т.e. $AD = DC = BC$. От $AB \parallel DC$ следва, че разстоянието между правите AB и DC е $2r$ ($MN = PR = 2r$). Имаме: $AB = AM + MR + RB = 2AL + 2r = 2(AD - DL) + 2r = 2DC - 2DN + 2r = DC + (DC - 2DN) + 2r = DC + 4r$. Следователно $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot 2r = 2r \cdot (DC + 2r)$. Но страна $AB = DC + 2AS = DC + 4r$. Тогава $AS = 2r$ и $AD = DC = 2r\sqrt{2}$. Окончателно $S = 4r^2(1 + \sqrt{2})$.

32. От условието следва $AB + CD = AD + BC$ и $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. От $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC}$ следва, че $AB \cdot BC = AD \cdot DC$. Оттук: $\frac{AB}{CD} = \frac{AD}{BC}$,

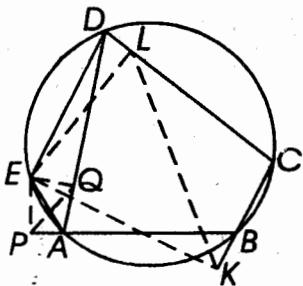
$$\frac{AB+DC}{DC} = \frac{AD+BC}{BC}, \frac{1}{CD} = \frac{1}{BC}, BC = AD \text{ и } AB = AD.$$



Следователно триъгълниците ABC и ABD са еднакви и правоъгълни, AC е диаметър на описаната около $ABCD$ окръжност, центърът на вписаната в $ABCD$ окръжност лежи на AC и $BD \perp AC$. Сега $BD = \frac{2pr}{\sqrt{p^2 - 4pr}}$.

33. Използвайте, че около $ABCD$ може да се опише окръжност.

34. Докажете първо, че $\triangle EPQ \sim \triangle EKL$. От това подобие лесно се получава, че $EQ = \frac{ac}{b}$.

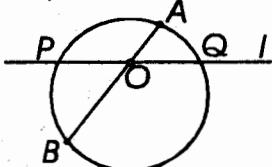


35. б) Докажете, че лицето на $\triangle CMD$ е най-голямо, когато $CM = MD = R_1\sqrt{2}$. В този случай

$$AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2R_2^2 - R_1^2} - R_1 \right) \text{ и}$$

$$BM = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2R_2^2 - R_1^2} + R_1 \right)$$

$$36. \text{ Отг. } \frac{1}{2} + \frac{R - d \sin \alpha}{2 \sin \alpha \sqrt{R^2 - d^2}}.$$



37. Нека правите AB и l се пресичат в точка O и нека окръжност през A и B пресича l в точки P и Q . Тогава $PQ = PO + OQ \geq 2\sqrt{PO \cdot OQ} = 2\sqrt{AO \cdot OB} = \text{const}$, като равенство се достига точно когато O е среда на PQ . Следователно хорда PQ има минимална дължина точно когато O е среда на PQ . Центърът на търсената окръжност е пресечна точка на симетралата на AB и права през O , перпендикулярна на l . По подобен начин се установява, че тази минимална хорда

има най-голяма дължина точно когато правата l минава през средата на отсечката AB .

38. Докажете, че всички ръбове на пирамидата са равни. Отг. $V = \frac{l^3 \sqrt{2}}{12}$.

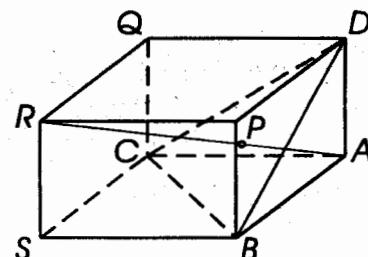
39. а) $V = \frac{1920}{7}\sqrt{3}$; б) $\measuredangle [(MBC), (ABC)] = 60^\circ$.

40. Докажете, че ортооналната проекция на върха на пирамидата върху равнината на основата съвпада с центъра на описаната около основата окръжност. Отг. $V = \frac{1}{6}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$.

41. Докажете, че в основата на пирамидата може да се впише окръжност и ортооналната проекция на върха на пирамидата върху равнината на основата съвпада с центъра на тази окръжност. Отг. а) Височините на околните стени на пирамидата са равни и имат дължини $h = \frac{H}{\sin \alpha}$;

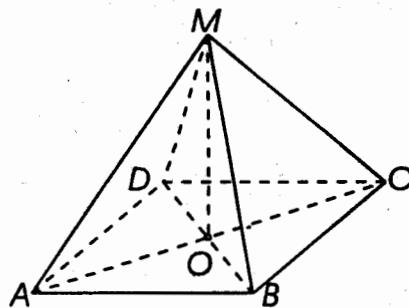
$$б) V = \frac{4}{3}H^3 \cdot \frac{\cot^2 \alpha}{\sin \beta}; в) R = H \cot \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

42. Докажете, че ортооналната проекция на върха на пирамидата върху равнината на основата съвпада с ортоцентъра на основата. Отг. $a) H = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$; б) $3a^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.



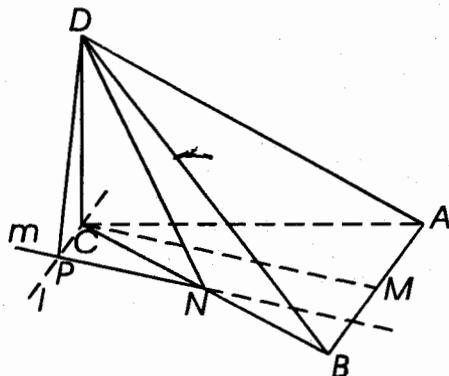
43. Нека A е върхът, при който се събират взаимно перпендикулярните ръбове и нека B, C, D са останалите върхове. Тогава $\measuredangle CAB = \measuredangle CAD = \measuredangle BAD = 90^\circ$. Допълнете пирамидата до правоъглен паралелепипед, както е показано на чертежа. Докажете, че центърът на описаната сфера съвпада със средата на диагонала AR и че този диагонал пробожда равнината (BCD) в медицентъра на $\triangle BCD$.

44. Ще използваме означенията от чертежа. Триъгълниците AMB, BMC, CMD и DMB са еднакви и равнобедрени. Има три възможности:



I. $MA = MB = MC = MD$. Тогава ортогоналната проекция на M върху основата трябва да съвпада с центъра на описаната около $ABCD$ окръжност. Но $ABCD$ е ромб, който не е квадрат (зашото $AC = 2BD$), и значи около него не може да се опише окръжност. Следователно този случай е невъзможен. II. $AB = BC = CD = DA = MB = MD \neq MA = MC$. Тогава триъгълниците DBM и ACM са равнобедрени, което показва, че $MO \perp AC$ и $MO \perp BD$, т.e. MO е височината на пирамидата. Ясно е, че $\triangle BMD \cong \triangle BAD$, което означава, че $\angle BMD = \angle BAD$ е остър. Освен това $OM = OA$, т.e. $\angle OAM = 45^\circ$. Аналогично и $\angle OCM = 45^\circ$. Значи $\angle AMC = 90^\circ$, което показва, че и този случай е невъзможен, защото няма два околни ръба, сключващи тъп ъгъл. III. $AB = BC = CD = DA = MA = MC \neq MB = MD$. В този случай са налице всички условия на задачата ($\angle AMC = \angle ABC$ е тъп) и $V = \frac{4}{3}$.

45. В равнината на основата построяваме права $l \parallel AB$ през C и права $m \parallel CM$ през N . Нека $l \cap m = P$. Ясно е, че $\angle(DN, CM) = \angle PND$.



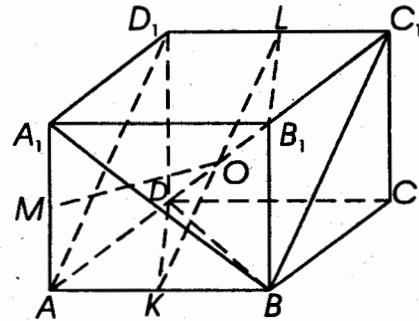
Докажете, че $\triangle NPD$ е равнобедрен и правоъгълен, откъдето $\angle(DN, CM) = \angle PND = 45^\circ$. За да намерим разстоянието d между правите DN и CM , да забележим, че щом $m \parallel CM$, то правата CM е успоредна на (PND) и значи d е равно на разстоянието от коя да е точка на правата CM до (PND) . В частност d е равно на разстоянието от C до (PND) . Тогава $V_{PNCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PND} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6})^2 \cdot d = d$. Но $V_{PNCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PNC} \cdot DC = \frac{1}{6} \cdot PN \cdot PC \cdot DC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Следователно $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

46. Докажете, че ортогоналната проекция H на върха на пирамидата върху равнината на основата ѝ съвпада със средата на отсечката, съединяваща средите на основите AB и CD на трапеца. След това докажете, че центърът на вписаната сфера лежи на правата MH . Отг. $r = \frac{1}{2} l \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

47. Отг. $V_{\max} = \frac{4}{27} abh$.

48. а) Явно $\angle(AA_1, B_1D) = \angle(BB_1, B_1D) = \angle DB_1B$ и значи $\operatorname{tg}(\angle DB_1B) = \sqrt{2}$; б) Имаме $\angle(AD_1, A_1B)$

$= \angle(BC_1, A_1B) = \angle(A_1BC_1) = 60^\circ$; в) Ако L и K са средите съответно на D_1C_1 и AB , то

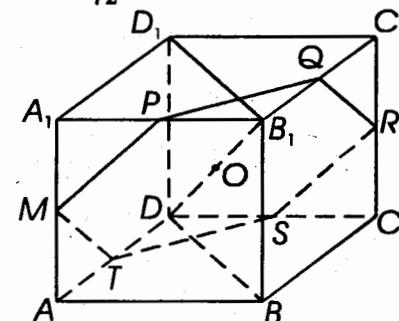


$\angle(AD_1, A_1B) = \angle(LK, B_1D) = \angle B_1OL = 90^\circ$; г)

Ако M е средата на AA_1 , докажете, че $OM \perp AA_1$ и $OM \perp BD_1$. Тогава $OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) Тъй като правата AD_1 е успоредна на (BDC_1) , то търсеното разстояние d е равно на разстоянието от коя да е точка на правата AD_1 до (BDC_1) . Тогава $V_{BDC_1A_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{BDC_1} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot d = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot d$.

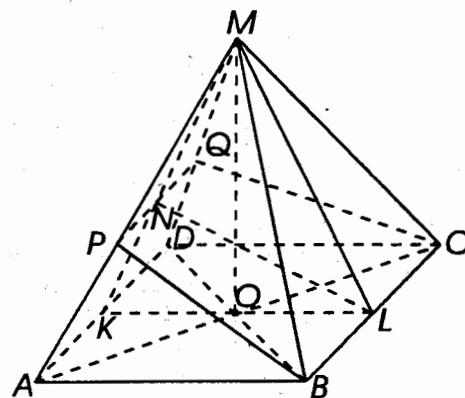
Но $V_{BDC_1A_1} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot CC_1 = \frac{1}{6}$ и $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

49. Отг. $S = \frac{7a}{72} \sqrt{113}$. 50. Отг. $BE : EM = 4 : 3$.

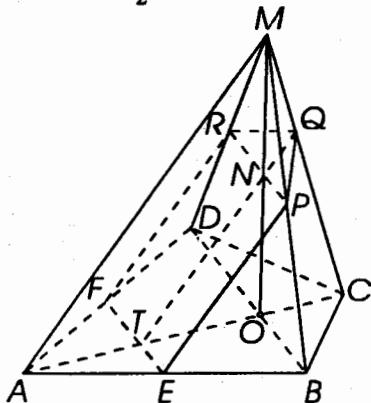


51. Ако M, P, Q, R, S, T са средите съответно на ръбовете $AA_1, A_1B_1, B_1C_1, CC_1, CD, DA$, докажете, че сечението е шестоъгълникът $MPQRST$ и, че той е правилен. Отг. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

52. Нека пирамидата е $ABCDM$ и нека равнината на сечението минава през ръба BC и пресича равнината (ADM) в правата PQ .



Докажете първо, че сечението $BCPQ$ е равнобедрен трапец, като $PQ \parallel BC$. Ако K, L , и N са средите съответно на AD, BC и PQ , докажете, че $\angle KLM = \varphi$ е линейният ъгъл на двустенния ъгъл между равнините $(ABCD)$ и (BCM) . Нека още S е лицето на една околна стена. Тогава от условието на задачата имаме: $S_{\Delta BCM} + 2S_{\Delta BPM} + S_{\Delta PQM} = 2S$, или все едно $2S_{\Delta BPM} + \frac{S_{\Delta PQM}}{S_{\Delta ADM}} = S$. Тъй като $\Delta PQM \sim \Delta ADM$, то $\frac{S_{\Delta PQM}}{S_{\Delta ADM}} = \left(\frac{MN}{MK}\right)^2$, т.e. $S_{\Delta PQM} = \left(\frac{MN}{MK}\right)^2 \cdot S$. Също $\frac{S_{\Delta BPM}}{S_{\Delta ABM}} = \frac{MP}{MA} = \frac{MN}{MK}$, т.e. $S_{\Delta BPM} = \left(\frac{MN}{MK}\right) \cdot S$. От друга страна $\frac{MK}{MN} = \frac{MN + NK}{MN} = 1 + \frac{NK}{MN} = 1 + \frac{KC}{MC} = 1 + 2 \cdot \frac{OK}{MC} = 1 + 2 \cos \varphi$. Следователно $\left(\frac{1}{1+2\cos\varphi}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{1+2\cos\varphi} = 1$, откъдето намираме, че $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\varphi = 45^\circ$.

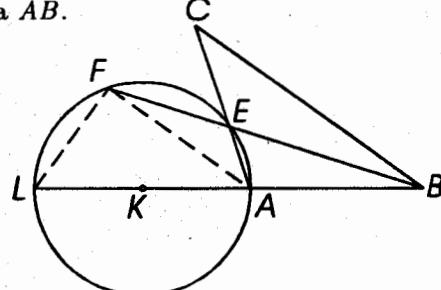


53. Ще използваме означенията от чертежа. Понеже $AB^2 + CD^2 = 25 + 5 = 30 = 17 + 13 = BC^2 + AD^2$, то $AC \perp BD$. Докажете първо, че сечението е петоъгълникът $FPQRF$, където P и R са средите съответно на BM и DM . По-нататък, като използвате теоремата за трите перпендикуляра, докажете, че $TN \perp EF$ (T е среда на EF , а N е среда на MO). Тогава $RPEF$ е правоъгълник и търсеното лице е $S = S_{RPEF} + S_{\Delta RPQ} = EF \cdot TN + \frac{1}{2} \cdot NQ \cdot RP$. Отг. $S = \frac{28}{3}$.

Тема 1

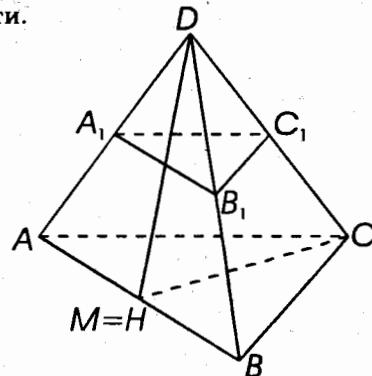
- В първото уравнение полагаме $2^{x-y} = z$ и получаваме $z^2 - z - 2 = 0$, чийто корени са -1 и 2 . Понеже $2^{x-y} > 0$, то $2^{x-y} = 2$, откъдето $x - y = 1$. Като повдигнем в квадрат двете страни на второто уравнение, получаваме $4^{x+y-2} - 2^{x+y-1} - 6 = 0$, откъдето $y^2 + 2y - 3 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = -3$ и $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Отг. $x = 2$, $y = 1$.
- Да означим $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle BAC = \alpha$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b = 5$. Нека още $L \neq A$ е

пресечната точка на дадената окръжност с правата AB .



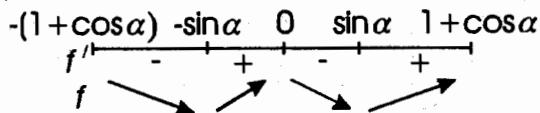
Имаме $\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{LF} - \widehat{AE}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha - 2\alpha + 180^\circ)$ и $\beta = 360^\circ - 3\alpha$, $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 2\alpha - 180^\circ$. От свойството на ъглополовящата и от синусовата теорема намираме: $\frac{2}{3} = \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{-\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = -2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin \gamma = \frac{4}{9}\sqrt{2}$, $\cos \gamma = \frac{7}{9}$. Оттук $\sin \beta = \sin(\alpha + \gamma) = \frac{10\sqrt{2}}{27}$, $a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta} = 9$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = 10\sqrt{2}$.

3. Нека $DC = AB = a$, DH е височината на пирамидата и M е средата на AB . Тогава $\angle HCD = 60^\circ$, $HC = \frac{a}{2}$ и $DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Понеже точките A, B, C , и средите A_1, B_1, C_1 на околните ръбове лежат на една сфера, то около четириъгълниците ABB_1A_1 , BCC_1B_1 и CAA_1C_1 могат да се опишат окръжности.



От друга страна ясно е, че тези четириъгълници са трапеци. Следователно $AA_1 = BB_1 = CC_1$, откъдето $DA = DB = DC = a$. В частност ΔABD е равностранен със страна a . Тогава $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2} = DH$, което означава, че точките M и H съвпадат. Тогава от правоъгълния ΔHCD получаваме: $HC = DC \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$ и $HC_1 = \frac{1}{2}DC = \frac{a}{2}$. Но ΔABD е равностранен със страна a и H е средата на AB , A_1 е средата на AA_1 , B_1 е средата на BB_1 , C_1 е средата на CC_1 . Тъй като $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то $HA = HB = HC = HA_1 = HB_1 = HC_1$. Точката H е равноотдалечена от A, B, C, A_1, B_1, C_1 , т.e. тя е центърът на сферата, минаваща през тези точки. Радиусът е $\frac{a}{2} = 1$, откъдето $a = 2$ и $DH = DC \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

4. а) Имаме:



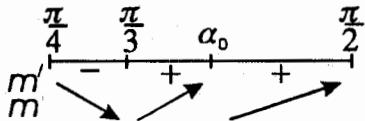
$f' = 4x(x - \sin \alpha)(x + \sin \alpha)$ и $f(x)$ расте в интервалите $(-\sin \alpha, 0)$ и $(\sin \alpha, 1 + \cos \alpha)$, а намалява в $(-(1 + \cos \alpha), -\sin \alpha)$ и $(0, \sin \alpha)$. Следователно най-голямата стойност $m(\alpha)$ на $f(x)$ е равна на по-голямото от числата $f(0)$ и $f(1 + \cos \alpha) = f(-(1 + \cos \alpha))$. Но $f(1 + \cos \alpha) - f(0) = 3(1 + \cos \alpha)^3 \left(\cos \alpha - \frac{1}{3} \right)$. Понеже $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{3}$, то съществува единствено число $\alpha_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, за което $\cos \alpha_0 = \frac{1}{3}$. Тогава $f(1 + \cos \alpha) - f(0) > 0$ при $\cos \alpha > \frac{1}{3}$, т.e. при $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \alpha_0$ и $f(1 + \cos \alpha) - f(0) < 0$ при $\alpha_0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Следователно

$$m(\alpha) = \begin{cases} f(1 + \cos \alpha) & \text{при } \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ f(0) & \text{при } \alpha_0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

От друга страна $f(1 + \cos \alpha) = 3(1 + \cos \alpha)^3 (\cos \alpha - 1)$, откъдето окончателно намираме:

$$m(\alpha) = \begin{cases} 3(1 + \cos \alpha)^3 (\cos \alpha - 1), & \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \alpha_0 \\ -2(1 + \cos \alpha)^3, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

б) Да разгледаме $m(\alpha)$ като функция на α в интервала $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$. Понеже $\cos \alpha$ намалява в този интервал, то $m(\alpha) = -2(1 + \cos \alpha)^3$ расте в $\left[\alpha_0, \frac{\pi}{2} \right]$. Нека $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \alpha_0 \right]$. Тогава $m(\alpha) = 3(1 + \cos \alpha)^3 \times (\cos \alpha - 1)$ и $m'(\alpha) = -12(1 + \cos \alpha)^2 \sin \alpha \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right)$.



Значи $m'(\alpha) > 0$, ако $\cos \alpha - \frac{1}{2} < 0$, т.e. ако $\frac{\pi}{3} < \alpha \leq \alpha_0$ и $m'(\alpha) < 0$, ако $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{3}$. (Ясно е, че $\frac{\pi}{3} < \alpha_0$, защото $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \cos \alpha_0$.) Следователно $m(\alpha)$ намалява в интервала $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$ и расте в $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$. най-голямата стойност на $m(\alpha)$

е по-голямото от числата $m\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4}(3 + \sqrt{2})$ и $m\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$. И понеже $m\left(\frac{\pi}{2}\right) - m\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{2} > 0$, то най-голямата стойност на $m(\alpha)$ е

-2. Оттук за всяко $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ и всяко $x \in [-1 + \cos \alpha, 1 + \cos \alpha]$ е изпълнено $x^4 - 2x^2 \sin^2 \alpha - 2(1 + \cos \alpha)^3 = f(x) \leq m(\alpha) \leq -2$. Равенството се достига, когато $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $x = 0$.

Тема 2

1. а) Второто уравнение е еквивалентно на $x^3 - 1 + x - 1 = 0 \iff (x-1)(x^2+x+2)=0$ и има единствен реален корен $x=1$. Първото уравнение приема вида $y^2+y-1=0$ и корените му са $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Отг. $\left(1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ и $\left(1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. б)

Записваме уравнението във вида $(x^3 + x - 2)a = (x^2 + y^2 + xy - 2)$. То се изпълнява за всяко a при $x^3 + x - 2 = 0$ и $x^2 + y^2 + xy - 2 = 0$. Следователно решението на системата от а) са решения и на уравнението, които не зависят от a .

2. а) $f(x) = x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4 \geq 4$, т.e. $f_{min} = f(-3) = 4$. б) При $x > 0$ е в сила $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Оттук $g_{min} = g(1) = 1$. в) От а) следва $0 < \frac{\pi}{y^2 + 6y + 13} \leq \frac{\pi}{4}$, т.e. $0 < \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{f(y)} \leq 1$. От уравнението получаваме $0 \leq \frac{\log|y| + \log|y|/3}{2} =$

$\frac{1}{2} \left(\log|y|/3 + \frac{1}{\log|y|/3} \right) \leq 1$. Оттук $\log|y|/3 > 0$. От

б) следва $\log|y|/3 = 1$, т.e. $|y| = 3$ и $y = \pm 3$. С директна проверка установяваме, че само $y = -3$ е решение.

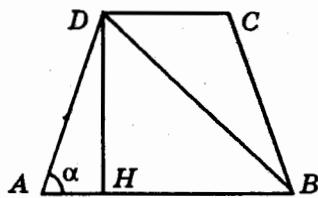
3. От условието следва $AB = 5$, $BN = CM = 3$, $AM = 1$, $AN = 2$. а) От косинусовата теорема за $\triangle AMN$ получаваме $MN = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. б) От косинусовата теорема за $\triangle CNB$ получаваме $CN^2 = \frac{36}{5}$. Тогава $MN^2 + CN^2 = 9 = CM^2$ и от обратната теорема на Питагор следва, че $\triangle CMN$ е правоъгълен.

4. От условието следва, че пирамидата е правилна. Нека M е средата на A_1A_2 . Тогава $OM \perp A_1A_2$, $BM \perp A_1A_2$ и следва $\angle BMO = \angle BA_1M$, $\triangle BMO \sim \triangle BA_1M$ и значи $\frac{BO}{BM} = \frac{OM}{A_1M}$.

а) Тъй като $BO < BM$, то отгоре следва, че $OM < A_1M$. В $\triangle OA_1M$ $\angle OA_1A_2 < \angle MOA_1 = \frac{1}{2} \angle A_1OA_2$. б) Тъй като $\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{n}$ и $\angle OA_1A_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, от а) $\Rightarrow \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$,

Тема 3

1. Решаваме уравнението $g(x) - f(x) = \frac{3}{2}x^2 + (2t - 7)x + 6.4^t = 0$. Отг. а) $t \in (-\infty, 0]$; б) $t \in (0, +\infty)$; в) $t = 0$, но тук е нужна проверка, че допирателите към графиките в общата им точка съвпадат.
2. а) Нека DH е височината в трапеца, а R и r са съответно радиусите на описаната и вписаната окръжности. Имаме $BH = \frac{AB + CD}{2} = \frac{AD + BC}{2} = AD$, $BD = 2R \sin \alpha$, $DH = 2r$, $BD^2 = AD^2 + 4r^2$, $2r = AD \sin \alpha$. Оттук $r^2 \sin^2 \alpha + r^2 = R^2 \sin^4 \alpha$ и $\sin^2 \alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k^2}}{2k^2}$.



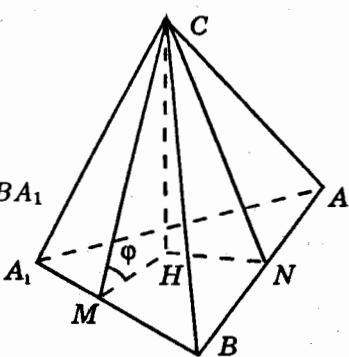
- б) Тъй като $0 < \sin^2 \alpha < 1$ и $k > 0$, то $\frac{1 + \sqrt{1 + 4k^2}}{2k^2} < 1$, откъдето $k \in (\sqrt{2}, \infty)$. в) От а) следва, че $\alpha = 60^\circ$. Нека P и Q са допирните точки на вписаните окръжности съответно в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ с BD . Тогава $DP = \frac{DA + DB - AB}{2} = \frac{DC + DB - BC}{2} = DQ$. Оттук $P \equiv Q$, т.e. двете окръжности се допират и търсено разстояние е равно на сумата от радиусите на тези окръжности. Но $AB = 3q$, $CD = q$, $DH = q\sqrt{3}$, $BD = q\sqrt{7}$ и $S = p.r$, откъдето това разстояние е $\frac{3\sqrt{3}q^2}{5q + q\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{3}q^2}{3q + q\sqrt{7}} = q\frac{\sqrt{3}}{3}(7 - 2\sqrt{7})$.

3. а) Обемът V на призмата е 3 пъти по-голям от обема V_0 на пирамидата ABA_1C_1 . Освен това $S_{ABA_1} = \frac{1}{2}S_{ABB_1A_1} = \frac{S}{2}$. Нека CH е височината на пирамидата A_1BAC_1 . Тогава $\angle HMC = \varphi$ и $HC = CM \sin \varphi$.

$$\text{Но } CM = \frac{2\sigma}{d}, \\ \text{и } V = 3V_0 = S_{ABA_1} \times \\ CH = \frac{S \cdot \sigma \sin \varphi}{d}.$$

- б) Триъгълниците ABA_1 и BCA_1 са равностранни с обща страна $A_1B = d$, а $\triangle ABC \cong \triangle A_1A_1C$, като $AB = AA_1 = d$.

Следователно повърхнината на A_1BAC е най-голяма, когато височината CN на $\triangle ABC$ е най-голяма. Точката M е средата на AB и $CN^2 =$



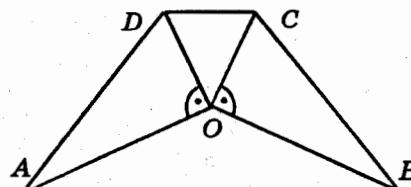
$$CH^2 + CN^2 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{2} \sin \varphi\right)^2 + \frac{1}{4}HA^2, HA = AM - HM = \frac{d\sqrt{3}}{2}(1 - \cos \varphi), CN^2 = \frac{3d^2}{16}(5 - 2\cos \varphi - 3\cos^2 \varphi). \text{ Най-голямата стойност на } g(t) = 5 - 2t - 3t^2 \text{ в } (-1, 1) \text{ се получава за } t = -\frac{1}{3}, \text{ т.e. при } \cos \varphi = -\frac{1}{3}.$$

Тема 4

1. Дефиниционната област на $f(x)$ се определя от условията $1 - x^2 \geq 0$, $\frac{5x^2 - 4}{5} > 0$ и $\log_{\frac{1}{5}} \frac{5x^2 - 4}{5} > 0$, откъдето $\frac{4}{5} < x^2 \leq 1$. След преобразуване $f(x) = (1 - \log_5(5x^2 - 4))^{-3} - \sqrt{1 - x^2}$. $f(x)$ е разлика на две растящи функции при $\frac{4}{5} < x^2 \leq 1$ и M се получава при $x^2 = 1$, т.e. $M = 1$. След заместване за границата имаме $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}$.

2. Тъй като $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$, то уравнението става $\sqrt{3}(1 - \sin 2x) = \tan x - 1$. След преобразуване получаваме две възможности: $\sin x = \cos x$ или $\sqrt{3}(\sin x - \cos x) = \frac{1}{\cos x}$. Полагаме $t = \tan x$ и свеждаме второто уравнение до квадратно, което няма реални корени. Следователно даденото уравнение е еквивалентно със $\sin x = \cos x$.

- а) Тъй като $\triangle OBC$ е равнобедрен и мерките на двете от ъглите му са решения на горното уравнение, то $\angle BOC = 90^\circ$. Условието $AC \perp BD$ е еквивалентно на $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (докажете!). Нека $AO = BO = CO = DO = R$ и $\angle COD = \varphi$. Тогава $AD = BC = R\sqrt{2}$ и трябва да докажем, че $AB^2 + CD^2 = 4R^2$. От косинусовата теорема за $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ имаме $AB^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos \varphi$ и $CD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \varphi$, т.e. $AB^2 + CD^2 = 4R^2$.



- б) Тъй като $AB = a$, $CD = b$ и $\sqrt{2}c = 2R$, от а) следва $a^2 + b^2 = (\sqrt{2}c)^2$, т.e. такъв триъгълник съществува и той е правоъгълен.

3. От условието следва $AC = BC = \sqrt{3}$ и $AB = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos \alpha}$. Но $AC + BC > AB$ и значи $-\frac{1}{2} < \cos \alpha < 1$, т.e. $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$. Сега

$$S_{ABC} = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)(1 + 2\cos \alpha)} \\ \text{и } V_{SABC} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + 2\cos \alpha)}. \text{ Нека } t =$$

$\cos \alpha$. Най-голямата стойност на $(1-t)(1+2t) = 1+t-2t^2$ в интервала $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ се получава при $t = \frac{1}{4}$, то обемът е най-голям при $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ и е равен на $\frac{1}{2}$.

Цялата тема се оценява с 40 т.: 1 зад - 12 т., 2 зад. - 15 т., 3 зад. - 13 т.

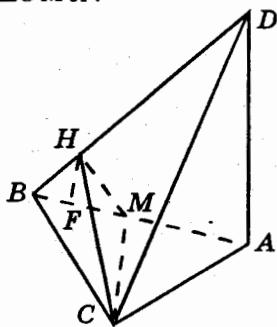
Тема 5

1. След преобразуване получаваме $(1+\cos x)(1-2\sin x) = 0$. Но трябва $1+\cos x \neq 0$ (значимост). Решенията на $\sin x = \frac{1}{2}$ са $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

2. Трябва $1-2^x \geq 0$, т.e. $x \in (-\infty, 0]$. Уравнението е еквивалентно на $a(2^x-2)+1=1-2\cdot2^x+2^{2x}$. Полагаме $2^x=y>0$. Тогава $0 < y \leq 1$ и $y^2-(a+2)y+2a-1=0$. Корените са $y_1=a$ и $y_2=2$. Значи даденото уравнение има решение (единствено) само ако $0 < a \leq 1$. При $a=1$, $x=0$.

3. $S = \frac{1}{2}(AB+CD)\cdot DH = a^2(1+\cos \alpha)\sin \alpha$, $AC = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$. Нека $f(\alpha) = (1+\cos \alpha)\sin \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Тъй като $f'(\alpha) = 2 \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} > 0$ за $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ и $f'(\alpha) < 0$ за $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ и лицето на трапеца е максимално при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

4. От $BC \perp AC$ и $BC \perp DA$ следва $BC \perp CD$. Нека M е среда на AB и $CH \perp BD$. Тогава $CM \perp (ABD)$, т.e. $CM \perp BD$ и $CM \perp MH$. Търсеното сечение е правоъгълният $\triangle CMH$.



a) $CM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $CH = \frac{BC \cdot CD}{BD} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $MH = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Тогава $S_{CMH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. б) Нека d е разстоянието от A до (CMH) и $\varphi = \angle(AC, (CMH))$. Тогава $\sin \varphi = \frac{d}{a}$, $d = \frac{3V_{ACMH}}{S_{CMH}} = \frac{HF \cdot S_{ACM}}{S_{CMH}}$, където $HF \perp AB$. От $\triangle BHM \sim \triangle BAD$ следва $BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$, а от $\triangle BFH \sim \triangle BAD$ следва $HF = \frac{a}{3}$. Сега $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

ЗАДАЧИ М⁺ РЕШЕНИЯ

(продължава от стр. 18)

M⁺48. Да се намерят всички непрекъснати функции $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, такива че

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

(О. Мушкаров, София)

Решение: Нека $x \in (0, \infty)$ е произволно. Тогава $f(x) - x + \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) - x - \frac{f(x)-x}{xf(x)} = 0 \Leftrightarrow (f(x) - x)(xf(x) - 1) = 0$. Следователно $f(x) = x$ или $f(x) = \frac{1}{x}$. В частност $f(1) = 1$. Сега ще използваме непрекъснатостта на $f(x)$ за да докажем, че или $f(x) = x$ за всяко $x \in (0, 1)$ или $f(x) = \frac{1}{x}$ за всяко $x \in (0, 1)$. Аналогично следва, че същото е вярно за интервала $(1, \infty)$. Да допуснем, че $a, b \in (0, 1)$ и $f(a) = a$, $f(b) = \frac{1}{b}$. Без ограничение можем да предполагаме, че $a < b$. Означаваме с c точната долна граница на множеството $L = \left\{ x \in [a, b] / f(x) = \frac{1}{x} \right\}$. Ясно е, че $a \leq c \leq b$. От дефиницията на c следва, че съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $x_n \in L$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната функция, получаваме $\frac{1}{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c)$, т.e. $c \in L$. В частност $c \neq a$, т.e. $a < c \leq b$. Нека сега n е произволно естествено число, за което $n > \frac{1}{c-a}$. От тук $a < c - \frac{1}{n} < c$ и следователно $f(c - \frac{1}{n}) = c - \frac{1}{n}$. Като използваме отново, че $f(x)$ е непрекъсната функция получаваме

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \left(c - \frac{1}{n} \right) = f(c),$$

което е противоречие с $f(c) = \frac{1}{c}$. От всичко казано до тук заключаваме, че търсените функции са следните: $f(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{x} & \text{при } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

и

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x \in (0, 1] \\ x & \text{при } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Във всички изпратени решения липсва обосновка, че намерените четири функции са единствените (което е „солта“ на задачата).



М + КОНКУРС ПО ИНФОРМАТИКА

В тази рубрика се предлагат задачи-теми за програмиране. Те няма да бъдат съвсем изчерпателно формулирани, за да може читателите да проявят своето творчество и в постановката им, което донякъде е естествено при задачите за програмиране. Основна тежест в нашия конкурс има създаването и обосноваването на ефективен алгоритъм за решаване, но задачата ще се счита за напълно решена, ако за нея има завършена и работеща програма. Най-добрите предложени алгоритми и програми ще бъдат съобщавани и обсъждани на страниците на списанието.

Решенията на конкурсените задачи трябва да съдържат описание на алгоритъма и текста на програмната реализация. Препоръчва се да се използва език за програмиране и

компютърна среда, които са по-широко разпространени у нас. Желателно е текстът на програмата да е записан върху дискета с указания за използването му. Изпратената от Вас дискета ще Ви бъде върната по пощата. За да стане това по-бързо, дискетата трябва да бъде снабдена с подходяща опаковка, с надписан адрес за получаване и пощенска марка. За разполагащите с електронна поща адресът е:

or@bgearn.bitnet subject: E.Kelevedziev,
а за използвашите традиционната поща:

1113 София
ул. Акад. Г. Бончев бл. 8

Институт по математика при БАН
Емил Келеведжиев

Задача 10. Дадени са две цели положителни числа A и B . Нека M е множеството от всички точки в равнината, чито координати (x, y) са цели числа такива, че $-A \leq x \leq A$ и $-B \leq y \leq B$. Разглеждат се всевъзможните прости линии, които минават през началото на координатната система и през поне още една точка от множеството M . Да се състави програма, която отпечатва броя на тези прости линии и за всяка пр права – координатите на онези точки от M , които лежат на нея.

(Емил Келеведжиев, София)

Срок за изпращане на решението 15 октомври 1995 г.

Решението на задача 6 от бр. 2, 1994 г. ще публикуваме в следващия брой.

ОБРАЗОВАТЕЛНА ИНИЦИАТИВА НА IBM ЗА БЪЛГАРИЯ

На 6 май 1994 г. беше склучен тристраниен договор между IBM, Министерството на образованието, науката и технологиите и Фондация „Отворено общество“. В рамките на този договор във в. „Азбуки“ и в. „Учителско дело“ беше обявен открит конкурс за оборудване на 28 компютърни класни стаи. През м. август бяха внедрени 2 експериментални инсталации, а до края на миналата година – още 11. На 19 октомври 1994 г. беше открит Център за подготовка на учители по използване на компютри IBM. Предстои организирането на курс за обучение на учители в Софийския университет. Ето и списъкът на първите 15 училища, спечелили споменатия по-горе конкурс: СОУ с изучаване на чужди езици „Св. Кл. Охридски“, Благоевград; II ПМГ, Варна; ТЕ „А. С. Попов“, Велико Търново; ТМТ „Д-р Н. Василиади“, Габрово; СОУ „Л. Каравелов“, Добрич; СОУ „Ив. Вазов“, Плевен; ОМГ „Акад. К. Попов“, Пловдив; СОУ „Св. Седмочисленици“, Пловдив; АЕГ, Русе; ТЕ, Русе; Техникум по текстил „Д. Желязков“, Сливен; 56 СОУ „Проф. К. Иречек“, София; Национална гимназия за древни езици и култури „Константин-Кирил Философ“, София; НПМГ „Акад. Л. Чакалов“, София; Строителен техникум „Хр. Ботев“, София.

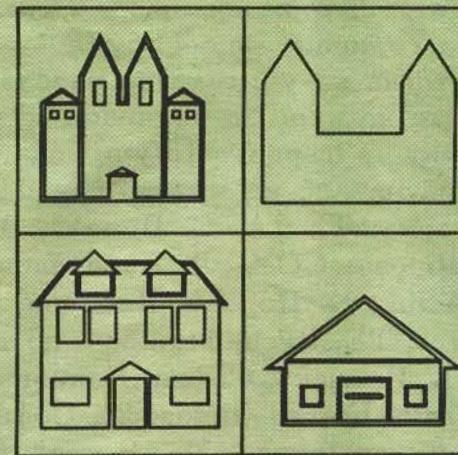
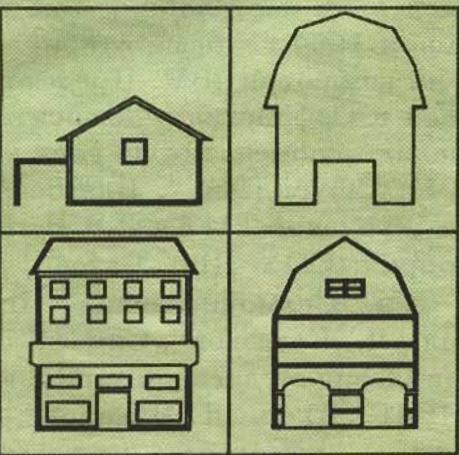
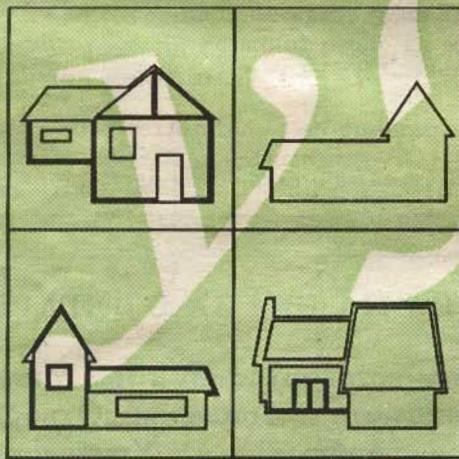
КАНДИДАТСТВАНЕ В ПЪРВИ КЛАС

В училищата към Министерството на културата могат да кандидатстват деца, които са навършили 6 години и които тръгват на училище в годината на кандидатстване. Едно такова училище се намира в София, кв. Горна баня. Друго е СОУ с изучаване на чужди езици „Св. Кл. Охридски“ в Благоевград. Приемът в този род училища се извършва чрез тест, който се задава индивидуално от всяко училище. По-долу ви предлагаме един примерен тест.

В продължение на около 30 минути се провежда събеседване с всяко дете. Задават се 5 задачи, които се оценяват по точкова система.

Задача 1. Предварително са подгответи 20 карти, на които са нарисувани 5 различни шапки, 5 различни маси, 5 различни стола и 5 различни превозни средства. Тази задача се състои от 2 части. В първата част 20-те карти са обърнати с рисунките надолу, детето избира една от тях, в продължение на 1 мин. наблюдава рисунката върху нея и след това връща картата обратно. Втората част на задачата се изпълнява след края на задача 5. Тогава на детето се показват всичките 20 карти. То трябва да познае изтеглената от него, както и останалите 4, върху които нарисуваните предмети изпълняват една и съща функция.

Задача 2. На детето се показват едно по едно всяко от 4-те табла по-долу. За всяко от таблата то трябва да посочи дали показаният силует отговаря на някоя от трите сгради и ако отговаря, на коя точно.



Задача 3. Предварително са подгответи 10 картички. Детето изтегля по избор една от тях и в продължение на 5 минути мисли и съставя устно разказче по картинаката.

Задача 4. На детето се обяснява следното съответствие:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
„	^	„	—	~	>	+	•	—

В продължение на 2 минути то трябва да попълни възможно повече от показаните по-долу празни квадратчета:

1	4	5	5	8	2	3	4	5	6	9	3	7	6	5	4	1	7	9	6	3	2	1	5

Задача 5. В продължение на 10 минути детето трябва да довърши рисунка 2, гледайки от рисунка 1, и да дорисува останалите 17 картички, използвайки показаните фрагменти.

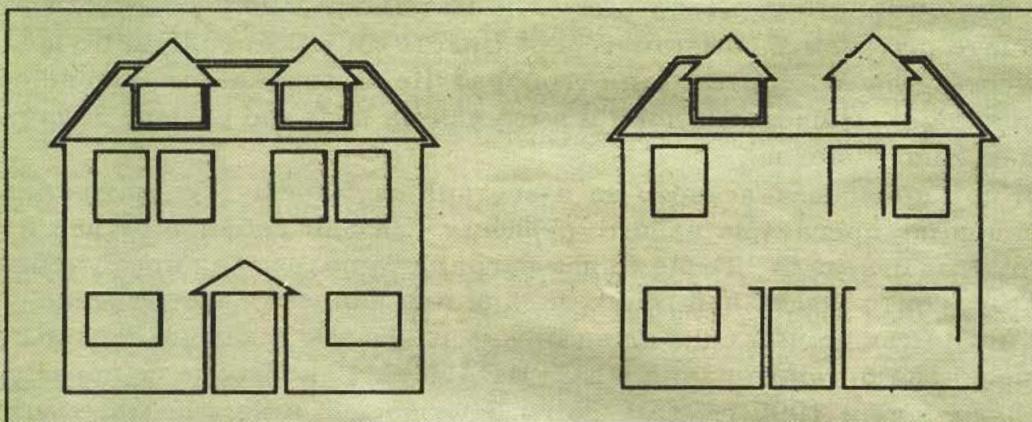
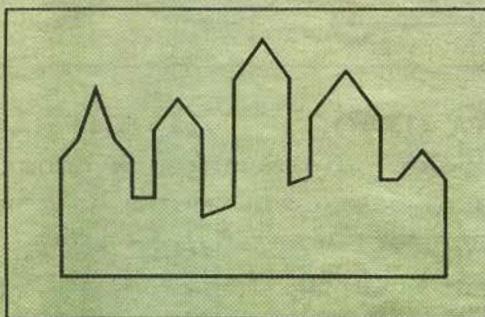
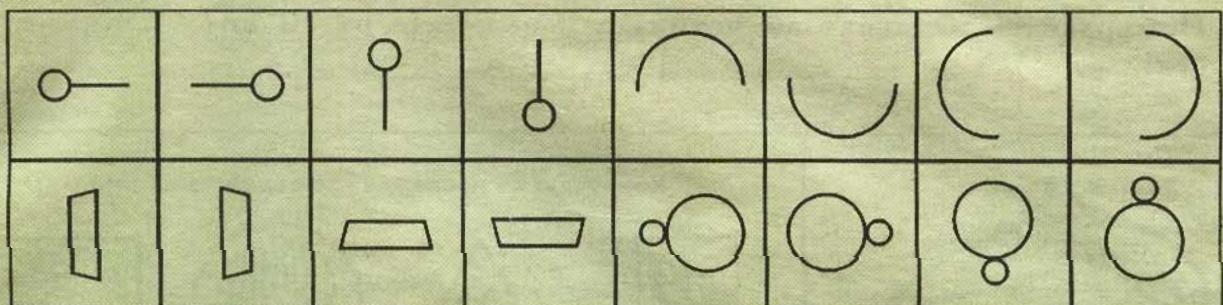


Рис.1

Рис.2



Катерина Марчева, директор на
СОУ с изучаване на чужди езици
„Св. Климент Охридски“, Благоевград

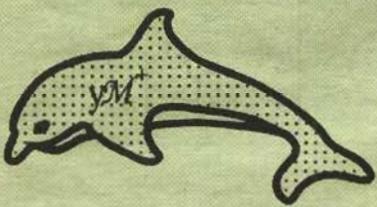
Журнал + конкурс

Драги читатели,

МАТЕМАТИКА ПЛЮС си поставя благородната задача да издирва и поощрява най-талантливите от вас чрез задочното математическо състезание **ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ уМ⁺**. На следващите страници в този брой ще откриете четива за 4-5 и 6-7 клас, а след тях — конкурсните задачи от III кръг. Прочетете внимателно четивата и решете упражненията след тях. Поне една от конкурсните задачи е свързана с четивото за съответния клас, затова горещо ви препоръчваме да положите усилия, за да го разберете и изучите задълбочено. Ако нещо ви затруднява, обърнете се към учителя по математика или пишете до редакцията. Но задачите решавайте самостоятелно! Знаете ли колко голямо е удоволствието, когато успеете да намерите сами отговора? Не се отчайвайте, ако не се справите с всички задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. Допуска се и колективно участие.

Жури под председателството на известния български математик акад. Благоев Сендов ще преглежда вашите решения. За най-добрите от вас и учителите ви подготвяме изненади. Те ще бъдат награда за положения през учебната година труд. Тези, които решат най-много задачи или направят впечатление с оригиналните си идеи (пък дори и една единствена), ще бъдат поканени заедно с учителите си на специално организирания **ФЕСТИВАЛ уМ⁺**, който ще се проведе в гр. Сопот от 3 до 7 юли 1995 г. Там ще ги запознаем с известни математици, ще им осигурим разнообразни математически игри и развлечения. И всичко това безплатно.

Побързайте! Очакват ви четивата и задачите от III кръг. Желаem ви успех!



Конкурсът се провежда със съдействието на



За инициативата на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС – ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ уМ⁺ е създаден специален фонд. Желаещите да спонсорират или да направят дарение могат да използват банковата сметка на фонда:

586 180 0775 005, Банка за земеделски кредит АД, София,
за фонд „ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ“.

m + семинар

ГЕОМЕТРИЯ В КИБРИТЕНА КУТИЙКА

Четиво за 3 клас

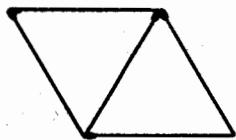
Малки приятели, през следващата 1995/96 учебна година вие ще бъдете в IV клас и ще участвате в Националния конкурс „Издирване на таланти – УМ+“. За да постигнете успех, трябва да помислите за подготовката си отрано. Настоящото четиво е предназначено за вас и вашите учители.

Сигурно вече ви се е случвало да нареждате фигури от кибритени клечки. Често в такива случаи сръчността не е достатъчна. Нужна е и досетливост. А тя се умножава многократно, ако се използва натрупаният опит – свой и чужд. Затова прочетете внимателно следващите редове, като не забравяйте да вземете преди това кутийка кибрит.

Вие вече знаете, че триъгълникът освен три ъгъла има и три страни. Ако тези три страни са с равни дължини, триъгълникът се нарича *равностранен*. От три кибритени клечки може да се нареди естествено един равностранен триъгълник. А колко клечки ще са необходими за нареждане на два равностранни триъгълника? Отговорът се съдържа в следната задача.

Задача 1. С пет кибритени клечки да се наредят два равностранни триъгълника.

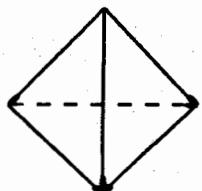
Решение: С три от клечките нареждаме триъгълник. За да наредим нов триъгълник с останалите две клечки, трябва да използваме някоя от вече наредените. Вижте решението вдясно.



Сега вече е ясно, че за нареждане на два равностранни триъгълника са необходими само пет клечки.

Задача 2. С шест кибритени клечки да се наредят четири равностранни триъгълника.

Решение: Не се отчайвайте, ако опитите ви да решите задачата са неуспешни. Ако не се досещате какво да правите с шестата клечка, то сигурно се опитвате да наредите триъгълниците така, че те да лежат на масата. Но такова изискване в условието на задачата няма. Постройте върху масата триъгълник с три от клечките. Останалите три клечки вземете в ръка така, че да се допират в една обща точка с единия си край. Свободните краища допрете във върховете на вече готовия триъгълник. Вече използвахме и шестте клечки. Получените триъгълници са точно четири.



Геометрия, всички фигури на която са в една равнина, се нарича *планиметрия* (*равнинна геометрия*). Геометрия, чийто фигури не са само в една равнина,

се нарича *стереометрия* (*пространствена геометрия*). Следователно задача 2 е стереометрична.

Задача 3. Със седем кибритени клечки наредете три равностранни триъгълника в една равнина.

Задача 4. Колко равностранни триъгълника, могат да се съставят

- от 9 клечки в една равнина;
- от 9 клечки?

Задача 3 и задача 4 оставяме за самостоятелна работа. Успех!

Автор на четицето Веселин Златилов, учител в СМГ

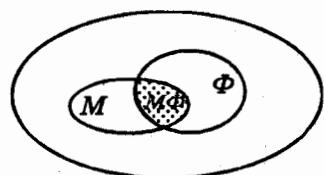
ПРИНЦИП ЗА ВКЛЮЧВАНЕ И ИЗКЛЮЧВАНЕ

Четици за 4 и 5 клас

В един клас има 35 ученика. От тях 20 посещават кръжок по математика, 11 – кръжок по физика и 10 не са в нито един от тези два кръжока.

„Чакайте, чакайте! Какво стана?“ – ще ме прекъсне някой от вас. – „Учениците в класа станаха: 20 математици плюс 11 физици и плюс 10 други – общо $20 + 11 + 10 = 41$, а беше казано, че те са 35.“

Да, но никой не е казал, че всеки ученик може да ходи на най-много един кръжок. Ясно е, че има ученици, които посещават както кръжока по математика, така и този по физика. Въпросът е именно в това: колко са тези ученици?



За отговора може да ни помогне тази схема. Големият овал представлява целият клас от 35 ученика, овалът M – учениците, които посещават математическия кръжок, а Φ – онези, които ходят на физическия. Тяхната обща част (заштрихованата) представлява учениците, които ходят на двета кръжока едновременно. Частта от големия овал, която не е в нито един от малките, представлява 10-те ученика, които не са в нито един от двета кръжока. А сега да смятаме: В двета овала M и Φ има общо $35 - 10 = 25$ ученика. В овала M има 20 ученика. Тогава в онази част от овала Φ , която не е в овала M , остават $25 - 20 = 5$ ученика. Но в овала Φ има общо 11 ученика. Следователно в общата част $M\Phi$ на двета овала има $11 - 5 = 6$ ученика, което е отговорът на поставения въпрос.

За да сте сигурни, че сте разбрали добре всичко, което прочетохте до тук, отговорете сами на следните три въпроса:

- Колко ученици посещават само кръжока по физика?
- Колко ученици посещават само кръжока по математика?
- Колко ученици посещават поне един (който и да е) кръжок?

Начинът на разсъждение, който използвахме тук, се нарича *принцип за включване и изключване*. (Някои ученици се включват в един кръжок, други – в друг, а онези, които са в двета кръжока ... трябва временно да ги изключим от единия, ако искаме да пресметнем точно броя на всички ученици).

Ето една друга задача, която се решава с този принцип:

Задача 1. На една международна конференция присъствали 70 делегати. От тях 32 знаят английски език, 27 – френски и 22 – немски. Едновременно английски и френски знаят 10 делегати; английски и немски – 6 ; френски и немски –

8. Едновременно трите езика знаят трима. Колко делегата не знаят нито един от тези три езика?

Решение: Чертаем един голям овал, който представлява всичките 70 делегати, и в него 3 малки A , Φ , H съответно за делегатите, знаещи английски, френски и немски. В задачата се търси броят на делегатите, които са в големия овал, но не са в нито един от малките.

В общата част на овалите A и Φ има 10 делегати. От тях трима са в общата част на трите малки овала. В общата част на A и H има 6 делегати и понеже трима от тях са в общата част на A , Φ и H , то остават само трима, които са в общата част на A и H , но не са в общата част на трите. По същия начин намираме, че в общата част на Φ и H , но не в общата част на трите A , Φ и H , има $8 - 3 = 5$ делегати.

До този момент в овала A намерихме $7 + 3 + 3 = 13$ делегати. Ето защо само английски език знаят $32 - 13 = 19$ делегати. По същия начин получаваме, че само френски знаят $27 - (7 + 3 + 5) = 27 - 15 = 12$ делегати, а само немски знаят $22 - (3 + 3 + 5) = 22 - 11 = 11$ делегати. Общо в овалите A , H и Φ получихме $19 + 11 + 12 + 7 + 3 + 5 + 3 = 60$ делегати. Следователно извън трите овала има $70 - 60 = 10$ делегати, което е отговорът на задачата.

Ето една задача за самостоятелно упражнение.

Задача 2. На един спортен лагер има 38 ученици. От тях 16 играят баскетбол; 17 – футбол и 18 – волейбол. Едновременно баскетбол и футбол играят 4; баскетбол и волейбол – 3; волейбол и футбол – 5. Трима от учениците не играят нито един от тези спортове.

- Колко ученика играят едновременно баскетбол, футбол и волейбол?
- Колко ученика играят точно един (който и да е) от тези три спорта?

Автор на четивото Кирил Банков

ПОЛУИНВАРИАНТИ

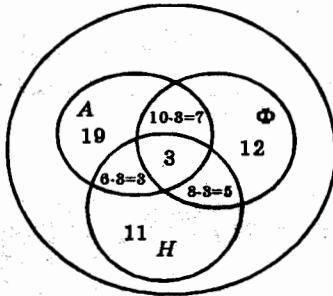
Четиво за 6 и 7 клас

Здравейте, приятели!

В миналия брой бяхме в страната на инвариантите. Надявам се, че я опознахте добре и се справихте със задачите от чакания и обичания от вас конкурс. Днес ще „отскочим“ в една от съседните ѝ „държави“ – тази на полуинвариантите. Да започнем опознаването ѝ със следната задача.

Задача 1. В клетките на правоъгълна таблица $m \times n$ са записани цели числа. Разрешава се да се смени знакът на всички числа, стоящи в произволен ред или стълб на таблицата. Да се докаже, че посредством такива операции може да се достигне до таблица, в която сумата от числата във всеки ред и във всеки стълб е неотрицателна. (Задачата е давана на Всесъюзната математическа олимпиада през 1961 г.)

Задачите от този вид се характеризират със следното: Дадена е или си въвеждаме операция (в задача 1 това е смяната на знака на всички числа, стоящи в произволен ред или стълб на таблицата) и намираме някаква величина, която се изменя монотонно (расте или намалява) при прилагане на операцията. Решението ще се основава на това, че в резултат на действието на операцията величината ще приема само краен брой различни стойности. Следователно и операцията



ще може да се приложи само краен брой пъти и неизбежно ще стигнем до максималната (минималната) стойност на величината. Именно тази ситуация ще бъде търсената от условието на задачата. Ако сега отново приложим операцията, ще получим, че величината е станала по-голяма от максимално (по-малка от минимално) възможната си стойност, което не е възможно. Такава величина се нарича *полуинвариант* на операцията. Всичко казано до тук може да си остане „като в мъгла“, ако не покажем мястото му в решението на задачи. Ето защо незабавно пристъпваме към решението на задача 1.

Стълбовете и редовете на таблицата за удобство ще наричаме линии. Да разгледаме сумата от всички числа в таблицата. При прилагане на операцията тази сума расте, ако сумата от числата в променящата се линия е била отрицателна, намалява, ако е била положителна и не се променя, ако е била 0. Следователно, ако в таблицата има линия с отрицателна сума от числата в нея, то прилагайки операцията, ние можем да увеличим сумата на всички числа в таблицата. Освен това тази сума не може да се увеличава безкрайно. Наистина число, стоящо в дадена клетка на таблицата, съвпада с изходното или е противоположното му, поради което броят на различните таблици, които можем да получим, не превишава 2^{mn} . Ето защо сумата от всички числа в таблицата може да приема само краен брой различни стойности. И така, ние откривме величина (сумата от всички числа в таблицата), която при прилагане на операцията от условието (сменяне на знаците на числата в произволна линия) се променя монотонно и приема само краен брой различни стойности, т.е. откривме полуинвариант.

Да разгледаме сега изходната таблица. Да изберем в нея линия с отрицателна сума от числата в нея (ако такава линия няма, то търсената таблица е намерена). Да приложим операцията към тази линия. В получената таблица отново да намерим линия с отрицателна сума от числата в нея, да приложим операцията и т.н. Тъй като на всяка стъпка сумата от числата в таблицата се увеличава и тази сума може да приема само краен брой различни стойности, то на някоя стъпка ще получим таблица с максимално възможната сума на числата в нея. Но тя се оказва търсената, защото ако в нея все още има линия с отрицателна сума от числата, то прилагайки операцията още веднъж, ние бихме получили таблица с още по-голяма сума от максимално възможната, което не е възможно. Задачата е решена.

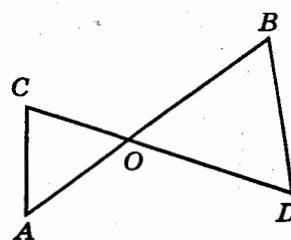
Млади приятели, надявам се, че вече се ориентирате в страната на полуинвариантите (ако не е така, то върнете се на границата ѝ и преминете още веднъж, но по- внимателно, пътя дотук).

Задача 2. В една равнина са дадени $2n$ точки ($n > 1$). Да се докаже, че има n отсечки с краища в тези точки, като никои две отсечки нямат обща точка.

Сигурно сте забелязали, че както в живота, така и в математиката законите на Мърфи са в пълна сила! Кратко и ясно условие – трудна задача. Но, да се стигне в необходимия кът на чудната планета Математика, е същността на решението на всяка задача. Интуиция и знания, придобити с много труд и всеотдайност, са нашият компас.

А сега ... към решението на Задача 2.

Да построим n произволни отсечки с краища дадените $2n$ точки. Ако никои две от тях не се пресичат, то изискваното в задачата е изпълнено. В противен случай да разгледаме пресичащите се отсечки AB и CD (вж. чертежа). Разглеждаме операцията замяна на пресичащите се отсечки AB и CD с непресичащите се отсечки AC и BD . Тъй като сумата от дълбините на диагоналите AB



и CD на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е по-голяма от сумата от дълчините на противоположните му страни AC и BD (докажете го, като използвате неравенството на триъгълника за ΔAOC и ΔBOD), то за полуинвариант може да се вземе сумата от дълчините на всички отсечки. Ясно е, че тя може да приема само краен брой различни стойности (краен е броят на точките, а значи и на съединителните им отсечки) и че намалява при прилагане на операцията.

Ето защо рано или късно, прилагайки операцията, ще стигнем до ситуация с минимално възможна сума от дълчините на всички отсечки. Именно тя е и търсената, тъй като ако все още има пресичащи се отсечки, ще приложим операцията още веднъж и ще получим сума от дълчините на отсечките, по-малка от минимално възможната, което е противоречие. Задачата е решена.

В последната задача в началото нямахме нито операция, нито полуинвариант. След като подбрахме операция, изборът на полуинвариант не представлява трудност.

В задача 1 и задача 2 като полуинвариант разглеждаме една често срещана в задачите от този вид величина – сума съответно от числа и дължини на отсечки. Изборът на величината – полуинвариант и на операцията зависи най-вече от естеството на задачата и за да не сме голословни, да се спрем на следната

Задача 3. Всеки член на един парламент има не повече от трима врагове. Да се докаже, че парламентът може да се раздели на две палати (групи) така, че всеки парламентарист в своята палата да има не повече от един враг. (Задачата е давана на Всесъюзната математическа олимпиада през 1979 г.)

Решение: Да разделим парламента на две палати по произволен начин. Ако всеки парламентарист в своята палата има не повече от един враг, то изискването от условието е изпълнено. В противен случай нека A е парламентарист, който в своята палата има не по-малко от двама врагове. Ясно е, че като преместим A в другата палата, ние ще намалим броя на двойките врагове. Вече открихме величина (броя на двойките врагове в двете палати), която при прилагане на операцията (преместване на парламентарист (с поне двама врагове в своята палата) в другата палата) се изменя монotonno (намалява) и приема само краен брой различни стойности (краен е броят на парламентаристите и всеки има краен брой врагове), т.е. открихме полуинвариант.

Тогава рано или късно, прилагайки операцията, ще стигнем до разпределение на парламентаристите в две палати с минимално възможен брой врагове по двойки. Ако и сега има парламентарист с поне двама врагове в своята палата, то премествайки го в другата, ще получим брой на двойките врагове, по-малък от минималния, което е невъзможно. Задачата е решена.

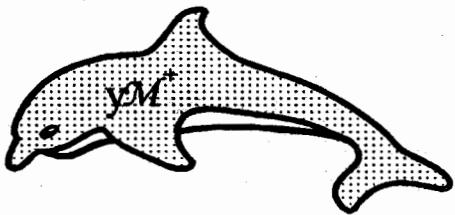
Можем още дълго да бродим заедно из страната на полуинвариантите, но сигурно се уморихте и искате да си починете, пък и време е (след почивка) да продължите „пътя“ сами. За мен ще останат радостта, че бяхме заедно и удовлетворението, ако съм ви бил добър водач. Макар, че логиката на решението на задачите от този вид се усвоява бързо и лесно, откриването на двойката „полуинвариант – операция“ е своеобразен изпит за търпение и интуиция. Проверете ги в задачите от конкурса уМ+.

До нови срещи! Искрено Ваш.

Автор на четивото Иван Симеонов

УМ + конкурс

ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ



ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ е задочно математическо състезание. За победителите подгответе страхотни изненади. Те, заедно със своите учители, ще бъдат поканени на специално организирания **ФЕСТИВАЛ УМ+**, който ще се проведе в гр. Сопот от 3 до 7 юли 1995 г. Състезанието се провежда в 3 кръга. В този брой ви представяме задачите от III кръг. Поне една от задачите е свързана с четивата за съответните класове от предните страници. Прочетете ги внимателно, решете задачите и едва тогава се захватете със задачите от състезанието. Не се отчайвайте, ако не се справите и с трите задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. В писмата отбелявайте трите си имена, класа, училището, името на учителя ви по математика. Допуска се и колективно участие (ако например задачите се разглеждат в школата по математика). В този случай изпращайте само едно писмо с името на избран от вас капитан на отбора. Пишете на адрес

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
Институт по математика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София

III КРЪГ

Задачи за 4 клас

7. Всичките 60 ученика от IV клас в едно училище били поканени на празненство по случай края на учебната година. Учителките поръчали 10 мънички торти и имали намерение да разделят всяка торта на 6 парчета така, че общо да получат 60 парчета – точно колкото са учениците. По време на превоза една от тортите паднала на земята. Учителките забелязали, че могат да разделят всяка торта или на 6, или на 7, или на 8 парчета. (Ако я делят на повече части, парчетата ще бъдат много малки). Колко от останалите 9 торти са разделили на 6 парчета, колко на 7 и колко на 8, така че да получат точно 60 парчета? Намерете всички възможности.

8. В означеното действие събиране на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви – различни цифри. Възстановете действието.

$$\begin{array}{r} \text{А Т А К А} \\ + \quad \text{У Д А Р} \\ \hline \text{Н О К А У Т} \end{array}$$

9. В четвъртите класове на едно училище има общо 40 ученика. От тях „отличен“ имат: по български език 19 ученика, по математика – 17 и по пееене – 22. Оценка „отличен“ само по български език имат 4, само по математика – 4 и само по пееене – 11. „Отличен“ по математика и по пееене имат 7 ученика, а от тях 5 имат „отличен“ и по български език.

- а) Колко ученика нямат оценка „отличен“ по никой от тези предмети?
 б) Колко ученика имат „отличен“ по точно два от тези предмети?

Задачи за 5 клас

7. Един правоъгълник с обиколка 1 м е разрязан на три квадрата. Колко квадратни сантиметра е лицето на правоъгълника?

8. Да се намери броят на всички цели положителни числа, които са не по-големи от 100 и които не се делят нито на 2, нито на 3, нито на 5.

9. Присъстващите на едно тържество момичета и момчета били или със светли коси, или с тъмни коси. Момчетата били 16. Всички светлокоси момичета и момчета били 24, а тъмнокосите момичета били точно колкото светлокосите момчета. Колко деца са присъствали на тържеството?

Задачи за 6 клас

7. Да се намерят всички цели положителни числа n , за които:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{101}{200}.$$

8. Да се намери броят на всички цели положителни числа, които са не по-големи от 1000 и които не се делят нито на 3, нито на 5, нито на 7.

9. По една окръжност са написани n цели положителни числа. Между всеки две съседни числа се написва най-големият им общ делител. „Старите“ числа се изтриват, а с новите числа се извършва същата операция. Да се докаже, че (независимо от първоначално написаните числа) ще достигнем до положение, в което всички числа, написани по окръжността, са равни.

Задачи за 7 клас

7. В уравнението $|x - ab| + \left|x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right| = x - \frac{a^2 + b^2}{2}$ числата a и b са параметри, а x е неизвестно. При какви условия за a и b това уравнение има решение? Решете го.

8. Нека AA_1 и BB_1 са височините в триъгълника ABC ($A_1 \in BC, B_1 \in AC$). Известно е, че $AA_1 \geq BC$ и $BB_1 \geq AC$. Да се докаже, че триъгълникът ABC е равнобедрен и правоъгълен.

9. В една равнина са дадени n точки, никои три от които не лежат на една права; както и n прави, никои две от които не са успоредни и никои три не минават през една точка ($n \geq 2$). Никоя от дадените точки не лежи на никоя от дадените прави. От всяка точка спускаме точно един перпендикуляр към някоя права, така че към всяка права има спуснат точно един перпендикуляр. Да се докаже, че това може да се направи по такъв начин, че никои два перпендикуляра да не се пресичат.

Задачите се предложени от К. Банков и Ив. Симеонов.

Краен срок за изпращане на решенията от III кръг – 10 юни 1995 г.

Не забравяйте да изпратите решения и на Десетата задача, публикувана в бр. 1 за 1995 г. Победителите в състезанието и техните учители ще получат покана за участие във Фестивала уМ+ да края на месец юни 1995 г. Фестивалът ще се състои в гр. Сопот от 3 до 7 юли 1995 г.



M+ томбола

Наградите за бр. 4, 1994 г.

MONTANA TRADING COMPANY

официален дистрибутор на Winsome Computing Systems

копие на Kew2Win Версия 2.0 печели

Преслав Радков, София

Електронен калкулатор

1. Петранка Николова, Плевен
2. Димитър Аврамов, София

Електронен часовник

1. Александър Великов, Русе
2. Калин Цанов, Мездра

Наградите са осигурени от Фирма 3 KA, ул. „Денкоглу“ 23, София

Книги с математическа тематика

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1. Гергана Николова, Пловдив | 6. Мария Топузова, София |
| 2. Кристина Димитрова, София | 7. Павлина Йонова, Ловеч |
| 3. Елица Страхилова, с. Горни Лом | 8. Варвара Еленкина, Пазарджик |
| 4. Владимир Николов, София | 9. Васил Шейтанов, София |
| 5. Диан Кабаков, Стралджа | 10. Стефан Миревски, Ловеч |

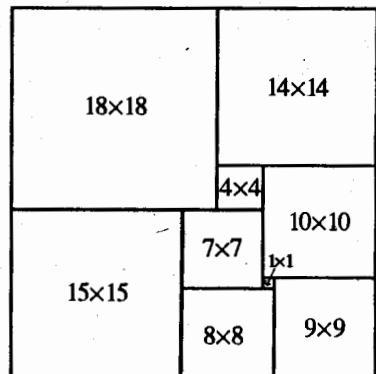
Наградите бяха изтеглени на 26.03.1995 г. в гр. Казанлък по време на Пролетния математически турнир. Ето и верните отговори на задачите: 1 зад. – 17; 2 зад. – 10.

Конкурс ЛЕГО

До изтичане на крайния срок в редакцията бяха получени 297 верни отговора на задачата от бр. 4, 1994 г. на МАТЕМАТИКА ПЛЮС. Един от възможните отговори е даден на чертежа.

Ето имената на петимата, които след теглене на жребий, получават сувенирните награди ЛЕГО: Мартин Стоянов, Перник; Красимира Пекова, Русе; Ивайло Братоев, Ст. Загора; Явор Ганев, Разград; Боряна Гюрчева, Русе.

Голямата награда – конструктор 8818 беше изтеглена с жребий измежду изпратилите верни решения на задачите от четирите броя за 1994 г. Тя се печели от Иван Теофилов, Варна.



Книгите ще бъдат изпратени по пощата, а останалите награди могат да се получат от редакцията след уговорка на тел. (02)-713-28-26 или (02)-45-13-13.



М+УСМИВКА



ЛЕСНО ЛИ Е ДА СЕ КАЖЕ WHO IS WHO?

Биолозите се мислят за биохимици. Биохимиците се мислят за химици. Химиците се мислят за физико-химици. Физико-химиците се мислят за физици. Физиците се мислят за божове, а Бог се мисли за математик ...
Интересно за какъв ли се мисли д-р М. Плюс?

ТЕЛЕФОННА ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

Свържете с кабел всяка цифра с отговарящото ѝ изказване по-долу.



Ако попитате



- | | |
|---|------------------|
| 0 | – алгебрист |
| 1 | – аналист |
| 2 | – тополог |
| 3 | – стохастик |
| 4 | – апроксиматор |
| 5 | – информатик |
| 6 | – физик-теоретик |
| 7 | – астрофизик |
| 8 | – икономист |
| 9 | – социолог |



за телефонния му номер,
той ще ви каже:



- че е аналитично продължение на номера на пожарната.
- че е от порядъка на 10^6 .
- програма, която прави пълно изчерпване на всеки телефонен номер, докато вие набирате неговия.
- че е положителен корен на алгебрично уравнение от 6-та степен.
- какво е математическото очакване да попаднете на неговия номер, ако наберете произволно 6-цифрен число.
- резултатите от телефонно допитване по този въпрос.
- че няма телефон, а използва фасонката на нощната лампа като негов топологичен еквивалент.
- че е тривиално следствие от уравненията на Максуел.
- неговото най-добро хаусдорфово приближение.
- че иска да знае какъв икономически ефект ще извлечете от това.

П. П. Впрочем проф. Я. Тагамлишки обичаше да казва, че не знае кой е телефонният му номер, защото никога не се е обаждал сам на себе си.

Жен И Сен

INTERNATIONAL UNIVERSITY



Вече и в София!

Вашият шанс в един конкурентен свят

Студенти подгответи да спечелят всеки конкурс в банка,
частна фирма и чуждестранно представителство

За Бакалаври: *Обучение на английски език по програмата на
Университета в Портсмут, Великобритания
по специалностите:*

Компютърни науки
Бизнес информационни системи
Бизнес администрация
Управление на хотелите и туризма

International University
1000 София, пл. Славейков 4, офис 406, 426
тел.: (02) 864 220, 864 346, факс: (02) 877766