МАТЕМАТИКА ПЛЮС

п о м а г а л о п о м а т е м а т и к а и п р и л о ж е н и я

одобрено от Министерството на образованието и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 24 (94), Number 2, 2016

International Advisory Board: *A. Golovanov (Russia), N. Khadzhiivanov (Bulgaria), V. Berinde (Romania), R. Toshich (Serbia), Sh. Ismailov (Uzbekistan), T. Sergeeva (Russia), A. Gagatsis (Cyprus), M. Shabanova (Russia)*

Редакционна колегия: *Сава Гроздев* – **гл. редактор**

Ирина Шаркова, Румяна Караджова, Линка Минчева, Георги Ганчев, Никола Чолаков, Иван Симеонов, Радостин Вазов, Радослав Габровски, Росен Николаев, Веселин Ненков, Ирена Мишева, Йордан Петков, Христо Лесов, Цеца Байчева, Асен Велчев, Хари Алексиев

© МАТЕМАТИКА ПЛЮС ®

Помагалото се издава от
ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Адрес на редакцията:
ВУЗФ, стая 409
ул. „Гусла" № 1, 1618 София
тел. 02-40-15-830; e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

All rights on the title, logos and published materials are reserved.

Формат 600×840/8 Печатни коли 9
Дадена за печат на 19. 06. 2016 Подписана за печат на 29. 06. 2016 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой на списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието и науката.

Т А Л О Н

ВУЗФ – Университет по финанси, бизнес и предприемачество

Виж www.vuzf.bg

Притежателят на този талон има правото на преференциални условия при кандидатстване и 20% отстъпка от семестриалната такса

Имена **……**

Адрес **……**, e-mail**……**

С този талон участва и моята сестра (брат)

Имена **……**

10 юни 2016 г.

Тържество в Министерството на образованието и науката по случай 20-годишния юбилей на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру“ в

Математика плюс
бр. 2, 2016

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и приложенията направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически и професионални гимназии; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

М+УВОДНА **2**

СПОМЕН ЗА ПЛАМЕН ИЛИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ТВОРЧЕСТВО – **Емил Карлов** **4**

ЗАДАЧИ **М+** **9**

ДЕСЕТИ ЮБИЛЕЕН МЕЖДУНАРОДЕН КОНКУРС "**MITE**" – **Д-р М. Плюс** **11**

СТУДЕНТСКА НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ "ПРОБЛЕМИ И ПРЕДИЗВИКАТЕЛСТВА НА СЪВРЕМЕННАТА ИКОНОМИКА – **Д-р М. Плюс** **14**

НАЦИОНАЛНА СТУДЕНТСКА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА – **Д-р М. Плюс**

М+ПРИТУРКА – **Кандидатстуденски изпити през 2015 г.** **19**

ДУОПОЛ И ОЛИГОПОЛ НА БЕРТРАН – **Петко Казанджиев, Цеца Байчева, Кинка Кирилова-Лупанова** **55**

КОЛЕДЕН ЛИНГВИСТИЧЕН ТУРНИР – **Иван Держански, Веселин Златилов** **66**

Драги читатели,

Изминаха 20 години от първото издание на български език на Международното математическо състезание „Европейско кенгуру“. Да припомним, че България беше приета за член на Европейската асоциация „Кенгуру без граници“ през 1997 г. по време на Генералната асамблея на асоциацията в Будапеща. Членството е персонализирано за всяка държава със съответен представител, който има статут на активен член на асоциацията и името му се регистрира във френския съд. Българският представител е проф. Сава Гроздев. По време на асамблеята в Будапеща се взима и едно важно решение, съгласно което всяка държава-членка получава правото да превежда задачите на родния си език. Дотогава състезанието е само на френски език. А идеята за самото състезание е от 80-те години на XX век, когато Питър О'Халоран, преподавател по математика в Сидни, Австралия, предлага състезание, което да се организира по едно и също време във всички австралийски училища. Предложението е необичайно, защото тогавашният използван по цял свят формат е участниците да се събират на едно място. Идеята на Питър О'Халоран се оказва ползотворна, тъй като дава възможност на повече ученици да се състезават едновременно върху едни и същи задачи. В резултат на успешната реализация се ражда добре известното днес Австралийско математическо състезание, което малко по-късно се превръща в международно. Появяват се и последователи на Питър О'Халоран. Двамата френски математици Андре Деледик и Жан-Пиер Будин решават да разпространят идеята и във Франция. Така, през 1991 г. възниква Математическото състезание „Кенгуру“, в което се включват 120 хил. френски ученици. Постепенно бройката на участниците се увеличава: 300 хил. през 1992 г., 500 хил. през 1993 г. Седем държави решават да приложат същата схема. Това са Беларус, Унгария, Холандия, Полша, Румъния, Русия и Испания, които заедно с Франция започват съвместно провеждане на състезанието „Кенгуру“ от м. май 1994 г. В България по инициатива на Френския институт към френското посолство в София покана за участие получават българските ученици от гимназиите с изучаване на френски език. Българското участие започва от 1995 г., но първоначално то е символично. Основният проблем е, че поради неразбиране на езика не могат да включат силни ученици от математическите гимназии, в които преобладаващо се изучава английски. С активната намеса на българския представител в Асоциацията „Кенгуру без граници“ и тогавашния експерт по френски в Министерството на образованието – г-жа Бойка Паликарска, се издава циклостилен френско-български речник с основни математически термини. Речникът се разпространява в няколко математически гимназии. Това увеличава броя на участниците в следващите издания на състезанието. Да припомним още, че през онези години заедно със задачите от Франция пристигаха и специални бланки за попълване на отговорите. Обработването на бланките ставаше в Париж, където се извършваше общо класиране за цяла Европа. Най-добрите получаваха като награда 15-дневна екскурзия във Франция. В едно от изданията сред наградените беше и българинът Младен Димитров, десетокласник от Софийската математическа гимназия. Неговият резултат беше най-висок не само в България, не само в неговата възрастова група, а изобщо за цяла Европа. Покрай състезанието Младен започва систематично изучаване на френски език. В момента той е редовен професор по математика във Франция. Преди това Младен завърши престижния колеж Луи льо Гранд и Екол Нормал Супериор.

През 1997 г. държавите-участнички са 21 и България е една от тях. Тогава за първи път състезанието „Кенгуру“ се провежда на български език и получава у нас ново име – Международно състезание „Европейско кенгуру“. Така 2016-а година се превръща в юбилейна. България остава единствената страна в света, в която състезанието освен на роден език се провежда и на френски. Днес участниците са повече от 6 млн., като броят на представените държави достигна 65. Включиха се страни от Азия, Америка и Африка. Възникнало като европейска инициатива, състезанието „Кенгуру“ разшири значително

географията си и вече претендира за рекорд на Гинес като най-многобройното световно състезание в областта на математиката. То остава уникално с това, че се провежда върху едни и същи задачи, приблизително по едно и също време. Участниците в генералните асамблеи изработват състезателните теми. Впоследствие задачите се превеждат на съответните езици и всяка държава се грижи за организацията на своя територия. В България броят на участниците прогресивно расте, за да надмине 22 хил. през настоящата 2016 г.

Юбилейната торта

На 10 юни по повод 20-годишния юбилей в Министертвото на образованието и науката се състоя тържество. Заместник-министърът Диян Стаматов и посланикът на Република Франция Н. Пр. Ксавие Лапер дьо Кабан връчиха наградите на победителите от Националния кръг на „Европейско кенгуру“. Официалната церемония беше открита от проф. Сава Гроздев, представител на България в Асоциация „Кенгуру без граници“. Той представи официалните гости и им връчи юбилейни медали. Посланик Кабан поздрави учениците, техните учители и родители, като им пожела все така да се борят за победата, а на тези, които не са успели тази година, да бъдат достатъчно работливи, за да имат успех догодина. Той заяви, че участието на толкова млади българи в конкурса е добър знак за динамизма на обществото в нашата страна. От името на министерството призьорите бяха приветствани от г-н Диян Стаматов. Той отбеляза, че „Европейско кенгуру“ е едно от трудните състезания, но това, че в него участват толкова много ученици, е показател за интереса към него. Във всяка една задача от това състезание има трудност, но преодоляването й подготвя учениците за справяне с бъдещи житейски предизвикателства. Приветствие поднесе и заместник-министър проф. Иван Димов. На церемонията присъстваха служители от министерството, представители на Посолството на Република Франция, много учители и родители.

„Европейско Кенгуру“ е най-масовото международно математическо състезание, подчерта проф. Гроздев. Всяка държава има право да променя до 5 задачи от общо избраните по време на асамблеите теми, съобразявайки се с конкретното учебно съдържание. Тази година Националният кръг на „Европейско кенгуру“ се проведе на 4 юни в София, като до него бяха допуснати 409 млади математици от участвалите над 22 000 за страната. В него се включиха ученици от I до XII клас, ученици със специални образователни потребности (СОП), както и ученици, които решаваха задачите на френски език. Първо място завоюваха 17 участници, второ място – 9, а трето място – 10. Всички те получиха грамота и юбилеен медал. Наградени бяха и 7 ученици със СОП, както и 11 участници на френски език. За първенците е предвидена още една награда – безплатно участие в Международния летен лагер „Европейско кенгуру“ в Чепеларе от 1 до 7 август 2016 г., а учениците от VIII до XII клас, класирани на призовите места, имат право да кандидатстват за стипендия по Наредбата за даровити деца.

Ваш, Д-р М. Плюс

СПОМЕН ЗА ПЛАМЕН ИЛИ ЗА МАТЕМАТИЧЕСКОТО ТВОРЧЕСТВО

Емил Карлов, гр. Ямбол

На 5 март 2016 г. след кратко боледуване почина преподавателят в Софийски университет „Св. Климент Охридски“ – доцент д-р Пламен Сидеров. В тази малка сбирка от негови задачи предлагам да си спомним за блестящия математик и незабравим приятел.

„В ранната есен на 1967 година“ – разказваше Роман Хайнацки – „влязох в книжарницата в центъра на града и там пред етажерката със сборниците ровеше в книгите едно красиво момче с очила. Момчето беше облечено скромно, в късо палто, на палтото – големи, привличащи погледа, копчета. Попитах го в кой клас е и в кое училище се е записал за следващата учебна година. Момчето се изчерви и посочи сградата на гимназия „Васил Левски“, която стърчеше до прозореца на книжарницата. Веднага го изпратих да си изтегли документите и го записах в нашата гимназия, в моя клас. Така Пламен Сидеров стана мой ученик. Три години по-късно същото момче спечели трета награда на Международната олимпиада по математика в Унгария.“

Пламен е направил много задачи за много математически състезания и кандидат-студентски конкурси, но аз ще се спра само на задачи от конкурса „Роман Хайнацки“, защото ги обсъждахме заедно, понякога с дни и това бяха най-хубавите дни от годината. Общото в следващите няколко задачи е изключителната им математическа хубост. Твърденията са приказно невероятни и красиви. Пламен имаше вкус и с лекота се справяше с доказателствата. Аз му се радвах, а той престорено сърдито казваше: „Търся човек, който да ме критикува, не тебе.“

Първата задача, за която ще стане дума, се е появила през 1949 г. на Московската олимпиада, а по-късно през 1973 г. – на американския конкурс „Пътнам“ във вида:

Нека $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}\}$ *е множество от такива цели числа, че ако премахнем едно от числата, останалите можем да разделим на две множества от* n *елемента с равни суми. Да се докаже, че*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n+1}.$$

Пламен не обичаше несъществените обобщения и реши задачата за *реални* числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ (което не е лесно решение). За първото състезание „Роман Хайнацки“ през 2007 г. той предложи следната:

Задача 1. Дадени са 11 цели числа, които притежават следното свойство: което и от тях да премахнем, останалите 10 числа могат да се разделят на две групи по 5 числа с равни суми. Да се докаже, че всичките 11 числа са равни помежду си.

Решение: Нека дадените числа са $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Като извадим a_1 от всички тях, получаваме числата $b_1 = a_1 - a_1 = 0$, $b_2 = a_2 - a_1, \ldots, b_{11} = a_{11} - a_1$. Лесно се съобразява, че получените числа също изпълняват условието на задачата. Сега, ако $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{11}$, от условието следва, че числата $S - b_1$, $S - b_2, \ldots, S - b_{11}$ са четни. Тогава всички числа $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ са с еднаква четност (четността на S). Но $b_1 = 0$ е четно число и значи всички тези числа са четни. Като ги разделим на 2, получените числа отново изпълняват условието на задачата и отново първото от тях е равно на 0. Следователно и тези числа са четни. Отново ги делим на 2 и т.н. Този процес може да бъде безкраен само ако $b_1 = b_2 = \cdots = b_{11} = 0$. Тогава $a_1 = a_2 = \cdots = a_{11}$, което и трябваше да се докаже.

Втората задача, която предлагам да спомена, е предлагана някога през годините (не зная точно кога и къде) на международна олимпиада по математика. Обърнете внимание на елегантното решение на тази задача.

Задача 2. Всяко от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е равно на 1 или на -1, като при това $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Да се докаже, че n се дели на 4.

Решение: Сумата $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ има n на брой събираеми и всяко едно от тях е равно на 1 или на -1. Тъй като тази сума е равна на 0, то броят на единиците е равен на броя на минус единиците, така че $n = 2k$ е (засега) четно число. Очевидно $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = a_1^2a_2^2\ldots a_{n-1}^2a_n^2 = +1$. От друга страна, тъй като k на брой от тези множители са равни на -1 (а останалите са равни на 1), то $(a_1a_2)(a_2a_3)\ldots(a_{n-1}a_n)(a_na_1) = (-1)^k$. Така получаваме $(-1)^k = +1$ и следователно $k = 2l$ е четно число. Следователно $n = 2k = 4l$ се дели на 4.

За шести клас в състезанието „Роман Хайнацки“ същата задача имаше вида:

Задача 3. Всяко едно от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ е равно на 1 или на -1. Възможно ли е да се изпълнява равенството $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 = 0$?

През 1971 г. на Общоруската олимпиада проф. Алексей Ширшов предлага прочулата се по-късно задача ***за трите гърнета.***

Имаме три гърнета и във всяко гърне – цяло число литри мляко. Всяко от гърнетата може да побере всичкото мляко, разлято по трите гърнетата. Имаме право от гърне А с не повече литри мляко от друго гърне В да прелеем от В в А точно толкова литри, колкото има в гърнето А. Да се докаже, че след няколко подходящи преливания можем да изпразним едно от гърнетата.

През 1993 г. същата задача се появява в американския конкурс „Пътнам“ като задача B-6 т.е. задача с висока трудност.

Дадени три положителни цели числа. Можем да изберем две от тях x и y, и ако се окаже, че $x \leq y$, да ги заменим съответно с 2x и y – x. Да се докаже, че след няколко (краен брой) подходящи замени можем да получим нула.

През 1989 г. Пламен Сидеров предложи за „Зимните математически състезания“ в град Варна следното твърдение, което е обратната задача на задачата за трите гърнета.

В една държава са пуснати в обръщение N монети. Позволена е следната операция: ако А и В са произволни жители и А притежава не повече монети от В, то А може да вземе от В толкова монети, колкото е притежавал до момента. Известно е, че както и да са

разпределени първоначално монетите между жителите на държавата, всички монети могат да преминат в един човек след краен брой пъти подходящи прилагания на операцията. Да се докаже, че N е степен на числото 2. [1]

Така се стигна до задача 6 в конкурса „Роман Хайнацки“ през 2011 г.:

Задача 4. В няколко кутии са поставени по произволен начин 16 топки. Позволена е следната операция: вземаме две кутии и от тази, в която има повече топки, пресипваме в другата още толкова топки, колкото е имало в нея. Ако в двете кутии е имало равен брой топки, просто пресипваме всички топки от едната кутия в другата. Да се докаже, че след краен брой такива операции можем да пресипем всички топки в една кутия.

Решение: Първо да вземем тези кутии, които съдържат *нечетен* брой топки (да наречем тези кутии *нечетни*). Броят на нечетните кутии със сигурност е четно число. В противен случай сумарният брой на всички топки ще се окаже нечетно число, а ние знаем, че общият им брой е 16. Разделяме нечетните кутии по двойки и с всяка двойка извършваме позволената операция. Сега вече всяка кутия съдържа четен брой топки. Да приемем, че всяка от топките е направена от пластилин и от всеки две топки в една кутия правим една по-голяма топка. Така получаваме следната по-лесна задача:

В няколко кутии са поставени по произволен начин 8 топки. Позволена е следната операция: вземаме две кутии и от тази, в която има повече топки, пресипваме в другата още толкова топки, колкото е имало в нея. Ако в двете кутии е имало равен брой топки, просто пресипваме всички топки от едната кутия в другата. Да се докаже, че след краен брой такива операции можем да пресипем всички топки в една кутия.

Да вземем само нечетните кутии. Броят на нечетните кутии е четен, защото сумата на всички топки е четното число 8. Разделяме нечетните кутии по двойки и с всяка двойка извършваме позволената операция. Сега вече всяка кутия съдържа четен брой топки. Да приемем, че всяка от топките е направена от пластилин и от всеки две топки в една кутия правим една по-голяма топка. Общият брой на топките е 4. Но тогава за непразните кутии са възможни следните четири случая:

Първи случай: 1, 1, 1, 1; *Втори случай*: 1, 1, 2; *Трети случай*: 4, 4; *Четвърти случай*: 8.

За всеки от тези случаи вече е очевидно как ще пресипем всички топки в една кутия.

Тук е мястото да отбележим, че през 1982 г. Пламен Сидеров се запознава с проф. Алексей Ершов, който по покана на сектор „Алгебра“ на Института по математика и информатика към БАН гостува в София.

В книгата на проф. Иван Проданов „Принцип на Дирихле“ има една изключително красива задача, за която се говори, че е от проф. Сендов и тя е:

В равнината са дадени 5 точки с координати цели числа. Да се докаже, че между триъгълниците с върхове тези пет точки има поне един триъгълник с лице цяло число.

Тази задача беше предложена от Пламен през 2013 г. на състезанието „Роман Хайнацки“ във вида:

Задача 5. В равнината е дадена правоъгълна координатна система и пет точки *A, B, C, D* и *E* в първи квадрант, чиито координати са цели числа. Да означим с ***M*** множеството от всички триъгълници, чиито върхове са някои три от точките *A, B, C, D* и *E*. Да се докаже, че:

а) лицето на всеки триъгълник от множеството ***M*** е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число;

б) лицето на поне един триъгълник от множеството ***M*** е цяло число;

в) лицата на поне три триъгълника от множеството ***M*** са цели числа.

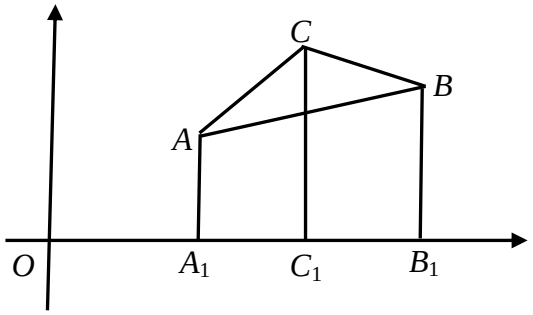
Решение: Ако $X(x_1;x_2)$ е произволна точка с координати x_1 и x_2, с X_1 ще означим петата на перпендикуляра, спуснат от X към абсцисата, т.е. това е точката $X_1(x_1;0)$. Ако $X(x_1;x_2)$ и $Y(y_1;y_2)$ са точки от първи квадрант с целочислени координати, то четириъгълникът XX_1Y_1Y е правоъгълен трапец с основи XX_1 и YY_1 и височина X_1Y_1. Лицето на този трапец е равно на

$$S = \frac{XX_1 + YY_1}{2} \cdot X_1Y_1 = \frac{x_2 + y_2}{2}(y_1 - x_1).$$

Ясно е, че лицето S е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число.

Ще отбележим, че ако абсцисите x_1 и y_1 на точките X и Y са с еднаква четност, то S е цяло число. Също така, ако ординатите x_2 и y_2 са с еднаква четност, лицето S е цяло число. Така числото S не е цяло единствено в случая, когато и абсцисите, и ординатите на X и Y са с различна четност. В този случай S е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е нечетно число.

а) Да разгледаме произволни три точки A, B и C от първи квадрант.



(*) $S_{ABC} = S_{A_1C_1CA} + S_{C_1B_1BC} - S_{A_1B_1BA}$

(Ако точките A, B и C са разположени по друг начин, разсъжденията са аналогични)

Очевидно S_{ABC} е число от вида $\frac{n}{2}$, където n е цяло число.

б) Тъй като точките A, B, C, D и E са пет на брой, поне три от тях, например A, B и C, имат абсциси с еднаква четност и тогава лицето S_{ABC} е цяло число.

в) Нека абсцисите на точките A, B и C са с еднаква четност. Тъй като тези точки са три на брой, ясно е, че ординатите на поне две от тях, например A и B, са с еднаква четност.

Да разгледаме лицата на триъгълниците ABC, ABD и ABE.

За удобство знакът (н;ч) ще означава – нечетна абсциса и четна координата.

Нека координатите на точките A и B са от вида (н;ч) за точката С имаме четири случая: (н;н); (н;ч); (ч;ч) и (ч;н).

Трябва до проверим в тези четири случая в равенството (*) какви числа са участващите в лицата на трапеците. Числото $S_{A_1B_1BA}$ е винаги цяло, а другите две числа $S_{A_1C_1CA}$ и $S_{C_1B_1BC}$ не са и двете цели, но сумата им е цяло число. Аналогично се разсъждава в останалите два случая за триъгълниците ABD и ABE.

Задача 6. Намерете целите координати на пет точки в равнината така, че точно три от триъгълниците с върхове в три от дадените пет точки да са с лице цяло число.

Да си припомним една от теоремите на Дирихле:

Нека x е произволно реално число, а n е произволно естествено число. Да се докаже, че съществуват цели числа p и q, такива че $1 \le q \le n$ и $\left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{1}{nq}$. [2]

От теоремата на Дирихле се появиха задачите за състезанието „Роман Хайнацки“ през 2015 г.

Задача 7. Ще казваме, че числото x върху числовата ос (с единична отсечка от 1 см) е *почти цяло,* ако разстоянието от x до най-близкото цяло число е не повече от 1 милиметър. Да се докаже, че както и да изберем 11 числа върху числовата ос, разстоянието между някои две от ще бъде почти цяло число.

Решение: Ако x е произволно число, да означим с $[x]$ най-голямото цяло число, ненадминаващо x. Нека $[x] = x - \{x\}$. Числото $[x]$ се нарича цяла част на x, а числото $\{x\}$ – дробна част на x. Дробната част на x е число от интервала $[0;1]$.

Нека $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ са числата от условието на задачата. Разделяме интервала [0,1] на 10 интервала с дължина от 1 мм и след това нанасяме дробните части на дадените числа $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, …, $\{x_{11}\}$. Тъй като те са 11 на брой числа, поне две от тях, например x_1 и x_2, ще попаднат в едно и също малко интервалче. Това означава, че дробните части на x_1 и x_2 се различават с не повече от 1 милиметър т.е. разстоянието между x_1 и x_2 е почти цяло число. С това задачата е решена.

Задача 8. Окръжност с диаметър 1 сантиметър е нарязана по произволен начин на няколко дъги и всяка дъга е оцветена в един от трите цвята: син, жълт и зелен. После тези дъги са „изправени“ така, че да се превърнат в отсечки и получените отсечки са разхвърляни без припокриване върху числовата ос (с единична отсечка 1 сантиметър). Да се докаже, че можем да намерим две (различни) едноцветни точки, разстоянието между които е цяло число сантиметри.

Решение: Сумата от дължините на всички оцветени отсечки е равна на π сантиметра, т.е. повече от 3 см. Разделяме цялата абсциса на интервали от по 1 см от вида $[n, n + 1)$ и транслираме (преместваме) всички интервали в интервала [0; 1). Така всяка точка от абсцисата се премества с цяло число сантиметри. Нека сините отсечки да покриват общо отсечка с дължина, повече от 1 см (ако допуснем, че и трите цвята покриват по-къс от 1 см интервал, общата им дължина не би могла да надхвърли 3 см). След преместването ще има точка от интервала [0; 1), която ще се покрива от две сини „парченца“ от два различни интервала Δ_1 и Δ_2. Нека сините точка X от Δ_1 и точка Y от Δ_2 се препокриват в интервала [0; 1). Тогава разстоянието между X и Y е цяло число. С това задачата е решена.

От Донка (съпругата на Пламен Сидеров) разбрах, че Пламен е приготвил задачите за следващия конкурс „Роман Хайнацки“, който ще се проведе през януари 2017 година. Това може да го направи само Пламен и никой друг.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Гроздев, С., Хр. Лесов. Зимни математически състезания (енциклопедия), София: ВУЗФ, 2012, задача № 90.

[2]. Сидеров, Пл. Теория на числата, София, 2015, задача № 1.25.

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика, която се води от доц. д-р Веселин Ненков, се публикуват задачи за ученици от горните класове, за студенти и учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. Оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие.
Рубриката разчита на активното Ви участие както с решения, така и с предложения на задачи. Изпращайте ги на адрес:

1618 София,
ул. "Гусла" № 1
ВУЗФ
Радмила Златкова

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. Ще отбелязваме имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес. Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани.

М+547. Да се определи съществуват ли n последователни цели числа, сборът от квадратите на които е квадрат на цяло число, ако $n = 4^k(6m+1)$ за някои неотрицателни цели числа k и m. **(Христо Лесов, гр. Казанлък)**

М+548. Положителните числа a_1, a_2, …, a_n са такива, че е изпълнено неравенството

$$\frac{a_1}{S-a_1+1}+\frac{a_2}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{a_n}{S-a_n+1}\le 1,$$

където $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Да се докаже, че е изпълнено неравенството $\frac{1}{S-a_1+1}+\frac{1}{S-a_2+1}+\cdots+\frac{1}{S-a_n+1}\ge 1.$

(Draghia Denisa Iulia, Крайова, Румъния)

М+549. Да се докажат неравенствата:

а) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\ge 1$;

б) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\ge 1$; в) $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\cos x}\ge 1$;

г) $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}\ge 1$.

(Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния)

М+550. Даден е ΔABC, за който $\sphericalangle BAC = 60°$. Върху страната AC съществува такава точка K, че вписаните в ΔABK и ΔBCK окръжности се допират в точка L, за която $BL = 6.KL$. Да се докаже, че вписаната в ΔABC окръжност минава през точката K и центърът ѝ лежи върху вписаната в ΔABK окръжност.

(Сава Гроздев, гр. София,
Веселин Ненков, с. Бели Осъм)

М+551. Нека O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълен триъгълник ABC, в който $\sphericalangle ACB = \gamma$ е най-малкият му ъгъл. Ако Q е такава точка от страната BC, че $\sphericalangle HOQ = 2\gamma$, да се определи $\sphericalangle OHQ$. **(Хаим Хаимов, гр. Варна)**

М+552. Дадени са тетраедър $ABCD$ с център на тежестта G и сфера k с център G. Ако M е произволна точка от k, да се докаже, че сумата $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$ не зависи от положението на M върху k.

(Милен Найденов, гр. Варна)

Краен срок за изпращане на решения: 15.10.2016 г.

М+ХРОНИКА

ДЕСЕТИ ЮБИЛЕЕН МЕЖДУНАРОДЕН КОНКУРС “MITE: Methodics and information technologies in education” („Методика и информационни технологии в образованието“)

От 30 април до 4 май 2016 г. в Москва се проведе юбилейното десето издание на Международния конкурс „Математика и проектиране“ в рамките на Международния проект MITE. Да припомним, че партньори на ВУЗФ в проекта са Академията за социално управление в Москва, Московският държавен университет “М. В. Ломоносов”, Центърът „Дарын“ в Казахстан и Институтът по математика и информатика-БАН. В конкурса взеха участие над 190 представители на 4 страни – Беларус, България, Казахстан и Русия. България беше представена с научни проекти на ученици от Велико Търново, Ловеч, Разград, Русе и София, с един студентски проект от ВУЗФ и с един учителски от София. Българите завоюваха общо 10 първи и 2 трети места в различните направления. В новите секции на конкурса – международни „Сетевые проекты“ и „Интелектуальный квест „Математическая вселенная““ екипите с български участници заеха съответно първо и трето място. Призьорите получиха грамоти и предметни награди. Във връзка с юбилея на основателите на конкурса и на активно проявилите се през годините представители на държавите-участнички бяха връчени грамоти и почетни знаци. Церемонията по награждаването беше придружена от богата културна програма. Българската група се прояви и тук. Виртуозното изпълнение на пиано на Наталия Нешева и хорото, изиграно на сцената с традиционни български носии, бяха бурно аплодирани. За финал, започнатата от българите руска песен „Катюша“ беше подета от цялата зала на крака и беше изпята от сърце от всички присъстващи.

Ето представянето на българските участници:

Направление "История на математиката"
„Великият Исак Нютон“ (**първо място**)
Автори: Селин Шемсиева (9 клас) и Мартин Николаев (9 клас) от МГ “Баба Тонка“, гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Направление "Математика и изкуство"
„Приложение на математиката в музиката“ (**първо място**)
Автори: Денислав Недев (11 клас) и Петър Петров (12 клас) от МГ “Баба Тонка“, гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Направление "Геометрични миниатюри"

„Триъгълникът на Паскал“
(**първо място**)
Автори: Иван Георгиев (7 клас), Йордан Илиев (7 клас) и Мартин Стефанов (7 клас)
от СМГ „Паисий Хилендарски“, гр. София
Научен ръководител: Ваня Данова

Направление „Математика в областта на защитата на информацията”

„Малка теорема на Ферма и теорема на Ойлер“ **(трето място)**
Автори: До Виет Къонг (7 клас), Никола Стайков (7 клас) и Йордан Илиев (7 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски“,
гр. София
Научен ръководител: Ваня Данова

Направление „Електронен тематичен журнал”

„Страната на математиката – образователно мултимедийно приложение на цифрите“
(първо място)
Автори: Денислав Недев (11 клас) и Петър Петров (12 клас) от МГ “Баба Тонка“, гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Направление „Математическо моделиране на реални процеси в природата и обществото"

„Електронен математически наръчник“
(**първо място**)
Автори: Кристиан Спасов (9 клас) и Виктор Топоров (9 клас) от МГ “Баба Тонка“, гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Първо място в студентската секция зае Анна-Мария Арнаудова от ВУЗФ със своята научна разработка „Зависимост между брутния вътрешен продукт и държавните разходи в България“

Направление "Финансова математика"

„Дуопол и олигопол на Бертран“ (**първо място**)
Автор: Петко Казанджиев (10 клас) от ПМГ “Васил Друмев“, гр. Велико Търново
Научни ръководители: Цеца Байчева и Кинка Кирилова-Лупанова

Направление "Математиката като наука"

„Дискретни динамични системи и хаос“ (**първо място**)
Автори: Пресиана Маринова (11 клас) от МГ “Баба Тонка“, гр. Русе и Ивета Македонска (10 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски“, гр. София
„Числата на Каталан“ (**трето място**)
Автори: Маргарита Стефанова (7 клас), Йоана Кичева (7 клас) и Алекс Цветанов (7 клас) от СМГ „Паисий Хилендарски“, гр. София
Научен ръководител: Ваня Данова

Направление "Използване на математически методи за решаване на професионално-ориентирани задачи"

„ПАКОСТ – Как да предотвратим войната по пътищата“ (**първо място**)
Автори: Селин Шемсиева (9 клас) и Мартин Николаев (9 клас) от МГ “Баба Тонка“, гр. Русе
Научен ръководител: Сюзан Феимова

Международни научни проекти – Сетевые проекты

Първо място за Лили Стефанов (11 клас), Ирина Христова (10 клас) и Радина Иванова (11 клас от МГ в гр. Ловеч в екип с участници от Русия и Казахстан

Интелектуальный квест „Математическая вселенная“

Трето място за Наталия Нешева (7 клас) от ОУ „Васил Левски“, гр. Разград в екип с участници от Русия и Казахстан.

Фестивал на методически разработки – учителски презентации

„Автоматизация на счетоводната отчетност“ (**първо място**)
Автор: Станимира Петрушкова от Националната финансово-стопанска гимназия, гр. София.