МАТЕМАТИКА ПЛЮС®

M+

списание за математика и информатика

4 1995

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

списание за математика и информатика

одобрено от Министерството на образованието, науката и технологиите за класна и извънкласна работа

Редакционна колегия: *Сава Гроздев, Олег Мушкаров* – **гл. редактори**
Евгения Сендова, Георги Ганчев, Иван Тонов, Вячеслав Величков, Емил Келеведжиев, Петър Миланов, Яни Арнаудов, Кирил Банков, Ваня Хаджийски, Кристиян Янков, Светлозар Дойчев, Христо Лесов
Компютърен дизайн: *Татяна Пархоменко*
Директор: *Мадлен Петрова*

© МАТЕМАТИКА ПЛЮС ®

Списанието се издава със съдействието на Институт по математика – БАН

Адрес на редакцията:
Институт по математика — БАН, стая. 517, ул. „Акад.Г. Бончев“, бл. 8, 1113 София, тел. 713-28-26,e-mail: SAVAGROZ@BGEARN.BITNET

Скарабей
ЕЗИКОВ ЦЕНТЪР
КУРСОВЕ ПО АНГЛИЙСКИ ЕЗИК
в 3 възрастови групи:
I-IV клас, V-VIII клас,
IX-XI клас и възрастни
София 1799, ж.к. Младост-2
бл.220, вх.2, ет.2
тел. 74 93 62

Обучението за деца се провежда чрез забавни игри, песнички и стихотворения на основата на изпитани методики на български и английски специалисти.

Обучението за възрастни и ученици от горните класове се извършва по системата HEADWAY. Тя е в 5 нива и е носител на първа награда от конкурса на Английско говорящото общество. HEADWAY е системата, която предполага най-добра подготовка за придобиване на международно признат сертификат от университетите в Оксфорд и Кембридж.

Центърът предлага на своите курсисти богата библиотека и видеотека с оригинални заглавия на английски език. Разполага също и със съвременна аудио- и видеотехника.

Формат: 600 × 840/8 Печатни коли 9
Дадена за печат на 29.11.1995 г. Подписана за печат на 05.12.1995 г. **ISSN 0861-8321**

Математика плюс
бр. 4, 1995

М+

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е списание за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и информатиката направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математическите гимназии и техникумите; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

В БРОЯ:

М+ЕКСПЕС – ТРЕТА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО ИНФОРМАТИКА 3

М+ИНТЕРВЮ – BIOMATH-95 5

МАТЕМАТИКА + БИОЛОГИЯ – **Евгения Сендова** 8

М+ПОСТЪР (ЗАДАЧИ 5–12 КЛ.) 10

КОНКУРС С НАГРАДИ ЛЕГО 11

МИСТЪР ТЕЛЕСКОП – **ст.н.с. Олег Мушкаров** 13

ОЛИМПИАДИ + ПОДГОТОВКА 17

ОБОБЩЕНИЕ НА ЕДНА ЗАДАЧА НА КИРИЛ ДОЧЕВ – **Хаим Хаимов** 19

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА В НПМГ – **Петър Недевски** 25

М+СВЯТ – ЛЯТНА ЛАГЕР-ШКОЛА НА ТУРНИРА НА ГРАДОВЕТЕ – **Емил Колев, Людмила Каменова** 30

КОНКУРС ПО ИНФОРМАТИКА 33

ЗАДАЧИ М+ 35

М+НАЙ-МАЛКИТЕ – ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ (КОНКУРС уМ+) 37

ТОМБОЛА М+ (НАГРАДИТЕ ОТ БР. 2, 1995 Г.) 46

ПРИТУРКА М+ – КАНДИДАТ-СТУДЕНТСКИ ИЗПИТИ ПО МАТЕМАТИКА 1995 Г.

Драги читатели,

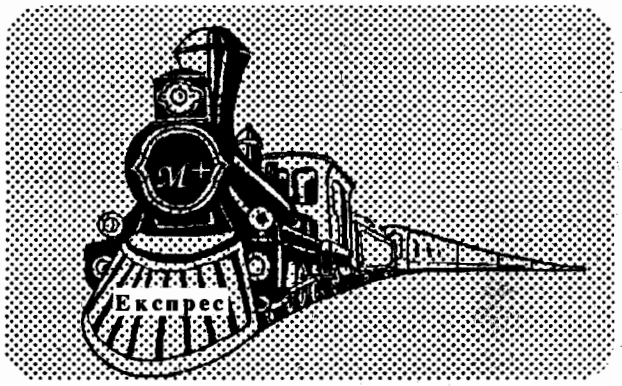
Най-напред бих искал да ви честитя настъпващата Нова 1996 г. и да ви пожелая много здраве, щастие и нови математически успехи. През изтичащата година ние се постарахме не само да ви информираме за всичко най-важно и интересно в областта на математиката, но и да бъдем ваш полезен помощник в ежедневните ви математически занимания. Многобройните писма от ученици, учители и професионални математици показват непрекъснато нарастващият интерес към списанието, факт който ни радва, но и ни задължава. Ето защо и през новата година ние ще разчитаме на интересни и съдържателни материали от нашите многобройни сътрудници.

Кои основни теми ще бъдат застъпени в списанието през 1996 г.? Подготовката за кандидатстване във ВУЗ ще се води от ст.н.с. С. Гроздев, ст.н.с. О. Мушкаров и кмн В. Хаджийски, а екипи от преподаватели от основните ВУЗ-ове в страната ще предлагат примерни теми, които ще отразяват спецификата на съответните кандидат-студентски конкурси по математика. Рубриките за кандидатстващите след 7 и 8 клас и зрелостниците ще се водят от В. Величков – гл. експерт в МОНТ, като подготвителните задачи и примерните теми ще бъдат изготвяни от изявени учители с богат опит в тази насока. Списанието ще помага и на всички участници в различните математически олимпиади и състезания. Освен традиционните рубрики $M+$ семинар, $M+$ колоквиум и $M+$ практикум планираме и откриването на нова рубрика, която да бъде в помощ на учителите в тяхната извънкласна работа. Тя е **съвместна инициатива на МОНТ и сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС**, която разчита на активното участие на учителите по математика и информатика. За целта те могат да изпращат на адреса на редакцията мнения и предложения за разработка на определена тема, съпроводена с около 15–20 задачи. Това предложение не трябва да съдържа педагогически елементи и обяснения, а просто набор от задачи, които съответният учител счита за целесъобразни при изясняване на темата. Идеята на МОНТ и МАТЕМАТИКА ПЛЮС е под формата на диалог да се стигне до най-добър вариант за съответната тема, който впоследствие да бъде публикуван на страниците на списанието от името на учителя. Нашите най-малки читатели сигурно с нетърпение очакват четивата и задачите от третото издание на Националния конкурс „Издирване на таланти у$M+$“. Той започва в този брой и отново председател на журито е акад. Бл. Сендов. На всички участници пожелавам успех, а изненадите за победителите и техните учители засега ще запазя в тайна.

Няма да забравим и любителите на забавната математика, а участниците в $M+$ томбола могат да са спокойни – наградите за 1996 г. са вече в редакцията на $M+$.

До нови срещи през 1996 г.!

Искрено ваш, **д-р М. Плюс**



ТРЕТА БАЛКАНСКА ОЛИМПИАДА ПО ИНФОРМАТИКА

За пореден път най-добрите млади информатици от балканските страни се събраха да премерят сили в III балканска олимпиада по информатика, която се състоя от 5 до 11 октомври в черноморската ни столица. Състезанието се проведе в базата на Института за преподготовка и квалификация на учители в гр. Варна. Организатори бяха Министерството на образованието, науката и технологиите и Съюзът на математиците в България (по-специално секцията на СМБ във Варна). Спонсори на олимпиадата станаха Кметството на гр. Варна и фирмите "IBM – България" и "Балкан Систем". За провеждането на състезанието бяха използвани компютри, предоставени безвъзмездно от IBM на български училища.

Организационният комитет се ръководеше от гл. ас. кпн Ангел Ангелов – експерт по информатика в МОНТ, а научното ръководство беше поверено на автора на тази информация доц. Красимир Манев – председател на Международното жури. Членове на Програмния комитет бяха още доц. Асен Рахнев, н.с. кмн Людмил Александров и ас. Иван Симеонов. В комисията по оценяване на работите се включиха изявени ръководители на извънкласната работа по информатика – гл. ас. Каталина Григорова, Коста Гъров, Павлин Пеев, Руско Шиков, както и доскорошните състезатели и медалисти от международни олимпиади Христо Божинов и Светослав Цветков.

Към миналогодишните участници Гърция, Кипър, Румъния, Турция, Югославия и България (с 2 отбора) тази година се присъединиха и представители на Република Македония. Така участващите отбори станаха 8. Извън класирането в олимпиадата участва и най-добрият представител на гр. Варна, Огнян Кулев, който не успя да се пребори с жестоката конкуренция за място в един от двата български отбора. Ръководител на първия български отбор беше доц. Павел Азълов, а на втория – Огнян Гаврилов.

Първият ни отбор беше съставен от Георги Пеев (Стара Загора), Красимир Паскалев (СМГ София), Георги Петков Димитров (Русе) и Георги Александров Димитров (Плевен). Във втория отбор бяха включени: Антон Шиков (Ямбол), Ивко Станилов (Плевен) и братята Преслав и Светлин Накови (Велико Търново).

Състезанието се проведе в два дни. Двете задачи от първия ден не затрудниха най-добрите и седем души завършиха с пълния сбор от 100 точки (трима от България-1 и по един от Република Македония, Румъния, Югославия и България-2). Журито беше принудено да увеличи броя на задачите за втория ден на 3, а състезателното време от 4 на 5 часа. При тези изключително тежки условия вторият ден се оказа решаващ за състезанието и определи абсолютния балкански шампион – Овидиу Георгьою, десетокласник от специализираното средно училище към Университета в Алба-Юлия, Румъния, който набра 181 точки.

Според правилата на балканските състезания и в зависимост от набраните точки Международното жури присъди следните призови места:

Златни медали: Овидиу Георгьою (Румъния), Красимир Паскалев (България-1) и Антон Шиков (България-2).

Сребърни медали: Георги Пеев (България-1), Владимир Бранков (Югославия), Милош Джерманович (Югославия), Георги А.Димитров (България-1) и Влад Петрич (Румъния).

Бронзови медали: Каталин-Андрей Фрънку (Румъния), Михай Бадою (Румъния), Зарко Алексовски (Република Македония), Киприанидис Александрос (Кипър), Георги П. Димитров (България-1), Ярослав Благоевич (Югославия), Тасос Сидиропулос (Гърция), Преслав Наков (България-2) и Тимоти Констандину (Кипър).

Абсолютният победител Овидиу Георгьою получи наградата на "IBM-България" – персонален компютър IBM PS/1. Класиралият се на второ място Красимир Паскалев – CD ROM от МОНТ и Soundblaster от СМБ. Третият и четвъртият получиха парични награди – 10000 лв. за Антон Шиков от Варненската секция на СМБ и 3000 лв. за Георги Пеев от фирмата "Балкан Систем". Класиралият се на пето място Владимир Бранков бе награден от Кметството на гр. Варна с графика от варненския художник Бранимир Антонов. Всички златни и сребърни медалисти получиха и по една компютърна мишка от фирмата "Балкан Систем". Участвалият извън класирането ученик от МГ Варна Огнян Кулев се представи много добре. Точките, които той събра, биха го наредили на седмо място в класирането и биха му отредили сребърен медал. Ръководството на МГ Варна награди Огнян Кулев с парична награда.

Медалите, дипломите за призови места и удостоверенията за участие в третата балканска олимпиада по информатика връчи зам. министърът на МОНТ г-н Иван Йорданов на официалната церемония по закриването.

Извън състезателната програма домакините от гр. Варна се бяха постарали да покажат забележителностите на града и околностите. С интерес участниците посрещнаха обиколката на Варна, посещението в делфинариума и екскурзията до Албена, Балчик и нос Калиакра, както и възможността да се насладят на прелестите на българската кухня. След официалната церемония по награждаването Кметството на гр. Варна даде коктейл за участниците и организаторите на олимпиадата.

На специално свое заседание Международното жури обсъди редица въпроси, свързани с подобряване организацията на балканските олимпиади по информатика. Беше решено да се учреди Международна координационна група, в която да членуват председателите на журитата на последните две олимпиади и която да бъде ръководена от председателя на журито на следващата олимпиада. Членове на тази група станаха Яни Манолопулос (Гърция) и Красимир Манев (България). Председателят ще бъде излъчен от Кипър, страната-домакин на Четвъртата балканска олимпиада по информатика, която ще се проведе в края на септември 1996г. на очарователния средиземноморски остров.

Уточнени бяха и домакините на следващите балканиади. През 1997 г. отново Солун ще приеме състезанието в рамките на честването на 2000 години от основаването на града, а домакин на Балканиадата по информатика за 1998 г. ще бъде Турция.

доц. Красимир Манев

BIOMATH–95 И НЯКОЛКО РАЗГОВОРА ПО ВРЕМЕ НА ПАУЗИТЕ

(от които Д-р М.Плюс разбира, че петната на леопарда и зъбите на крокодила се подчиняват на математически закономерности и че биолозите без математика "се чувстват като минуси")

От 23 до 27 август 1995 на Витоша се проведе Международен симпозиум и школа за млади учени **BIOMATH-95** на тема Математическо моделиране и информационни системи в биологията, екологията и медицината. Организатори бяха Институтът по биофизика към БАН и Институтът по информатика към Университета в Базел. Участваха учени от 19 страни от Европа, Азия, Северна и Южна Америка и Африка. Председателят на организационния комитет Светослав Марков е един от най-изявените български математици, работещи активно в областта на биологията. В разговор с Д-р М.Плюс той бе любезен да удовлетвори любопитството му:

Д-р М.Плюс: *Днес математическата биология е добре дефинирана научна област, както се вижда от растящия брой центрове по математическа биология в света. Все повече са и младите учени, които желаят да работят в тази област. Какво образование е по-подходящо за тях като основно – математическо или биологическо?*

ст.н.с. Светослав Марков

С. М.: Математическата биология действително има няколко много добре очертани области, например: математическа ензимна кинетика, математическа популационна динамика, математическа имунология, математическа екология, математическа неврофизиология и др. Далече е напреднало математическото моделиране и в областта на клетъчната диференциация, образуване на органи, тъкани и форми, област, която е свързана с еволюцията на видовете. Ясно е, че става дума за междудисциплинарни области. Както и при биофизиката и биохимията, биоматематиката си служи с математически средства при изучаването на биологични обекти и процеси. С други думи, предмет на изследванията са процесите и живите организми, а методите за тези изследвания са математически. За сравнение – биофизиката също изучава биологични явления със средствата на физиката. Така както биофизиката трябва да бъде едновременно биология и физика, така и биоматематиката трябва да бъде биология и математика. Учените в областта на биоматематиката обикновено са специалисти в определена биологическа област, например неврофизиология, популационна динамика, имунология, ензимна кинетика и т.н., както и специалисти в определена математическа област, подходяща за изследвания на съответните биологични явления. Затова смятам, че биоматематиците трябва да имат образование както в областта на математиката, така и в биологията, или поне в съответната област от биологията, в която ще работят. Искам да подчертая обаче, че един математик без биологическо образование по-лесно може да навлезе в конкретна биологична област, отколкото един биолог без ма-

тематическо образование може да стане математик. Оттук следва, че биоматематиците трябва задължително да имат сериозно математическо образование.

Д-р М.Плюс: *Първата международна конференция по биоматематика в България привлече учени, чиито разработки покриват широк спектър на приложения. Математиката ли е езикът, на който най-добре се разбират?*

С. М.: Математиката е този език, но трябва да може да се борави и с езика на съответната биологична област. Например, ако се моделира пренасянето на електрически импулси от една нервна клетка на друга, не може да не се говори за синапси, медиатори, рецептори, ензими, мембрани, канали, везикули и т.н. Но ако моделът използва диференциални уравнения, езикът става математически. След като се реши възникналата математическа задача, започва интерпретацията (тълкуването) на получените резултати в термините на биологичните характеристики и езикът отново става биологичен, поне що се отнася до използваната терминология.

Д-р М.Плюс: *На дискусията, посветена на ролята на математиката в биологията, се постави въпросът: Математическа биология или биоматематика? Какъв е вашият отговор?*

С. М.: Това е едно и също. Забелязвам, че математиците не обичат да казват биоматематика, защото тази дума като че ли предполага отделен вид математика. От своя страна биолозите не обичат термина математическа биология. Мисля, че най-добре звучи математическо моделиране в биологията, но за съжаление е доста дълго. Бъдещето ще покаже кой термин ще се наложи за означаване на тази област.

Д-р М.Плюс: *А ако все пак някой смята, че не обича математиката, може ли да стане добър биолог?*

С. М. Биологията освен математика използва и науки като физика и химия. Без тези науки не мисля, че един биолог може да бъде добър учен, а доколкото тези науки предполагат и математически знания, то биологът трябва да знае и математика. Може това образование да не е получено формално в университет, но без математика биологът може да описва явленията качествено, а не количествено.

След този приятен диалог Д-р М.Плюс се насочи към първата българка, защитила математическа дисертация в биологически контекст – Таня Костова.

Д-р М.Плюс: *Кой Ви насочи към разработване на дисертация в областта на математическото моделиране в биологията?*

Т. К.: Първоначалният ми интерес идва от средата, в която съм израснала. От една страна, се влюбих в математиката, когато усетих сладостта на победите в математическите олимпиади. Строгата честност на езика на математиката

н.с. Таня Костова

много ми допадаше. От друга страна, професиите на родителите ми са свързани с науката за живота - баща ми е учен-микробиолог, който живееше в своя странен свят, населен с дрожди със странни имена като Кандида тропикалис, а майка ми е рентгенова лаборантка, която всеки ден идваше от работа с истории за язви, гастрити, счупени грънбаци, пациенти, глътнали сребърни лъжици и прочие страхотии. Как при такива родители да не усетиш съдбовното тайнствено привличане на Живота във всичките му форми? Съдбата ме тласкаше в тази насока по съвсем очевиден начин: в последния клас на Английската езикова гимназия учителката ми по математика, Лачева, която се оказа състудентка на професор Благовест Сендов, го покани да ни изнесе популярна лекция за приложенията на математиката. И той говори за своята работа съвместно с професор Румен Цанев (тогава естествено и двамата не бяха още академици) върху математически модели на рака, поне така си спомням. Това запали въображението ми и ме убеди, че математиката и биологията са си подали вече ръка. По-късно, в Математическия факултет на Софийския университет специализирах Математическо моделиране. Кандидатската ми дисертация беше от областта на неврофизиологията, а математическият апарат – системи от диференциални уравнения. Научен ръководител ми беше акад. Сендов.

Д-р М.Плюс: *Каква предварителна подготовка трябва да има един специалист, който се занимава с приложение на математическите методи в биологията?*

Т. К.: Естествено, той трябва да е добре подготвен математик. И трябва да познава добре явлението, което моделира. В нашата страна за съжаление, системата е такава, че интердисциплинарно образование не може да се получи. Т.е., ако следваш математика, трябва да положиш изпитите , които се предвиждат във Факултета по

математика. Но не можеш да се явиш на изпити и в Биологическия факултет например. Така че ти остава възможността да се самообразоваш, което не е най-доброто, но това е видът подготовка, която имам аз самата. В много страни по света съществува интегрирано обучение по т.н. специалност Биоматематика или Математическа биология (терминът е спорен). Например в Германия, в Университета в Тюбинген, съществува Катедра по Биоматематика, ръководена от проф. Карл Хаделер. В САЩ има няколко такива центрове. Например в Ноксвил, Тенеси, проф. Халам ръководи специална програма на Университета на Тенеси по математическа екология, където студентите изучават както математика, така и курсове по екология. Интересно е, че проф. Хаделер е биолог, който е завършил и математика като втора специалност, а проф. Халам е математик, работещ в тясна връзка с биолози. Аз лично вярвам, че бъдещето в тази област принадлежи на колективи от математици, имащи известна биологическа подготовка и биолози, еколози или медици с добра математическа култура. Такива специалисти могат да бъдат подготвяни след завършването на висшето им образование по време на съответна специализация или аспирантура.

Д-р М.Плюс: *Разкажете ни за някои интересни математически модели в биологията. Над какво работите сега?*

Т. К.: Напоследък работя в областта на популационната динамика. С помощта на диференциални уравнения се описва развитието на популация от индивиди и взаимодействието между популации. Тези модели напоследък се прилагат например в епидемиологията – при изучаване на развитието на някои заболявания, като например СПИН или "тривиални" детски болести, като заушка например. Целта е да се предвиди състоянието на цялата популация при съответен начин на лечение или поведение на индивидите. Интересни математически модели се прилагат в много области: в неврофизиологията много "модерни" са т.н. "нервни мрежи", моделирането на сърдечния ритъм, на мускулното съкращение и др. С математически модели се правят опити да се обясни еволюцията и развитието на видовете. Защо леопардът, зебрата, жирафът имат точно такава окраска на кожата, защо имаме точно пет пръста на ръцете и краката, как и защо в точно определен ред порастват зъбите на детето или на крокодила - на такива въпроси се опитват да отговорят някои математици, колкото и странно да звучи това.

Д-р М.Плюс: *Какво ще посъветвате читателите с интереси в математиката и биологията?*

Т. К.: Да се въоръжат с много, много упоритост и любов към знанието. Усилията им ще бъдат богато възнаградени: да работиш на границата между две науки е като да вървиш по билото на висока планина: "и отляво, и отдясно виждаш надалеч и ясно".

Евгения Сендова, пратеник на Д-р М. Плюс

НА ВАШЕТО ВНИМАНИЕ

Излезе от печат ЗАДАЧИ И ТЕСТОВЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА ШЕСТИ КЛАС – една чудесна книжка, която ще достави истинско удоволствие на малките ГОЛЕМИ ЛЮБИТЕЛИ на математиката. Авторите Таня Тонова, Веселин Златилов и Савка Ненова са се опрели на успешната си работа с деца от тази възраст и са разработили помагало, съобразено с новото учебно съдържание за 1995-1996 година. Материалът е разделен на три нива – първото обхваща тематично подредени задачи за упражнение, второто съдържа тестове за самоконтрол, а третото предлага на най-любознателните шестокласници задачи от тип "предизвикателства". Разгледаните теми за рационални числа, равнинни фигури, ръбести, валчести и ротационни тела, уравнения, неравенства и степенуване са поднесени майсторски и не само представляват ценно помагало за усвояване на материала по математика за шести клас, но и дават храна за въображението на най-запалените малки математици.

Евгения Сендова

Заявки за книгата можете да направите на адреса на редакцията на списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС или на телефон 713-28-26.

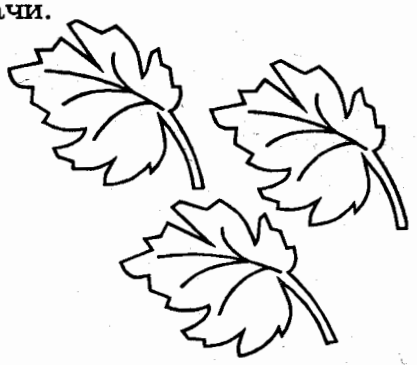
МАТЕМАТИКА + БИОЛОГИЯ

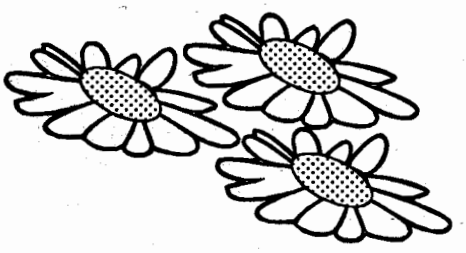
Вселената е описана на езика на математиката
Галилео Галилей

Сигурно мнозина от вас са се учудвали на съвършените форми на листата на дърветата, на цветните венчелистчета, на спираловидната форма на черупките на охлювите, на строежа на шишарките, на елегантността и изяществото на паяжините, на хармонията в оцветяването на растенията и животните. Природата изобилства с математически понятия и закономерности. Ще се спрем на няколко природни явления, които са интересни от математическа гледна точка.

Математическа ботаническа градина

Ако преброите левите и десните спирали на една шишарка, ще получите последователни членове от редицата на Фибоначи $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Това важи и за слънчогледовите семенца. Сега изберете лист от стъблото на череша или круша. След това пребройте колко са листата до онова листо, което е разположено в една равнина с него (включително). Обикновено този брой е число от редицата на Фибоначи.

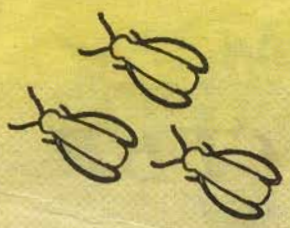




А сега си представете въже, което се увива около някаква крива, например около окръжност. Тогава другият му край описва крива, която се нарича инволюта (на тази окръжност). Оказва се, че гъсениците изрязват такива дупчици, за които контурът на листото представлява инволюта. Инволютата е форма, която се наблюдава в клюна на орела, в перката на акулата, в палмовите листа.

С пчелите човек никога не знае

С пчелите човек никога не знае ... беше казал на времето Мечо Пух и е бил съвсем прав. Без да са учили теорията на паркетирането на равнината (покриването ѝ с еднакви фигури, без да се оставят празни места и без припокриване) пчелите паркетират восъчните пити с шестоъгълници. Защо толкова сложно, не може ли с квадратчета или пък с триъгълничета например? – би запитал някой. Оказва се, че по този начин се изразходва най-малко восъчен материал, т.е. пчелите разбират и от оптимиране. Пчелите работят едновременно на различни секции от пчелната пита и използват част от тялото си като измервателен инструмент.



Особено интересен е начинът, по който пчелите си предават съобщения. Къде има източник на храна например (информация за посоката и разстоянието) пчелите-работници съобщават с помощта на код във формата на танц. Ориентацията на танца спрямо слънцето свидетелства за посоката, а продължителността на танца - за разстоянието. Тогава трябва ли да се учудваме, че пчелите знаят и кой е най-краткият път между две точки? След като една пчела-работник е скачала от цвят на цвят, за да събира нектар, тя знае кой е най-краткият път до кошера ѝ.

Математическите познания на пчелите се предават по генетичен път и ако анализираме поведението им, сигурно ще открием още доста храна ... за възхищение.

Ред и хаос при птиците

Един музикант бе казал, че хармонията е извличане на реда от хаоса ... Ако се вгледаме по-продължително в полета на птиче ято, едва ли ще останем равнодушни към красотата на този полет. Как се осъществява тази изключителна хармония? Защо птиците никога не се блъскат? Зоологът Франк Хепнър потърсил отговора на този въпрос, като филмирал и изучавал полета на най-различни

птичи ята. Той установил, че птиците нямат едноличен водач. Те летят в състояние на динамично равновесие, като водещият ятото ред от птици непрекъснато се сменя на кратки интервали. За да обясни това движение, Хепнър прибягва до теорията на хаоса и компютърното моделиране. Разработва модел, в който птиците са представени от тригълници, движещи се по 4 прости правила: (1) птиците се привличат от една точка (фокус); (2) птиците се привличат взаимно; (3) птиците се стремят да поддържат постоянна скорост; (4) въздушните пътища на полета се изменят от случайни фактори, като например появата на вятър. Като изменя интензивността на отделните правила, Хепнър успява да симулира на компютърния екран полета на птиче ято. Такъв компютърен модел не е доказателство разбира се, че полетът се осъществява именно по предложените от Хепнър закони, но все пак е едно възможно обяснение за това, как се движат птичите ята. Така че, не се учудвайте, ако ви се наложи да прибегнете до теорията на хаоса, за да внесете ред в обяснението на някои природни явления.

Евгения Сендова

M+ ПОСТЪР

(Що ли значи? - На стената п задачи!!)

5 клас

1. Възстановете липсващите цифри в умножението

$$\begin{array}{r} 126 \\ \times\quad \\ ** \\ \hline *** \\ **** \\ \hline 1*2*6 \end{array}$$

2. На 21 деца раздали 200 ореха. Покажете, че както и да се разпределят орехите, ще се намерят поне две деца, които са получили по равен брой орехи.

6 клас

3. Да се намери лицето на равнобедрен трапец с основи 12 см и 20 см, ако диагоналите му са взаимно перпендикулярни.

4. Да се покаже, че ако n е естествено число, то n^2+n+1 е нечетно число и не е квадрат на естествено число.

7 клас

5. а) Да се намерят стойностите на параметъра k, за които правата $y_1 = kx+2$ отсича триъгълник от графиката на функцията $y = |x|$.
б) Да се намери лицето на този триъгълник.
в) За кои стойности на k лицето на този триъгълник е най-малко?

6. Четно или нечетно число е броят на върховете на многоъгълник, ако е известно, че броят на диагоналите му се дели на броя на върховете му?

8 клас

7. Да се реши уравнението $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 3$

8. От произволна точка M, вътрешна за ъгъл A, са спуснати перпендикуляри MP и MQ към раменете на ъгъла. Нека $AK \perp PQ$ $(K \in PQ)$. Да се докаже, че $\sphericalangle PAK = \sphericalangle MAQ$.

9 клас

9. Да се реши уравнението $(x^2-a)^2 = a-x$, където a е параметър.

10. Две от страните на триъгълник имат дължини a и b, а ъгълът между тях е 120°. Да се изрази чрез a и b ъглополовящата на този ъгъл на триъгълника.

10 клас

11. Да се реши уравнението

$$\sqrt[3]{4-x^2} + \sqrt{x^2-3} = 1.$$

12. През една страна на ромб е построена равнина, образуваща с диагоналите му ъгли α и 2α. Да се намери тангенсът на острия ъгъл на ромба, ако α удовлетворява равенството

$$\frac{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \cos\alpha - \frac{15}{4}.$$

11 клас

13. Разстоянията от центъра на основата на правилна четириъгълна пирамида до околните стени и до околните ръбове са съответно a и b. Да се определи обемът на пирамидата.

14. Да се реши системата

$$\left\| \begin{array}{l} \log_{x-2}(2x^2-4x+y+1) = 2 \\ x+y-3 = a-a^2, \end{array}\right.$$

където a е параметър.

12 клас

15. Да се реши уравнението

$$5\sin x + 12\cos x = 10.$$

16. Да се намерят всички строго монотонни функции f, дефинирани в множеството на реалните числа, удовлетворяващи условието

$$f(f(y)+x+1) = f(x+y)+1.$$

Задачите са предложени от Еленко Начев

Конкурс, подготвен съвместно с

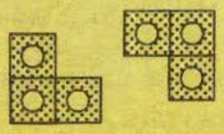
ComseD
1142 София, ул. Раковски 174
Тел/факс: 66 67 26, 68 73 75
генерален дистрибутор на
LEGO

За вас, почитатели на ЛЕГО и МАТЕМАТИКА ПЛЮС!

В четирите броя на списанието от тази година се публикува по една занимателна задача. Фирма COMSED осигурява по 3 сувенирни награди за всеки брой. Наградите са за тези, които изпратят в срок вярно решение на съответната задача. Ако правилните решения са повече от 3, наградите ще бъдат разпределени чрез жребий. Читателите, които решат задачите и от четирите броя на списанието, ще участват в томболата за голямата награда ЛЕГО – конструктор 8837.

Очакваме вашите писма!

Ето и задачата за бр. 4, 1995 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС



Разполагате с 8 „ъглови“ елементи от игрите ЛЕГО. Видът им е показан вляво. Покрийте с тях дъното на правоъгълна кутия с размери 6×4 така, че никои два елемента да не образуват правоъгълник с размери 3×2.

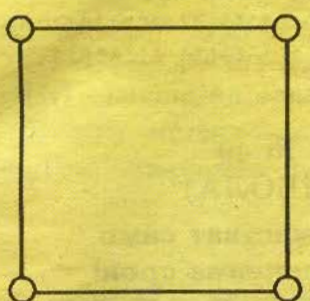
Краен срок за изпращане на решения 20 февруари 1996 г.

M+ томбола

ПОПЪЛНЕТЕ ВАШИТЕ ОТГОВОРИ, ЗА ДА УЧАСТВАТЕ В ТОМБОЛАТА *M*+

1. Мерителна чашка с 6 деления е напълнена с лекарство. Понеже му горчало, Иванчо изпил само 3 деления. Каква част от лекарството е останала в чашката?

а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{3}$, в) $\frac{1}{8}$



2. Във върховете на квадратна ледена пързалка са забити 4 пилона. Начертайте проект за квадратна пързалка с двойно по-голяма площ, чиито контур минава през тези пилони.

М+ ИГРА

Ако желаете да се включите в разпределението на наградите ЛЕГО за брой 4 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете този фиш, изрежете го и заедно с решение на задачата го изпратете не по-късно от 20 февруари 1996 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име ..... Фамилия .....

код ..... Селище .....

ул. .....

Изпращайте на адрес:
София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" № 49
Мадлен Николова Петрова (за М+ ИГРА)

ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ: В разпределение на наградите участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!

М+ томбола

Ако желаете да се включите в лотарийното разпределение на предметните награди за томболата М+ в брой 4 на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС, попълнете лицевата страна на фиша, изрежете го и го изпратете не по-късно от 20 февруари 1996 година на посочения адрес. Желаещите могат да участват с повече от един оригинален отрязък.

Име ..... Фамилия .....

код ..... Селище .....

ул. .....

Изпращайте на адрес:
София, Подуене, ул. "Ангел Войвода" № 49
Мадлен Николова Петрова (за М+ ТОМБОЛА)

ОБЪРНЕТЕ ВНИМАНИЕ: В томболата участват само ОРИГИНАЛНИ отрязъци, изпратени в посочения срок!

МИСТЪР ТЕЛЕСКОП

ст.н.с. Олег Мушкаров, Институт по математика – БАН

Една от кулминациите на тазгодишната международна олимпиада по математика в Канада беше присъждането на специалната награда на международното жури на българския ученик Николай Николов за оригинално решение на шестата задача. Това изключително постижение беше красив завършек на впечатляващите четири участия на известния наш млад математик в най-престижното математическо състезание за ученици в света, на които той завоюва 3 златни и 1 сребърен медал. Самата награда — истински телескоп не беше избрана случайно. Чрез нея по един изящен начин международното жури изрази своето възхищение от далечината на математическия поглед на този безспорен математически талант. Тази награда и символът, вложен в нея, станаха причина всички участници в олимпиадата да се обръщат към Николай с името Мистър Телескоп.

В тази статия ще разкажем по-подробно за две от решенията на шестата задача на МОМ'95, предложени от координационната комисия, а така също ще изложим и оригиналното решение на Николай Николов, за което той получи специалната награда. Надяваме се, че то ще достави истинско удоволствие на всички любители на математиката.

Ето и формулировката на шестата задача от МОМ'95, която беше предложена от Полша: *Нека p е нечетно просто число. Да се намери броят на подмножествата A на множеството $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ такива, че*

(*i*) *A има точно p елемента и*

(*ii*) *сумата на всички елементи на A се дели на p.*

Важен момент при решаването на всяка задача е изработването на стратегия за нейното атакуване. Ето защо ще започнем с някои

Подсещащи съображения

В конкретния случай най-напред трябва да се стигне до хипотеза за отговора на задачата, а след това да се набележат пътища за нейното доказване. За тази цел ще въведем някои означения. За всяко крайно множество A от реални числа нека $|A|$ и $\sigma(A)$ са съответно броят и сумата на елементите на A. Означаваме с U_p множеството на всички p-елементни подмножества $A \subset \{1,2,\ldots,2p\}$ и разбиваме U_p на класове $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, където $C_r = \{A \in U_p | \sigma(A) \equiv r (\mathrm{mod}\, p)\}$. Задачата е да се намери $|C_0|$. Тъй като

$$|C_0| + |C_1| + \cdots + |C_{p-1}| = |U_p| \binom{2p}{p}, \tag{1}$$

естествено е да се търси връзка между числата $|C_r|$. Да разгледаме случая $p = 3$. Тогава лесно се вижда,че

$$C_0 = \{\{2,3,4\},\{1,3,5\},\{1,2,6\},\{3,4,5\},\{2,4,6\},\{1,5,6\},\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$$
$$C_1 = \{\{1,2,4\},\{2,3,5\},\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{3,4,6\},\{2,5,6\}\}$$
$$C_2 = \{\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{1,4,6\},\{3,5,6\}\},$$

т.е. $|C_1| = |C_2| = |C_0| - 2$. Ако тези равенства са верни за всяко p, ще имаме, че

$$|C_1| = |C_2| = \cdots = |C_{p-1}| = |C_0| - 2 \tag{2}$$

и от (1) ще следва, че $|C_0| = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$. Това е и хипотезата за отговор на задачата. Нещо повече, горните разглеждания я свеждат до доказването на равенството (2) за всяко просто $p \geq 3$. Това може да стане по различни начини.

Използване на биекции

Най-естественият начин за установяване на равенство на броя на елементите на две множества е построяването на биективно (взаимно-еднозначно) съответствие между тях. С този подход могат да се докажат и по-общи равенства от тези в (2). За произволни числа $0 \leq k, r \leq p-1$ означаваме

$$C_{k,r} = \{X | X \subseteq \{1,2,\ldots,p\}, |X| = k, \sigma(X) \equiv r (\mathrm{mod}\, p)\}.$$

В сила е следната

Лема. За всяко $1 \leq k \leq p-1$ имаме

$$|C_{k,0}| = |C_{k,1}| = \cdots = |C_{k,p-1}| = \frac{1}{p}\binom{p}{k}.$$

Доказателство. За всяко $0 \leq r \leq p-1$ ще построим биекция $\varphi : C_{k,0} \to C_{k,r}$. За тази цел ще работим по модул p (т.е. с остатъците, които дават съответните числа при деление на p). Ясно е, че при дадено r съществува единствено $0 \leq c \leq p-1$ такова, че $kc = r$ (т.е. двете страни на равенството дават еднакви остатъци при деление на p). Сега дефинираме изображението φ чрез $\varphi(x) = \{x + c | x \in X\}$, т.е. множеството $\varphi(X)$ се получава от X с прибавяне на c (по модул p) към всеки елемент на X. Ясно е (докажете строго!), че $\varphi : C_{k,0} \to C_{k,r}$ е биекция и лемата е доказана, защото

$$|C_{k,0}| + |C_{k,1}| + \cdots + |C_{k,p-1}| = \binom{p}{k}.$$

Нека сега $A \in U_p$ и $X = A \cap \{1, 2, \ldots, p\}$, $Y = A \cap \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$. Тогава $A = X \cup Y$, т.е. ако $|X| = k$, то $|Y| = p - k$. Нека $p - 1 \geq k \geq 1$. Ясно е,че за дадено множество Y съществува съответно r такова, че $X \in C_{k,r}$. Тъй като Y-ците могат да се избират по $\binom{p}{p-k} = \binom{p}{k}$ начина, то съществуват точно $\frac{1}{p}\binom{p}{k}$ избора за X. При $k = 0$ имаме $A = \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$, а при $k = p$ съответно $A = \{1, 2, \ldots, p\}$ и тези две множества са от C_0. Следователно

$$|C_r| = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}^2 = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2 - 2\right) = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right),$$

като последното равенство е добре известно тъждество за биномните коефициенти. Сега от (1) заключаваме, че $|C_0| = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.

Използване на орбити

Нека $A = X \cup Y$, където X и Y са сеченията на множеството $A \in U_p$ съответно с множествата $\{1, 2, \ldots, p\}$ и $\{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$. Разглеждаме изображението $T : U_p \to U_p$, дефинирано с равенството $T(A) = \{x + 1 | x \in X\} \cup Y$, като отново работим по модул p. Лесно се вижда, че $T(A) = A$ само при $A = \{1, 2, \ldots, p\}$ или $A = \{p+1, p+2, \ldots, 2p\}$. Да предположим, че $T(A) \neq A$. Разглеждаме орбитите на A относно T, т.е. редицата $A, T(A), T^2(A), \ldots, T^{p-1}(A)$, където $T^2(A) = T(T(a))$ и т.н. Тъй като $T(A) \neq A$, то $|X| = k$, където $1 \leq k \leq p - 1$. Освен това е ясно, че $\sigma(T^j(A)) = r + jk$. Но числата $r, r+k, \ldots, r+(p-1)k$ дават различни остатъци по модул p и следователно множествата $A, T(A), \ldots, T^{p-1}(A)$ са различни и всяко от тях принадлежи на точно един от класовете $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$. Освен това всяко A с $T(A) \neq A$ принадлежи на точно една орбита на T, т.е. съществуват точно $\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right)$ такива орбити. Това показва, че $|C_1| = |C_2| = \cdots = |C_{p-1}| = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right)$ и използвайки (1), намираме $|C_0|$.

Решението на Николай Николов

Идеята на Николай е съвършенно различна от изложените две чисто комбинаторни решения и свежда задачата до стандартни алгебрични пресмятания. За целта той въвежда комплексното число $\omega = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ и полинома $t(x) = (x - \omega)(x - \omega^2)\ldots(x - \omega^{2p})$. Тъй като $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}$ са всички корени на полинома $x^p - 1$ и $\omega^a = \omega^b$ при $a \equiv b (\mathrm{mod}\, p)$, то

$$t(x) = \left((x-1)(x-\omega)\ldots(x-\omega^{p-1})\right)^2 = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1.$$

От друга страна от формулите на Виет за коефициента пред x^p получаваме

$$-2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq 2p} (-1)^p \omega^{i_1}\omega^{i_2}\ldots\omega^{i_p}$$

Тъй като p е нечетно число и горната сума е взета по всички p-елементни подмножества $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ на $\{1, 2, \ldots, 2p\}$, следва, че равенството може да се запише във

вида

$$S = \sum_{A \in U_p} \omega^{\sigma(A)} = 2,$$

като броят на събираемите в S е точно $\binom{2p}{p}$. Нека $A \in C_r$, т.е. $\sigma(A) \equiv r (\mathrm{mod}\, p)$. Тогава $\omega^{\sigma(A)} = \omega^r$ и броят на събираемите в S, които са равни на ω^r, е $a_r = |C_r|$, $r = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Следователно горното равенство може да се запише във вида

$$(a_0 - 2)\omega^0 + a_1\omega^1 + \cdots + a_{p-1}\omega^{p-1} = 0. \tag{3}$$

Решителна по-нататък се оказва следната

Лема. Нека $b_o, b_1, \ldots, b_{p-1}$ са цели числа, за които $\sum_{i=0}^{p-1} b_i\omega^i = 0$. Тогава $b_0 = b_1 = \cdots = b_{p-1}$.

Доказателство. За доказателството на този резултат Николай използва (и доказва) добре известния факт, че ако p е просто число, то полиномът $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ не може да се представи като произведение на два неконстантни полинома с рационални коефициенти. (За любознателните читатели ще отбележим, че неразложимостта на $f(x)$ следва лесно от известния критерий на Айзенщайн).

Нека $h(x)$ е следният полином

$$h(x) = \sum_{i=0}^{p-1} b_i x^i.$$

От условието на лемата имаме, че $h(\omega) = 0$. Тъй като $f(\omega) = \dfrac{\omega^p - 1}{\omega - 1} = 0$, следва, че полиномите $f(x)$ и $h(x)$ не са взаимно-прости. Нека $g(x)$ е техният най-голям общ делител. Тогава $g(x)$ е полином с рационални коефициенти (това следва от алгоритъма на Евклид за полиноми), като степента му е поне 1. Тъй като $g(x)$ дели $f(x)$, от неразложимостта на $f(x)$ следва, че $g(x) = c.f(x)$, където c е рационално число. Но $g(x)$ дели $h(x)$, т.е. $f(x)$ също дели $h(x)$ и понеже степента на $h(x)$ не надминава $p-1$, заключаваме, че $h(x) = b.f(x)$, където b е константа. След сравняване на коефициентите в двете страни на това равенство получаваме, че $b_0 = b_1 = \cdots = b_{p-1} = b$.

Сега да се върнем към равенството (3). От лемата следва, че $a_0 - 2 = a_1 = \cdots = a_{p-1}$ и тъй като $a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} = \binom{2p}{p}$ (равенство (1)), лесно намираме, че $a_0 = |C_0| = \dfrac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.

Накрая ще отбележим, че решението на Николай Николов по същество е един изящен алгебричен метод, който може да се използва за решаване и на други, доста по-общи комбинаторни задачи.

В този брой ви предлагаме всички задачи от материалите на журито на МОМ'95, които не бяха включени в състезателната тема. Опитайте се да ги решите самостоятелно, а ако някои ви затруднят, пишете ни, за да ви изпратим техните решения. Очакваме вашите писма с коментари, решения и обобщения. Най-интересните от тях ще бъдат публикувани на страниците на списанието.

Алгебра

Задача 1. Нека $a \geq 0$, $b \geq 0$ и c са цели числа. Да се докаже, че съществува естествено число n и цели числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ такива, че

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c$$

(Швеция)

Задача 2. Нека $n \geq 3$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са реални числа, за които $2 \leq a_i \leq 3$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ако $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, да се докаже, че

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}{a_1 + a_2 - a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_4^2}{a_2 + a_3 - a_4} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2 - a_2^2}{a_n + a_1 - a_2} \leq 2S - 2n.$$

(Украйна)

Задача 3. Нека a, b и c са дадени положителни реални числа. Да се намерят всички положителни реални числа x, y и z, за които $x + y + z = a + b + c$ и $4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc$.

(САЩ)

Задача 4. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Съществува ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, изпълняваща следните три условия:

(а) съществува положително число M такова, че $-M \leq f(x) \leq M$ за всяко $x \in \mathbb{R}$;

(б) $f(1) = 1$;

(в) ако $x \neq 0$, то $f(x + \frac{1}{x}) = f(x) + \left(f(\frac{1}{x})\right)^2$?

(Украйна)

Задача 5. Нека $n \geq 3$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са реални числа, такива че $x_i < x_{i+1}$ при $1 \leq i \leq n-1$. Да се докаже, че

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j > \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n} (j-1)x_j\right).$$

(Япония)

Геометрия

Задача 6. Да се докаже, че в равнината на $\triangle ABC$ съществува единствена точка X, за която $XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2$.

(Германия)

Задача 7. Нека D, E и F са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страните BC, CA и AB и нека X е вътрешна точка за $\triangle ABC$ такава, че вписаната в $\triangle XBC$ окръжност се допира до BC, CX и XB в точките D, Y и Z. Да се докаже, че $EFZY$ е вписан четириъгълник.

(Турция)

Задача 8. Върху страните BC, CA и AB на остроъгълен $\triangle ABC$ са взети съответно точки A_1 и A_2 (A_2 е между A_1 и C), B_1 и B_2 (B_2 е между B_1 и A) и C_1 и C_2 (C_2 е между C_1 и B) така, че $\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle AA_2A_1 = \sphericalangle BB_1B_2 = \sphericalangle BB_2B_1 = \sphericalangle CC_1C_2 = \sphericalangle CC_2C_1$. Да се докаже, че шестте върха на триъгълниците, определени съответно от правите AA_1, BB_1, CC_1 и AA_2, BB_2, CC_2, лежат на една окръжност.

(Украйна)

Задача 9. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е тетраедър с центроид G и A_1', A_2', A_3', A_4' са пресечните точки на правите GA_1, GA_2, GA_3 и GA_4 с описаната сфера около $A_1A_2A_3A_4$. Да се докаже, че

$$GA_1.GA_2.GA_3.GA_4 \leq GA_1'.GA_2'.GA_3'.GA_4'$$

и

$$\frac{1}{GA_1'}+\frac{1}{GA_2'}+\frac{1}{GA_3'}+\frac{1}{GA_4'} \le \frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GA_3}+\frac{1}{GA_4}.$$

(САЩ)

Задача 10. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник с лице S и K, L, M, N са съответно вътрешни точки за страните AB, BC, CD, DA, за които съществува точка във вътрешността на $ABCD$, за която $OKBL$ и $OMDN$ са успоредници. Да се докаже, че ако S_1 и S_2 са съответно лицата на четириъгълниците $ONAK$ и $OLCM$, то $\sqrt{S} \ge \sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$.

(Латвия)

Задача 11. Окръжност през върховете B и C на $\triangle ABC$ пресича страните AB и AC в точките C' и B'. Да се докаже, че ако H и H' са ортоцентровете на триъгълниците ABC и $AB'C'$, то правите BB', CC' и HH' се пресичат в една точка.

(Колумбия)

Теория на числата и Комбинаторика

Задача 12. Нека k е естествено число. Да се докаже, че съществуват безбройно много точни квадрати от вида $n.2^k-7$, където n е естествено число.

(Румъния)

Задача 13. Нека $\mathbf{Z}$ е множеството на целите числа. Да се докаже, че за произволни цели числа A и B съществува цяло число C, за което множествата $M_1 = \{x^2+Ax+B | x \in \mathbf{Z}\}$ и $M_2 = \{2x^2+x+C | x \in \mathbf{Z}\}$ не се пресичат.

(Румъния)

Задача 14. Да се намерят всички естествени числа x и y, за които $x+y^2+z^3 = xyz$, където z е най-големият общ делител на x и y

(България)

Задача 15. На едно парти присъстват $12k$ души, като всеки разменя поздрави с точно $3k+6$ от останалите. За всеки двама присъстващи броят на тези, които разменят поздрави, е един и същ. Колко души присъстват на това парти?

(Ирландия)

Задача 16. Съществува ли естествено число $n > 1$ за което множеството на естествените числа може да се разбие на n непразни подмножества така, че сумата на всеки $n-1$ числа, взети от $n-1$ от тези множества, да принадлежи на останалото множество?

(Беларус)

Задача 17. Нека p е нечетно просто число. Да се намерят естествени числа x и y, за които $x \le y$ и числото $\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{y}$ е неотрицателно и възможно най-малко.

(Германия)

Редици

Задача 18. Съществува ли редица $F(1), F(2), F(3), \ldots$ от неотрицателни цели числа, изпълняваща следните условия:

(а) всяко от числата $0, 1, 2, \ldots$ се съдържа в редицата;

(б) всяко естествено число участва безбройно много пъти в редицата;

(в) за всяко $n \ge 2$, $F(F(n^{163})) = F(F(n)) + F(F(361))$?

(Украйна)

Задача 19. За произволно естествено число $x \ge 2$ нека $p(x)$ е най-малкото просто число, което не дели x и $p(1) = 2$. Ако $p(x) \ge 3$, означаваме с $q(x)$ произведението на всички прости числа по-малки от $p(x)$, а ако $p(x) = 2$, дефинираме $q(x) = 1$. Разглеждаме редицата $x_0, x_1, x_2, \ldots$, за която $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$ при $n \ge 0$. Да се намерят всички n, за които $x_n = 1995$.

(Полша)

Задача 20. Нека $x_1, x_2, x_3, \ldots$ са положителни реални числа, за които

$$x_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_n^j$$

при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Да се докаже, че за всяко n

$$2-\frac{1}{2^{n-1}} \le x_n < 2-\frac{1}{2^n}.$$

(Нова Зеландия)

Задача 21. За всяко естествено число n дефинираме индуктивно $f(n)$ по следния начин: $f(1) = 1$ и $f(n+1)$ е най-голямото цяло число m такова, че съществува аритметична прогресия от естествени числа $a_1 < a_2 < \cdots < a_m = n$ и $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_m)$. Да се докаже, че съществуват естествени числа a и b такива, че $f(an+b) = n+2$ за всяко n.

(Финландия)

Задача 22. Нека $\mathbf{N}$ е множеството на естествените числа. Да се докаже, че съществува единствена функция $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такава, че $f(m+f(n)) = n+f(m+95)$ за всяко $n, m \in \mathbf{N}$. Да се намери $f(1)+f(2)+\cdots+f(19)$.

(Индия)

ОБОБЩЕНИЕ НА ЕДНА ЗАДАЧА НА КИРИЛ ДОЧЕВ

Хаим Хаимов, Варна

Оправдан интерес в научното творчество на българския математик Кирил Дочев (1930–1976) представляват някои резултати от областта на елементарната геометрия, получени от него по времето, когато той ръководеше подготовката на проекто-отборите ни за международните олимпиади. В преобладаващата си част тези резултати са публикувани под формата на задачи, блестящи със своето остроумие.

Една от тези задачи ще бъде обект на разглеждане и обобщение в настоящата статия. В нея се съдържа открита от Кирил Дочев интересна зависимост между лица в шестоъгълника. Задачата бе вече веднъж обобщавана в определена посока в работата [1] на Светослав Билчев.

Задача (Кирил Дочев). Нека изпъкналият шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ има лице S и точките P_1, P_2 и P_3 са съответните среди на диагоналите му A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6. Ако S_1 е лицето на триъгълника $P_1P_2P_3$, а S_2 – лицето на шестоъгълника с върхове средите на страните на дадения шестоъгълник, да се докаже, че $S_1 + S_2 = \frac{3}{4}S$ (фиг. 1).

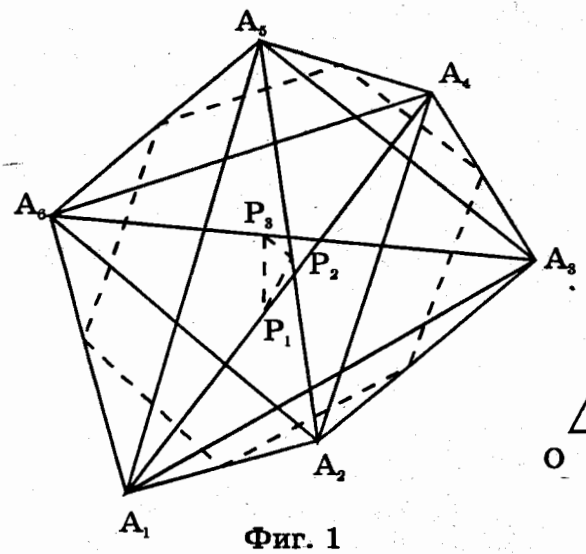
Тук и по-нататък под лице на изпъкнал многоъгълник $A_1A_2\ldots A_n$, ако не е казано противното, ще разбираме ориентираното му лице, т.е. лицето му, взето със знак плюс или минус според това дали обходът на многоъгълника по затворената начупена линия $A_1A_2\ldots A_nA_1$ става в положителна или отрицателна посока

Ще обобщим зависимостта от задачата на Кирил Дочев от шестоъгълник за многоъгълник с произволен брой страни. За целта предварително ще извършим една проста класификация на диагоналите в многоъгълника.

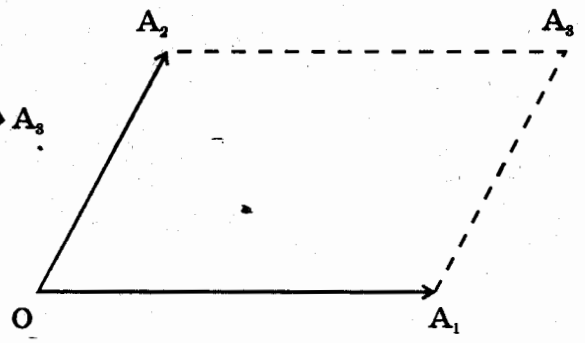
Да разгледаме диагоналите на произволен шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (фиг. 1). Диагоналите $A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_1, A_6A_2$ свързват върхове на шестоъгълника, взети през един. Ще ги наричаме *диагонали от първи клас* или просто 1-*диагонали* на шестоъгълника. Диагоналите A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, които свързват върховете на шестоъгълника, взети през два, ще наричаме негови 2-*диагонали*. За удобство страните на шестоъгълника ще наричаме негови *нула-диагонали*.

Аналогична класификация ще направим и по отношение на диагоналите на многоъгълник с произволен брой страни. Диагоналите, свързващи върхове на

многоъгълника, взети през k върха, ще наричаме негови *k-диагонали*; тук $k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, където n е броят на страните на многоъгълника.



Фиг. 1



Фиг. 2

Средите на k-диагоналите на произволен многоъгълник са върхове на нов многоъгълник. Ще го наричаме *$(k+1)$-ви среден многоъгълник* на изходния. Ще разглеждаме само такива многоъгълници, които са изпъкнали заедно с всички свои средни многоъгълници. Ориентираното лице на изходния многоъгълник ще бележим с S, а ориентираното лице на k-тия среден многоъгълник – с S_k, $k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

В новите означения зависимостта от задачата на Кирил Дочев ще се запише така: $S_1 + S_3 = \frac{3}{4}S$. Сега е лесно да я обобщим за произволен многоъгълник с четен брой страни.

Теорема 1. Сумата от лицата на средните многоъгълници с нечетни номера на многоъгълника $A_1A_2 \ldots A_{2m}$, е равна на $\frac{m}{4}S$, където S е лицето на $A_1A_2 \ldots A_{2m}$.

Преди да докажем теоремата, ще се спрем накратко на някои свойства на понятието псевдоскаларно произведение, които ще използваме при доказателствата.

Нека $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ са два неколинеарни вектора в равнината с общо начало (фиг. 2). Псевдоскаларно произведение $\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2}$ на тези вектори се нарича ориентираното лице на успоредника $OA_1A_3A_2$. Ако векторите $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ са колинеарни, по дефиниция се счита, че $\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} = 0$.

Лесно се извеждат следните три основни свойства на псевдоскаларното произведение:

а) $\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} = -\overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{OA_1}$;

б) $(\lambda\overrightarrow{OA_1}) \wedge \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} \wedge (\lambda\overrightarrow{OA_2}) = \lambda(\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2})$,

където λ е произволно реално число;

в) $\overrightarrow{OA_1} \wedge (\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}) = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_3}$,

където $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ са три произволни вектора с общо начало.

С помощта на псевдоскаларното произведение получаваме следното представяне на ориентираното лице на произволен триъгълник:

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{OA_2}). \tag{1}$$

Ще намерим подобно представяне за ориентираното лице на произволен изпъкнал многоъгълник.

Нека O е произволна вътрешна точка за изпъкналия многоъгълник $A_1A_2\dots A_n$. Сумирайки ориентираните лица на еднакво ориентираните с $A_1A_2\dots A_n$ триъгълници $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_nA_1$, за ориентираното лице S на многоъгълника $A_1A_2\dots A_n$ получаваме:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_{OA_iA_{i+1}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}}. \tag{2}$$

Тук и по-нататък, номерирането на върховете на многоъгълника ще извършваме циклично, т.е. ще считаме, че $A_{n+1} \equiv A_1, A_{n+2} \equiv A_2, \dots, A_{n+i} \equiv A_i, \dots$.

Лесно се доказва, че формулата (2) остава вярна и когато O е произволна, не обезателно вътрешна за многоъгълника $A_1A_2\dots A_n$ точка от равнината му.

Нека сега $A_1A_2\dots A_n$ е произволен изпъкнал многоъгълник, всички средни многоъгълници на който са също изпъкнали. Средата на $(k-1)$-диагонала му A_iA_{i+k} да означим с E_i^k $(i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right])$. Тогава k-ият среден многоъгълник на $A_1A_2\dots A_n$ ще е $E_1^kE_2^k\dots E_n^k$. (Да отбележим, че при $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ в случая на четно n в последното означение имаме особеност. Ще я разгледаме по-долу.)

С помощта на формула (2) лицето S_k на многоъгълника $E_1^kE_2^k\dots E_n^k$ се представя във вида:

$$S_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OE_i}^k \wedge \overrightarrow{OE}_{i+1}^k, \tag{3}$$

като $k \neq \left[\frac{n}{2}\right]$ при четно n, а O е произволна точка в равнината.

Като вземем предвид, че $\overrightarrow{OE_i}^k = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+k}})$, $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$, с помощта на свойства б) и в) на псевдоскаларното произведение, от (3) получаваме

$$S_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_{i+k}}) \wedge \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_{i+1}} + \overrightarrow{OA_{i+k+1}}\right) =$$

$$\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_{i+k}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+k+1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+k+1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_{i+k}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

Но според (2):

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}} = 2S.$$

Освен това от (2) следва, че:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_{i+k}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+k+1}} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{OA_j} \wedge \overrightarrow{OA_{j+1}} = 2S.$$

Тогава

$$S_k = \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+k+1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_{i+k}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}}. \tag{4}$$

Да изясним сега споменатата по-горе особеност в случая $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ при четно n. Нека $n = 2m$ $(m \geq 2)$. Тогава $k = m$. Означението на m-ия среден многоъгълник можем да запишем така: $E_1^m E_2^m \dots E_m^m E_{m+1}^m \dots E_{2m}^m$. Върхът E_i^m е среда на диагонала $A_i A_{i+m}$. Но понеже $A_{j+2m} \equiv A_j$, както следва от цикличното номериране на върховете на многоъгълника $A_1 A_2 \dots A_{2m}$, то $A_{m+j} A_{(m+j)+m} \equiv A_{m+j} A_{j+2m} \equiv A_{m+j} A_j \equiv A_j A_{j+m}$. Следователно $E_{m+j}^m \equiv E_j^m$, $j = 1, 2, \dots, m$. Виждаме, че в означението $E_1^m E_2^m \dots E_m^m E_{m+1}^m \dots E_{2m}^m$ върховете $E_{m+1}^m, \dots, E_{2m}^m$ повтарят върховете $E_1^m, \dots, E_m^m$ в същия им ред. Опирайки се на начина, по който изведохме формула (2), можем да направим извод, че в разглеждания случай дясната страна на формула (3) ще даде не лицето S_m на многоъгълника $E_1^m E_2^m \dots E_m^m E_{m+1}^m \dots E_{2m}^m$, а удвоеното му лице $2S_m$. Същото естествено важи и за непосредствено следващата от (3) формула (4). Ето защо при $n = 2m$ и $k = m$ вместо формула (4) ще имаме:

$$2S_m = \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+m+1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_{i+m}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}}.$$

Като използваме, че $A_{i+1} \equiv A_{i+2m+1}$ (поради цикличното номериране), последното равенство можем да опростим по следния начин:

$$S_m = \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+m+1}} \tag{5}$$

В случаите $k = 1$ и $k = 2$ формула (4) също се опростява, както следва:

$$S_1 = \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+2}} \tag{6}$$

$$S_2 = \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+3}}. \tag{7}$$

Сега вече можем да пристъпим към доказателството на Теорема 1. За определеност ще предполагаме, че $m = 2p + 1$. В съответствие с формули (4) – (7), за лицата на средните многоъгълници с нечетни номера на изходния многоъгълник $A_1 A_2 \dots A_{2m}$ получаваме:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+2}} \\
S_3 &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+4}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_{i+3}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
S_{m-2} &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+m-1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_{i+m-2}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}} \\
S_m &= \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m}\overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+m+1}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Тогава при почленно събиране на равенства (8) събираемите във втората и третата колонка взаимно ще се унищожат. Ще получим:

$$S_1 + S_3 + \cdots + S_{m-2} + S_m = \frac{m}{4}S,$$

което и трябваше да докажем. Случаят $m = 2p$ се разглежда аналогично.

Доказаната теорема показва, че в многоъгълник с четен брой страни сумата от лицата на средните многоъгълници с нечетни номера съставлява строго определена част от лицето S на изходния многоъгълник. Както ще видим сега, подобен факт е в сила и за сумата от лицата на средните многоъгълници с четни номера.

Теорема 2. Сумата от лицата на средните многоъгълници с четни номера на многоъгълника $A_1A_2\ldots A_{2m}$ е равна на $\frac{m-2}{4}S$, където S е лицето на $A_1A_2\ldots A_{2m}$.

Доказателство: За определеност ще предполагаме, че $m = 2p+1$. В съответствие с формули (4) – (7), за лицата на средните многоъгълници на $A_1A_2\ldots A_{2m}$ с четни номера имаме:

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+3}} \\
S_4 &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+5}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m} \overrightarrow{OA_{i+4}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}} \qquad (9) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{m-1} &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+m}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m} \overrightarrow{OA_{i+m-1}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}}.
\end{aligned}$$

При почленно събиране на равенствата (9) събираемите във втората колонка, без последното, ще се унищожат взаимно със събираемите от третата колонка. Освен това последното събираемо във втората колонка е равно на нула. Ето защо:

$$S_2 + S_4 + \cdots + S_{m-1} = \frac{m-2}{4}S,$$

което и трябваше да докажем. Случаят $m = 2p$ се разглежда аналогично.

От Теорема 1 и Теорема 2 получаваме следното

Следствие. Сумата от лицата на всички средни многоъгълници на многоъгълника $A_1A_2\ldots A_{2m}$ е равна на $\frac{m-1}{2}S$, където S е лицето на $A_1A_2\ldots A_{2m}$.

Както ще видим, за многоъгълник с нечетен брой страни също е в сила подобно твърдение.

Теорема 3. Сумата от лицата на всички средни многоъгълници на многоъгълника $A_1A_2\ldots A_{2m+1}$ е равна на $\frac{2m-1}{4}S$, където S е лицето на $A_1A_2\ldots A_{2m+1}$.

Доказателство: В съответствие с формули (4) – (7), за лицето на средните многоъгълници на многоъгълника $A_1A_2\ldots A_{2m+1}$ имаме:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m+1} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+2}} \\
S_2 &= \frac{1}{4}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m+1} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+3}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_m &= \frac{1}{2}S + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m+1} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{OA_{i+m+1}} + \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{2m+1} \overrightarrow{OA_{i+m}} \wedge \overrightarrow{OA_{i+1}}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Тогава при почленно събиране на равенства (10), събираемите във втората колонка, без последните две, ще се унищожат взаимно със събираемите от третата колонка. Освен това, сборът от последните две събираеми от втората колонка е равен на нула. Ето защо:

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_m = \frac{2m-1}{4}S,$$

които и трябваше да докажем.

В заключение предлагаме на читателя две задачи за упражнение

Задача 1. Правилен осмоъгълник има лице S. Лицето на осмоъгълника с върхове средите на страните му е S_1, а лицето на осмоъгълника с върхове средите на средните му по големина диагонали е S_2. Да се докаже, че $S_1 + S_2 = S$. Уточнете и докажете твърдението, ако осмоъгълникът не е правилен.

Задача 2. Правилен седмоъгълник има лице S. Лицето на седмоъгълника с върхове средите на страните му е S_1, а лицата на седмоъгълниците с върхове средите съответно на малките и на големите му диагонали са S_2 и S_3. Да се докаже, че $S_1 + S_2 + S_3 = \frac{5}{4}S$. Формулирайте и докажете твърдението за произволен седмоъгълник!

Литература

[1] Св. Билчев. Математика и математическо образование, София, 1983, 10-31.

Не забравяйте да се абонирате за списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС !

НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

за постъпване в осми клас на НПМГ през учебната 1995/96 год.

ТЕМА за всички профили, 2 юли 1995 год.

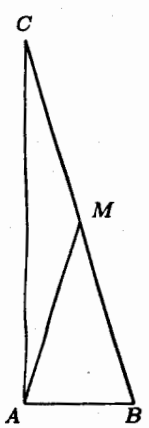
Задача 1. Външните ъгли при върховете A, B и C на ΔABC се отнасят както 6:7:11. Точка M е среда на страната BC.

а) Да се докаже, че ΔABC е правоъгълен.

б) Да се намерят градусните мерки на $\sphericalangle BAM$ и $\sphericalangle CMA$.

в) Да се докаже, че $\frac{AC}{2} < AM < AC$ и $AM < \frac{AB+AC}{2}$.

Решение. а) Да означим големината на външния ъгъл при върха A с $6x$. Тогава от условието следва, че външните ъгли при върховете B и C са равни съответно на $7x$ и $11x$. Тъй като вътрешните ъгли на ΔABC са равни на $180° - 6x$, $180° - 7x$ и $180° - 11x$, то $(180° - 6x) + (180° - 7x) + (180° - 11x) = 180°$, т. е. $360° = 24x$. Следователно $x = \frac{360°}{24} = 15°$. Тогава $\sphericalangle A = 180° - 6.15° = 90°$, $\sphericalangle B = 180° - 7.15° = 180° - 105° = 75°$, $\sphericalangle C = 180° - 11.15° = 180° - 165° = 15°$.



Черт. 1

б) Тъй като AM е медиана в правоъгълния триъгълник ABC, то $AM = \frac{1}{2}BC = BM = CM$, т. е. ΔAMB е равнобедрен и $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MBA = 75°$ (черт. 1).

$\sphericalangle CMA = \sphericalangle MAB + \sphericalangle ABM = 2.75° = 150°$ (външен ъгъл за триъгълник AMB).

в) Като приложим теоремата за неравенство на страните в триъгълник за ΔAMC, получаваме $AM + MC > AC$ и тъй като $MC = AM$, то $2AM > AC$, т. е. $\frac{AC}{2} < AM$. От друга страна, $\sphericalangle AMC > \sphericalangle ACM$ (големините на тези ъгли изчислихме в точки а) и б)). Тъй като срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна, то $AC > AM$. С това са доказани неравенствата $\frac{AC}{2} < AM < AC$. А от триъгълника ABC следва, че $BC < AB + AC$. Тъй като хипотенузата е два пъти по-голяма от медианата към нея, $BC = 2AM$. Така получаваме, че $AM < \frac{AB+AC}{2}$.

Задача 2. Нека $f(x) = (x-a)^2 + x^2 - a^2$ и $g(x) = (x+a)^3 - (x^3 + a^3)$.

а) Да се разложат $f(x)$ и $g(x)$ на множители.

б) Да се реши уравнението $f(x) = g(x)$.

в) Ако $a = 1$, да се начертаят графиките на функциите $h(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{3}g(x)$, където $x \in \{-1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 2\}$ и $t(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{3}g(x)$, където $x \in [-1, 2]$. Минава ли графиката на $t(x)$ през началото на координатната система?

Решение. а) $f(x) = (x-a)^2 + (x-a)(x+a) = (x-a)(x-a+x+a) = 2x(x-a)$, $g(x) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 - x^3 - a^3 = 3ax^2 + 3a^2x = 3ax(x+a)$.

б) За уравнението $f(x) = g(x)$ след преобразуванията в точка а) получаваме $2x(x-a) = 3ax(x+a) \iff 2x(x-a) - 3ax(x+a) = 0$. Отново разлагаме на множители: $x[2(x-a) - 3a(x+a)] = 0 \iff x(2x - 2a - 3ax - 3a^2) = 0$. Приравняваме двата множителя на нула. Получаваме две уравнения: $x = 0$ и $2x - 2a - 3ax - 3a^2 = 0$. От първото уравнение се вижда, че за всяко a числото $x_1 = 0$ е решение на даденото уравнение. Привеждаме второто уравнение в нормален вид

$$(2 - 3a)x = 2a + 3a^2. \tag{1}$$

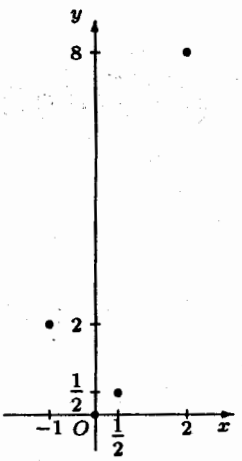
Разглеждаме два случая:

I случай. $2 - 3a = 0$, т.е. $a = \frac{2}{3}$. Тъй като дясната страна на (1) е равна в този случай на $\frac{8}{3} \neq 0$, то това уравнение няма решение.

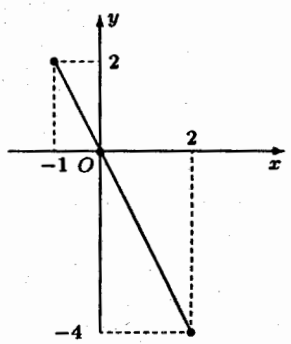
II случай. $2 - 3a \neq 0$, т. е. $a \neq \frac{2}{3}$. Тогава уравнението (1) има едно решение $x_2 = \dfrac{2a + 3a^2}{2 - 3a}$.

Забележка. При $a = 0$ и $a = -\frac{2}{3}$ корените x_1 и x_2 са равни.

в) При $a = 1$ имаме $h(x) = \dfrac{2x(x-1)}{2} + \dfrac{3x(x+1)}{3} = x^2 - x + x^2 + x = 2x^2$. Ако $x \in \{-1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 2\}$ **графиката се състои само от четири точки с координати:** $(-1;2)$, $(0;0)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и $(2,8)$ (черт. 2)



Черт. 2



Черт. 3

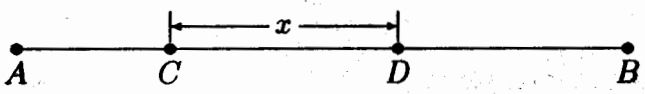
За функцията $t(x)$ имаме $t(x) = \dfrac{2}{2}x(x-1) - \dfrac{3x(x+1)}{3} = x^2 - x - x^2 - x = -2x$. Това е линейна функция и понеже дефиниционната ѝ област е интервал, то графиката на $t(x)$ е **отсечка**. Тъй като $t(0) = 0$ **и точката 0 принадлежи на дефиниционния интервал**, то графиката на $t(x)$ минава през началото на координатната система (черт. 3).

Задача 3. От град A за град B тръгнал автобус със скорост 50 km/h. След 12 min от тръгването си той срещнал лека кола, идваща от град B със скорост 60 km/h. Леката кола пристигнала в град A и след престой от 4 min тръгнала обратно към B. На 54 km от B тя настигнала автобуса.

а) Да се намери разстоянието от A до B.

б) Ако след настигането леката кола увеличи скоростта си с 35%, а автобусът увеличи скоростта си с 4 km/h, колко минути по-рано от автобуса ще пристигне леката кола в B?

Решение. а) Нека леката кола среща автобуса в точка C, а го настига в D.



За 12 min автобусът ще измине $\frac{50.12}{60} = 10$ km, т.е. $AC = 10$ km. Да означим CD с x. Времето, за което леката кола изминава пътя от C до A и от A до D, е $\frac{10}{60} + \frac{10+x}{60}$, а времето, за което автобусът пътува от C до D, е $\frac{x}{50}$. Тогава $\frac{10}{60} + \frac{10+x}{60} + \frac{4}{60} = \frac{x}{50}$, откъдето намираме, че $5(20+x+4) = 6x$, т.е. $5x + 5 \cdot 24 = 6x$ и $x = 120$ km. И така, разстоянието от A до B е 184 km.

б) От D до B автобусът ще се движи с 54 km/h и ще измине разстоянието за 60 min. Леката кола ще се движи със скорост $60 + \frac{35}{100} \cdot 60 = 81$ km/h и ще измине 54 km за $\frac{54}{81} \cdot 60 = 40$ минути. Следователно леката кола пристига в B 20 минути преди автобуса.

ТЕМА за профил МАТЕМАТИКА, 11 юли 1995 год.

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{7-3x}{2}\right) - \frac{3+x}{2}$.

а) Да се реши неравенството $f(x) < 1$.

б) Да се реши неравенството $-12af(x) - 5x + 10 < 0$, където a е параметър.

в) Да се докаже, че неравенствата $f(x) < 1$ и $-12af(x) - 5x + 10 < 0$ не са еквивалентни за никоя стойност на параметъра a.

г) Да се реши уравнението $3|f(x)| - 2|3x-1| + 1 = 0$.

Решение. Извършваме следните преобразувания: $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{7-3x}{2}\right) - \frac{3+x}{2} = \frac{1}{6} + \frac{7-3x}{4} - \frac{3+x}{2} = = \frac{1}{12}[2 + 3(7-3x) - 6(3+x)] = \frac{1}{12}(2 + 21 - 9x - 18 - 6x) = \frac{1}{12}(5 - 15x)$.

а) Неравенството е $\frac{1}{12}(5-15x) < 1$. Извършваме еквивалентни преобразувания: $\frac{1}{12}(5-15x) < 1 \iff 5 - 15x < 12 \iff -15x < 7 \iff x > -\frac{7}{15}$.

б) Неравенството е $-12a.\frac{1}{12}(5-15x) - 5x + 10 < 0$. След еквивалентни преобразувания получаваме: $-12a.\frac{1}{12}(5-15x) - 5x + 10 < 0 \iff a(15x-5) - 5x + 10 < 0 \iff 15ax - 5a - 5x + 10 < 0 \iff 5(3a-1)x < 5(a-2) \iff (3a-1)x < a - 2$.

I случай: $a = \frac{1}{3}$. Неравенството е $0x < \frac{1}{3} - 2$. Тъй като от дясната страна стои отрицателно число, то това неравенство няма решение.

II случай: $a < \frac{1}{3}$. Тогава числото $(3a - 1)$ е отрицателно и следователно решенията на неравенството са всички числа x, за които $x > \frac{a-2}{3a-1}$.

III случай: $a > \frac{1}{3}$. Тъй като числото $(3a - 1)$ е положително, решенията на неравенството са всички числа x, за които $x < \frac{a-2}{3a-1}$.

в) От решенията, които получихме в т. а) и б), става ясно, че двете неравенства могат да бъдат еквивалентни (т. е. да имат едни и същи решения $x > -\frac{7}{15}$) само ако $\frac{a-2}{3a-1} = \frac{-7}{15}$ и $a < \frac{1}{3}$. От първото условие получаваме: $\frac{a-2}{3a-1} = -\frac{7}{15} \iff 15a - 30 = -21a + 7 \iff 36a = 37 \iff \frac{37}{36}$. Тъй като $\frac{37}{36} > \frac{1}{3}$, второто условие не е изпълнено и следователно за никоя стойност на параметъра a уравненията не са еквивалентни.

г) В уравнението $3|f(x)| - 2|3x - 1| + 1 = 0$ заместваме $f(x) = \frac{5}{12}(1 - 3x)$ и преобразуваме получения израз, като използваме, че $|1 - 3x| = |3x - 1|$: $\frac{5}{4}|1 - 3x| - 2|3x - 1| + 1 = 0 \iff (\frac{5}{4} - 2)|3x - 1| = -1 \iff -\frac{3}{4}|3x - 1| = -1 \iff |3x - 1| = \frac{4}{3}$.

Възможни са два случая:

а) $3x - 1 = \frac{4}{3} \iff 3x = \frac{7}{3} \iff x = \frac{7}{9}$

б) $3x - 1 = -\frac{4}{3} \iff 3x = -\frac{1}{3} \iff x = -\frac{1}{9}$.

Следователно уравнението има две решения: $x_1 = \frac{7}{9}$ и $x_2 = -\frac{1}{9}$.

Задача 2. Една цистерна с минерална вода разпределили в две детски градини.

а) В първата детска градина напълнили няколко бидона от 40 l и два пъти повече бидони от 20 l. Същото количество вода би могло да се напълни в няколко бидона от 20 l и два пъти повече бидони от 40 l и тогава общия брой на бидоните ще бъде с 3 по-малък, отколкото в действителност са напълнили.

б) Във втората детска градина напълнили няколко бидона по 30 l, като един от бидоните не е съвсем пълен, а останалите са пълни. Ако същото количество вода за тази детска градина се налее в бидони от 50 l, ще бъдат напълнени изцяло 5 бидона по-малко. По колко литра вода са докарали във всяка детска градина?

Решение. а) Да означим с x броя на бидоните, в които са наляли водата в първата детска градина. Тъй като броя на бидоните от $20l$ се отнася към броя на бидоните от 40 l както 2:1, то $\frac{2}{3}$ от общия брой бидони е от $20l$, а $\frac{1}{3}$ – от 40 l. Тогава общото количество вода, получено в детската градина е $A = \frac{2}{3}x.20 + \frac{1}{3}x40 = \frac{80}{3}x$. С аналогични разсъждения се вижда, че това количество вода е равно на $A = \frac{1}{3}(x-3)20 + \frac{2}{3}(x-3)40 = \frac{100}{3}(x-3)$. Тогава $\frac{80}{3}x = \frac{100}{3}(x-3) \iff 8x = 10(x-3) \iff 2x = 30 \iff x = 15$. В тази детска градина са докарали $A = \frac{80}{3}15 = 400l$ вода.

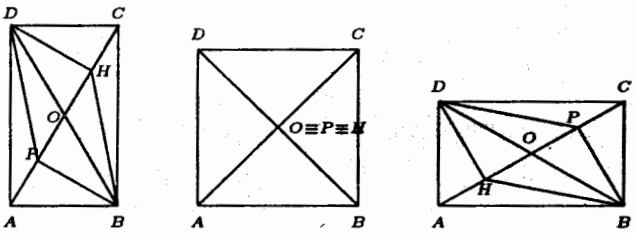
б) Да означим броя на бидоните от 50 l с n. Ясно е, че n е естествено число и че цялото количество вода е $50nl$. Съгласно условието в $n+5$ бидона от $30l$ се събира цялото количество вода, а в $n+4$ бидона то не може да се събере, т.е. $30(n+4) < 50n < 30(n+5) \iff 3n+12 < 5n < 3n+15 \iff \iff 12 < 2n < 15 \iff 6 < n < 7,5$. Единственото естествено число n, което удовлетворява последните неравенства, е числото 7. Бидоните от 50 l са 7. В тази детска градина са докарали $50.7 = 350$ l вода.

Задача 3. В правоъгълника $ABCD$ са построени перпендикуляри BP и DH към AC $(P \in AC,\ H \in AC)$.

а) Да се докаже, че точките B, H, D и P са върхове на успоредник или точките P и H съвпадат.

б) Нека точките P и H делят диагонала AC на три отсечки, една от които е равна на сумата на другите две. Да се изчислят $\sphericalangle DBC$ и $S_{ABCD} : S_{ABH}$.

Решение. Възможни са следните три случая: $AB < BC$, $AB = BC$ и $AB > BC$. Нека O е пресечната точка на диагоналите на правоъгълника $ABCD$. Във втория случай правоъгълникът е квадрат и тогава $P \equiv H \equiv O$.



Да разгледаме първия случай (за третия случай разсъжденията са аналогични).

а) Разглеждаме правоъгълния триъгълник ABC. В този случай P е върху отсечката AO, а H – върху отсечката OC.

Разглеждаме триъгълниците APB и CHD.

1. $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DCH$ – кръстни ъгли при успоредните прави AB и CD;
2. $\sphericalangle APB = \sphericalangle CHD = 90^o$ – по условие;
3. $AB = CD$ – срещуположни страни в правоъгълника $ABCD$.

Съгласно втори признак за еднаквост на триъгълниците следва, че $\Delta APB \cong \Delta CHD$. От тук получаваме, че $AP = CH$. Тъй като $OA = OC = OB = OD$ (диагоналите на правоъгълника са равни и точка O ги разполовява) следва, че $OP = OH$, т. е. O е среда на диагоналите на $BHDP$. Следователно $BHDP$ е успоредник.

б) В точка а) доказахме, че $AP = CH$. Тогава единствената възможност една от отсечките AP, PH и HC да бъде равна на сумата на другите две, е $PH = AP + CH$. Получаваме, че $PH = 2AP = 2CH$. От друга страна $OP = OH$ или $PH = 2OP = 2OH$. От получените равенства следва, че $OP = PA$, т. е. височината BP в триъгълника ABO е и медиана. Това означава, че той е равнобедрен – $AB = BO$. Но $AO = BO$. Така показахме, че ΔABO е равностранен или $\sphericalangle ABO = 60°$. Оттук намираме $\sphericalangle DBC = 90° - \sphericalangle ABO = 30°$.

От докаказаните по- горе равенства $AP = PO = OH = HC$ следва, че $AH = \frac{3}{4}AC$. Тогава $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2.\frac{AC.BP}{2} = AC.BP$ $S_{ABH} = \frac{AH.BP}{2} = \frac{\frac{3}{4}AC.BP}{2} = \frac{3}{8}AC.BP = \frac{3}{8}S_{ABCD}$ От последното равенство следва, че $S_{ABCD} : S_{ABH} = 8 : 3$. Лесно се съобразява, че в третия случай $\sphericalangle DBC = 60°$ и $S_{ABCD} : S_{ABH} = 8 : 1$.

Петър НЕДЕВСКИ, директор на НПМГ

ЛЯТНА ЛАГЕР-ШКОЛА НА ТУРНИРА НА ГРАДОВЕТЕ

н.с. Емил Колев, ИМИ - БАН
Людмила Каменова, ученичка 10 клас - СМГ

Лятната лагер школа на Турнира на градовете представлява неформална среща, на която се канят учениците, победители в Международния турнир на градовете и съпровождащи ги учители. По време на школата организаторите предлагат интересни и трудни теми от задачи, които често са свързани с нерешени математически проблеми. Решаването на тези задачи отнема доста време и изисква значителни интелектуални усилия. Затова то се провежда в свободна форма, като времето за работа е няколко дни и се допускат както индивидуални, така и колективни решения. Журито определя срока за предаване на писмените работи, след което те се проверяват и се оценява степента на „придвижване“ по всяка тема. Това отговаря на една от главните цели на Турнира на градовете, която дава възможност на учениците да решават задачи с изследователски характер.

Домакин на 7-та лятна конференция на Турнира на градовете (31 юли-9 август 1995) беше град Нови Сад, Югославия. Българският отбор беше представен от: Адриана Карагьозова (10 клас, СМГ), Евдокия Николова (10 клас, СМГ), Людмила Каменова (10 клас, СМГ), Ивайло Тодоров (10 клас, Стара Загора) и ръководител н.с. кмн Емил Колев от Института по математика и информатика – БАН. Денят за пристигане беше 31 юли, но поради финансови затруднения нашият отбор пристигна в Нови Сад едва на 2 август. Въпреки че из града бяха разлепени многобройни плакати с емблемата на турнира, дори и в общината не успяха да ни кажат къде се намират участниците в школата. Решихме сами да ги потърсим и сравнително бързо открихме общежитията, където трябваше да се настаним. Битовите условия бяха с висок стандарт. Същия ден получихме и 7-те конкурсни теми, всяка от които започваше със сравнително лесни задачи. Следващите обаче ставаха все по-трудни, а в една от темите дори имаше нерешена задача, която си остана такава и след завършване на състезанието. Предварителните коментарии и разяснения по условията на задачите бяха приключили, а промежутъчният финал – крайният срок за предаване на решенията (написани на руски или английски език) беше на следващия ден. Поради малкото време решихме да работим отборно по задачите, които ни се сториха най-интересни и успяхме да предадем решенията

си навреме. Без да сме съвсем наясно с регламента се постарахме да решим колкото се може повече задачи от всички теми, но впоследствие се оказа, че важен е не броят на решените задачи, а степента на „придвижване“ в една отделна тема. Журито с председател Николай Константинов работеше бързо и квалифицирано. Още на другия ден научихме резултатите – на всички предадени задачи имахме максимална оценка. Бяха представени и решенията на задачите, с които се бяха справили по-голямата част от участниците, след което към всяка тема бяха добавени нови задачи. Този път крайният срок за предаване на решенията беше 7 август. Съсредоточихме вниманието си върху най-интересните теми – конфигурации и пермутации. Това бяха едни от най-трудните теми и въпреки че не успяхме да ги решим изцяло, постигнахме много.

По време на школата бяха организирани и семинари, на които ръководителите на отборите разказаха за математическото образование в своите страни. Оказа се, че различията в тази насока са доста съществени, но радостното за нас беше, че България винаги беше давана за пример и споменавана с уважение – нещо съвсем нормално, предвид успешните участия на нашите отбори на международните олимпиади по математика. По време на школата имахме и други интересни разговори и срещи, на които участниците си разменяха задачи, картички и сувенири. Появи се и сръбска банкнота от 10 милиарда динара (стари и извън обращение, разбира се), с която един от участниците се канеше да купи половината град. Любезните домакини бяха създали прекрасни условия за работа и отдих. Всички желаещи можеха да ползват безплатно плажа на река Дунав, като Българският отбор активно се възползва от предоставената възможност. През последните дни беше организирана екскурзия да Фрушка гòра и до многобройните манастири около Нови Сад. Планиран беше и концерт, но поради войната в Сръбска Крайна той беше отложен. Тържественото закриване на конференцията се състоя на 8 август, когато бяха връчени и наградите. Нашият отбор получи дипломи и награди за работата си по темата за пермутациите.

По-долу предлагаме на читателите на M^+ двете теми, по които работи Българският отбор.

ПЕРМУТАЦИИ

Нека σ и π са пермутации на числата от 1 до n. Интересуваме се от преобразуване на σ в π чрез следната реверсивна операция – избираме сегмент от пермутацията и го записваме в обратен ред. Например, от пермутацията 2546(7139)08 чрез завъртане на сегмента в скобите са получава пермутацията 2546(9317)08. Главният проблем е ефективно да се определи минималният брой на реверсивните операции, необходими за получаване на пермутацията σ от пермутацията π. Нека означим този минимум с $d(\sigma, \pi)$ (това число се нарича реверсивно разстояние между двете пермутации). Тъй като броят на всички пермутации е краен, то съществуват две пермутации с максимално разстояние между тях. Това максимално разстояние се нарича диаметър и се бележи с d_n.

Задача 1. Докажете,че $d(\sigma, \pi) = d(\pi, \sigma)$.

Задача 2. Докажете, че всяка пермутация може да бъде трансформирана в идентитета $(id = (123 \ldots n))$ чрез реверсивни операции.

Задача 3. За дадени пермутации σ и π конструирайте пермутация τ такава, че $d(\sigma, \pi) = d(\tau, id)$.

Тази задача показва, че без ограничение на общността основният проблем може да бъде ограничен до разглеждане на двойките (σ, id). Нека означим $d(\sigma, id) = d(\sigma)$. Числото $d(\sigma)$ се нарича височина на пермутацията σ.

Задача 4. Докажете, че $d(\sigma) \leq n-1$.

Задача 5. Конструирайте пермутация с височина по-голяма от $n/2$.

Задача 6. Да допуснем, че 1 е първи член на една пермутация σ . Вярно ли е, че съществуват $d(\sigma)$ реверсивни операции, преобразуващи σ в id и такива, че във всички междинни пермутации 1 е първи член?

Задача 7. Определете височината на пермутацията $(214365 \ldots 2n(2n-1))$.

Задача 8. Определете височината на пермутацията $(135 \ldots (2n-1)246 \ldots 2n)$.

Задача 9. Определете височината на пермутацията $(31527496 \ldots (2n-3)(2n-6)(2n-1)(2n-4)(2n)(2n-2))$.

Задача 10. Конструирайте пермутация с височина $n-1$ (това е еквивалентно с доказателството на $d_n = n-1$).

КОНФИГУРАЦИИ

В равнината са взети a точки и b прави, такива че през всяка точка минават m прави, а на всяка права лежат n от избраните точки. Такава геометрическа конструкция ще наричаме конфигурация от вида (a, m, b, n).

Задача 1. Докажете,че $a.m = b.n$.

Задача 2. Постройте конфигурация $(6, 2, 4, 3)$.

Задача 3. Докажете, че не може да се построи конфигурация $(12, 4, 12, 4)$.

Нека изберем 6 точки $A_1, A_2, \ldots, A_6$ върху окръжност и да означим с B_1, B_2, B_3 точките на пресичане на двойките прави A_1A_2 и A_4A_5 , A_2A_3 и A_5A_6 , A_3A_4 и A_6A_1. Знаменитата теорема на Паскал твърди, че точките B_1, B_2 и B_3 лежат на една права (права на Паскал).

Задача 4. Да фиксираме 6 точки върху една окръжност. Разглеждаме всевъзможните прави на Паскал и точки B_i от теоремата на Паскал, които могат да се получат при различните номерации на изходните точки. Докажете, че това множество образува конфигурация и намерете параметрите ѝ.

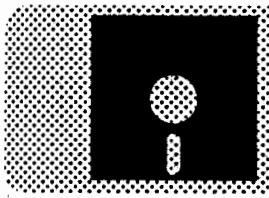
Задача 5. Постройте конфигурация $(9, 3, 9, 3)$.

Задача 6. Постройте конфигурация $(10, 3, 10, 3)$.

Задача 7. Докажете, че ако може да се построи конфигурация (a, m, b, n), то може да се построи и конфигурация $(a.n, m+1, b.n+a, n)$.

Задача 8. Докажете, че ако може да се построи конфигурация (a, m, b, n), то може да се построи и конфигурация $(a.m+b, m, b.m, n+1)$.

Задача 9. Докажете, че ако съществува конфигурация (a, m, b, n), то съществува и конфигурация (b, n, a, m).



М + КОНКУРС ПО ИНФОРМАТИКА

В тази рубрика се предлагат задачи-теми за програмиране. Те няма да бъдат съвсем изчерпателно формулирани, за да може читателите да проявят своето творчество и в постановката им, което донякъде е естествено при задачите за програмиране. Основна тежест в нашия конкурс има създаването и обосноваването на ефективен алгоритъм за решаване, но задачата ще се счита за напълно решена, ако за нея има завършена и работеща програма. Най-добрите предложени алгоритми и програми ще бъдат съобщавани и обсъждани на страниците на списанието.

Решенията на конкурсните задачи трябва да съдържат описание на алгоритъма и текста на програмната реализация. Препоръчва се да се използва език за програмиране и компютърна среда, които са по-широко разпространени у нас. Желателно е текстът на програмата да е записан върху дискета с указания за използването му. Изпратената от Вас дискета ще Ви бъде върната по пощата. За да стане това по-бързо, дискетата трябва да бъде снабдена с подходяща опаковка, с надписан адрес за получаване и пощенска марка. За разполагащите с електронна поща адресът е:

keleved@bgearn.bitnet,

а за използващите традиционната поща:

1113 София
ул. Акад. Г. Бончев бл. 8
Институт по математика при БАН
Емил Келеведжиев

Задача 12. Дадена е правоъгълна дъска, разделена на правилна мрежа от еднакви квадратчета. Някои от тези квадратчета са боядисани в черно, а останалите са бели. Напишете програма, която въвежда размерите на дъската и разположението на черните квадратчета и намира, дали от дадената дъска може да се изреже стандартна шахматна дъска.

(д-р М. Плюс)

Срок за изпращане на решенията 15 април 1996 г.

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ПО ИНФОРМАТИКА

Задача 8. Дадена е квадратна мрежа 4×4, в шестнадесетте квадратчета на която са наредени по произволен начин числата от 1 до 15, а едно квадратче е празно. Всяко от съседните на празното квадратче числа може да се премести в него и могат да се правят неограничен брой такива ходове (играта "15"). Да се състави програма, която от изходната конфигурация получава

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

или установява невъзможността да се направи това. Опитайте се да получите алгоритъм, който прави "малък" брой ходове.

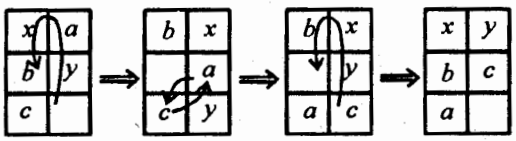
(Б. Банчев, София)

Решение. Тази стара и класическа главоблъсканица допуска много различни решения. Ще опишем едно от известните, при което се правят сравнително неголям брой ходове.

Основното наблюдение относно преместването на квадратчетата, което ни помага да ги разполагаме в нужния ред е, че числата във всяка правоъгълна рамка, в

която участва и празното квадратче (и чиито страни съдържат не по-малко от две квадратчета) могат да се преместват циклично, заедно с празното квадратче, на произволен брой позиции по протежение на рамката. Същото е вярно и за всеки друг многоъгълник със страни, не по-къси от две квадратчета. Понякога вместо пълни цикли се правят частични премествания: редица от квадратчета, първото от които е празното, се преместват едно след друго така, че празното застава на последно място в редицата.

Движения от вида на описаните са непосредствено достатъчни например за поставяне на място на числата 1, 2 и 3. За числото 4 и други подобни случаи ще комбинираме някои прости движения в следната схема на преместване (фиг. 1):



Фиг. 1

Фиг. 2

Целейки да поставим y до x, разместваме също a и c, докато x, b и празното квадратче остават неподвижни.

Ясно е, че с прости движения можем да поставим празното квадратче и числото 4 над него в ролята на y в горната схема и така да получим подредбата на първия ред.

Всичко описано дотук е достатъчно, за да поставим последователно на местата им и числата 5, 6, 7, 8, 9, 13, 10 и 14 (за числата 13 и 14 прилагаме схемата от фиг. 1 симетрично спрямо вертикалата и завъртяна наляво). Така в долния десен ъгъл достигаме до конфигурацията на фиг. 2: където a, b и c са числата 11, 12 и 15 в някакъв ред.

Ако, като обикаляме четирите полета по посока на часовника, тези три числа се срещат именно в този ред, лесно стигаме до подредбата, която целим. В противен случай правилната подредба е недостижима. Точно половината от всички възможни начални конфигурации на играта могат да доведат до исканата наредба, в зависимост от четността на всяка конфигурация, разглеждана като пермутация на 16 елемента.

Гореописаният алгоритъм се програмира просто, но не е най-ефективният по броя на извършваните ходове. Можем да усложним правилата за действията, които прилагаме, в зависимост от конкретната начална конфигурация и следващите, които получаваме в хода на подреждането. Например понякога се оказва по-удобно прякото едновременно вмъкване на ъгловите елементи x и y, вместо по схемата на фиг. 1.

Списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС
има каталожен номер 1467

ЗАДАЧИ М+

В тази рубрика се публикуват задачи, достъпни за ученици от горните класове на средното училище, за студенти от първите курсове на университетите и за учители. Основният признак за подбор е оригиналност. Това не означава задължителна новост, защото твърдението, че една задача е нова, остава в сила до доказване на противното. По-широкият смисъл на оригиналността включва естетичност и остроумие, а решаването на задачи с подобни качества изисква инициативност, откривателски подход, интелектуално усилие.

Рубриката разчита на Вашето активно участие както с решения, така и с предложения за задачи. Изпращайте ги на адрес:

1113 София,
ул. "Акад. Г. Бончев", блок 8,
Институт по математика при БАН,
Ваня Хаджийски

В писмата си посочвайте училището (университета) и класа (курса), ако сте ученик (студент). Желателно е предлаганите задачи да са напечатани в два екземпляра с кратки, но пълни решения. След условията ще бъдат отбелязвани имената на тези, които са направили предложенията. Ако задачата е заета, посочете източника. В писмото си поставете празен плик с точния Ви адрес.

Без да извършва класиране, М+ ще обсъжда изпратените решения, а най-хубавите от тях ще намерят място на страниците на рубриката и ще бъдат награждавани. Ще се публикуват Ваши коментари по повод на задачите и техните решения (обобщения, интересни частни случаи и т.н.).

M^+73. Стените на паралелепипед са еднакви ромбове, различни от квадрати. Да се докаже, че точно два върха на паралелепипеда имат равни прилежащи ъгли.

(доц. Н. Мартинов – София)

M^+74. Четири дървета са засадени в права линия, като разстоянията между съседните са 315, 525, 1365 и 1995 метра. Колко най-малко дървета още трябва да се засадят така, че разстоянията между всеки две съседни да са равни?

(Д-р М. Плюс)

M^+75. Да се докаже, че съществува изпъкнал четириъгълник с дължини на страните равни на корените на уравнението $x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 24 = 0$ и който може да се впише в окръжност. Да се пресметне лицето на този четириъгълник.

(А. Симеонов – Своге)

M^+76. Нека a, b и c са дължините на страните на триъгълник, m_a, m_b и m_c са дължините на съответните медиани, r е радиусът на вписаната в него окръжност и S е лицето му. Да се докаже, че

а) $\dfrac{m_a^2+m_b^2}{c}+\dfrac{m_b^2+m_c^2}{a}+\dfrac{m_c^2+m_a^2}{b}\le\dfrac{3m_am_bm_c}{S}$;

б) $m_a^2+m_b^2+m_c^2\le\dfrac{m_am_bm_c}{r}$.

(Ст. Атанасов, 11кл, НПМГ – София)

M^+77. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \ge 2$ е изпълнено неравенството

$$\frac{1}{n+1^2}+\frac{1}{n+2^2}+\cdots+\frac{1}{n+n^2}>\frac{6}{7\sqrt{n}}-\frac{1}{4n}.$$

(Св. Дойчев – Ст.Загора, Р. Козарев – София)

M^+78. Върху окръжност са разположени краен брой различни точки A_1, A_2, ..., A_n. Нека $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ е редица от насочени отсечки от вида $\overrightarrow{A_iA_j}$, $1 \le i \ne j \le n$. Да се докаже, че съществува редица $(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ от същия вид, в която насочените отсечки нямат общи точки, различни от A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и такава, че $a_1 + a_2 + \cdots + a_N = b_1 + b_2 + \cdots + b_N$.

(В. Ванков – София)

Срок за изпращане на решения – 15 май 1996 г.

M^+55. Числата от 1 до 18 са разпределени в 9 двойки, така че сумата на числата във всяка двойка е квадрат на естествено число. Коя е двойката, съдържаща числото 1?

(В. Хаджийски, О. Мушкаров, София)

Решение на Л. Каменова, 10 кл., СМГ, София; Н. Пенев, 9 кл., НПМГ, София и Ст. Анатасов, 10 кл., НПМГ, София. Възможните двойки съдържащи числото 1 са (1,3), (1,8) и (1,15). Единствената двойка съдържаща 17 е (17,8). Следователно двойката (1,8) не съществува. Ще покажем, че двойката (1,3) също не е възможна. Възможните двойки съдържащи 6 и 15 са (6, 3), (6,10) и (15, 1), (15, 10). Ако двойката (1,3) съществува, тогава ще съществуват и двойките (6,10) и (15,10), което е невъзможно. Следователно двойката съдържаща 1 е (1, 15).

Задачата е решена и от **Ат. Иванов**, 10 кл., МГ, Варна; **А. Асенов** – гара Бов; **В. Колева**, 8 кл., НПМГ, София; **Вл. Славов**, 9 кл., ПМГ, Шумен; **Г. Пламенов**, 9 кл., ПМГ, Враца; **Й. Йотова**, 8 кл., ПМГ, Ловеч и **Ст. Миревски**, 8 кл., ПМГ, Ловеч.

Бележка на редакцията: Всички решили задачата са забелязали, а Ст. Миревски е и доказал, че единственото възможно разпределение на числата от 1 до 18 е: (1,15), (2,14), (3,13), (4,12), (5,11), (6,10), (7,18), (8,17), (9,16). Тази задача е предложена на втория кръг на олимпиадата в гр. Минск, 1994 г., 9-ти клас.

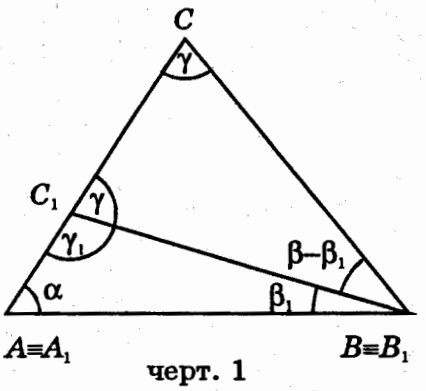
M^+56. Върху окръжност са взети точки A, B и C, така че C е среда на по-малката дъга $\overset{\frown}{AB}$. Да се намери геометричното място на точките P в равнината, за които PC е ъглополовяща на $\sphericalangle APB$.

(Хр. Лесов, Казанлък)

Решение на Вл. Славов, 9 кл., ПМГ, Шумен.

Лема. Ако при стандартните означения за $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ е известно, че $\alpha = \alpha_1$, $a = a_1$ и $c = c_1$, то или $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, или $\beta_1 = \gamma - \alpha$ и $\gamma_1 = 180^\circ - \gamma$.

Доказателство: Налагаме $\triangle A_1B_1C_1$ върху $\triangle ABC$. Ако $\beta = \beta_1$, то $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. Нека $\beta_1 < \beta$ (черт. 1). Тогава очевидно ($BC_1 = BC$) $\gamma_1 = 180^\circ - \gamma$ и $\beta_1 = 180^\circ - (\alpha + \gamma_1) = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - \gamma) = \gamma - \alpha$. Случаят $\beta_1 > \beta$ е аналогичен.



черт. 1

Нека сега P е от търсеното ГМТ. Тогава за $\triangle APC$ и $\triangle BPC$ имаме, че $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$, $AC = BC$ и PC обща страна. Съгласно лемата или $\triangle APC \cong \triangle BPC$, или $\sphericalangle PBC = 180^\circ - \sphericalangle PAC$. В първия случай следва, че $PA = PB$, т.е. P лежи на симетралата на AB и $P \neq C$. Във втория случай, около $APBC$ може да се опише окръжност и значи P лежи на дъгата $\overset{\frown}{AP}$, несъдържаща C (без точките A и B). Намерените множества от точки очевидно удовлетворяват условието на задачата.

Нестандартно решение на стандартна задача!

Задачата е решена и от **А. Асенов, Г. Пламенов, Л. Каменова, Н. Пенев, Ст. Атанасов и Ст. Миревски.**

M^+57. Нека k и n са естествени числа. Да се докаже, че съществуват n различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в десетичния запис на които не участва цифрата 0 и такива, че сумите от цифрите на числата $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k$ са едни и същи.

(В. Дренски, София)

Решение. Нека числото a е записано с не повече от m цифри, т.е. $a < 10^m$. Тогава $a^k < 10^{km}$, т.е. a^k има не повече от km цифри и сборът от цифрите на a^k не е по-голям от $9km$. Броят на естествените числа a с s цифри, в записа на които не участва 0, е 9^s. Следователно броят на числата от този вид, за които $a < 10^m$, е $9 + 9^2 + \cdots + 9^m$. При фиксирано k, отношението $\dfrac{9^m}{9^{km}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Следователно съществува m, така че $9 + 9^2 + \cdots + 9^m > 9^m > 9km(n-1) + 1$. Ще използваме „принципа на чекмеджетата“ в следната форма: Имаме поне $p.q + 1$ топки в p чекмеджета. Тогава в едно чекмедже ще има поне $q+1$ топки. Нека $q = n-1$, $p = 9km$, „топките“ са естествените числа $< 10^m$, без 0 в техния запис, а „чекмеджетата“ са сумите от цифрите им. Тогава ще има поне n числа с еднакви суми от цифри.

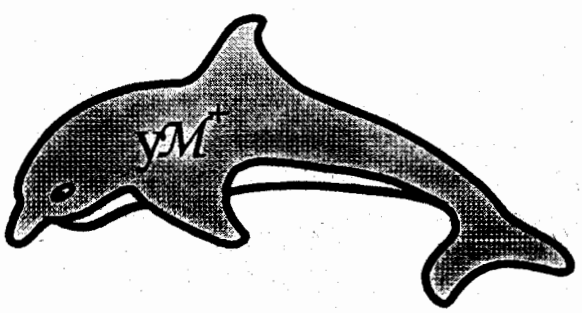
Продължава на стр. 47

Драги читатели,

МАТЕМАТИКА ПЛЮС си постави благородната задача да издирва и поощрява най-талантливите от вас. Започва третото издание на задочното математическо състезание **ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ – уМ+**. На следващите страници в този брой ще откриете четива за 4–5 и 6–7 клас, а след тях — конкурсните задачи от I кръг за учебната 1995 – 1996 г. Прочетете внимателно четивата и решете упражненията след тях. Поне една от конкурсните задачи е свързана с четивото за съответния клас, затова горещо ви препоръчваме да положите усилия, за да го разберете и изучите задълбочено. Ако нещо ви затруднява, обърнете се към учителя по математика или пишете до редакцията. Но задачите решавайте самостоятелно! Знаете ли колко голямо е удоволствието, когато успеете да намерите сами отговора? Не се отчайвате, ако не се справите с всички задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. Допуска се и колективно участие.

В бр. 1 и бр. 2 за 1996 г. на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС очаквайте четивата и задачите от II и III кръг. Жури под председателството на известния български математик академик Благовест Сендов ще преглежда всички решения. Най-добрите от вас, т.е. тези, които решат най-много задачи или направят впечатление с оригиналните си идеи (пък дори и една единствена), ще бъдат поканени заедно с учителите си на специално организиран лагер. Там ги очакват многобройни изненади. Ще ги запознаем с известни математици, които ще им представят красотата на математиката; ще им осигурим разнообразни математически игри и развлечения. И всичко това безплатно – награда за положения през учебната година труд.

Побързайте! Очакват ви четивата и задачите от I кръг. Желаем ви успех!

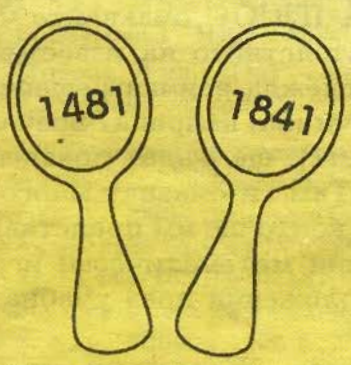


За инициативата на сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС – ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ уМ+ е създаден специален фонд. Желаещите да спонсорират или да направят дарение могат да използват банковата сметка на фонда: код – 57075866, сметка – 1001164504, Банка за земеделски кредит АД, София, за фонд „ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ“.

ОГЛЕДАЛНИ ЧИСЛА

Четиво за 4 и 5 клас

В безкрайното множество на естествените числа се крият забележителни свойства, характерни за определен вид числа, свързани с образуващите ги цифри и мястото им в техния запис.



Да разгледаме числото 276. Чрез същите цифри, записани в обратен ред, получаваме числото 672. Такива две числа наричаме **огледални числа**, ако те са различни. По същия начин за всяко число, чиято цифра на единиците не е 0, може да се образува съответното му огледално число. Ето някои примери за огледални числа: 13 и 31, 102 и 201, 1481 и 1841.

При решаване на задачи е удобно да се използва общоприетият начин за изразяване на естествените числа чрез техните цифри – за двуцифрени числа: $\overline{ab} = 10a + b$, за трицифрени числа: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ и т.н.

Така се определя, че сборът на две двуцифрени огледални числа с цифри $a > b$ е равен на $(10a+b)+(10b+a) = 11(a+b)$, а разликата им е $(10a+b)-(10b+a) = 9(a-b)$. Съответни изрази може да се получат и за огледални числа с повече цифри. На тези зависимости се основава решението на задачи от следния вид:

Задача 1. Сборът на две огледални числа е 176. Кои са тези числа?

Решение. Ясно е, че търсените числа са двуцифрени и както вече показахме, сборът им е равен на $11(a+b)$, където a и b са цифрите им. Но $176 = 11.16$ и значи $a+b = 16$, откъдето следва, че единствено възможните стойности за a и b са 9 и 7. Така, *че числата са 97 и 79.*

Задача 2. Да се намерят двуцифрените огледални числа, чиято разлика е равна на сбора от цифрите им.

Решение. Ако $a > b$ са цифрите на търсените числа, условието на задачата води до равенството $9(a-b) = a+b$ или $4a = 5b$, което е изпълнено само за $a = 5$, $b = 4$, т.е. получаваме числата 54 и 45.

Задача 3. Да се намери най-малкото число с различни цифри, което е с 396 по-голямо от своето огледално число.

Решение. Ако търсеното число е двуцифрено с цифри $a > b$, то разликата с неговото огледално число е $9(a-b) \leq 9.8 = 72$, защото $a \leq 9$, $b \geq 1$. Следователно няма двуцифрено число, което да удовлетворява даденото условие.

Да разгледаме трицифрените огледални числа $\overline{abc}$ и $\overline{cba}$, като $a > c$. Тяхната разлика е $(100a+10b+c)-(100c+10b+a) = 99(a-c)$ и понеже $396 = 99.4$, то $a-c=4$, т.е. $a = c+4$. Най-малката възможна стойност на c е 1 и съответно $a = 1+4 = 5$. Така, че търсеното най-малко число се получава при $b = 0$ и то е 501. Наистина $501 - 105 = 396$.

Ще предложим няколко задачи за самостоятелна работа:

Задача 4. Сборът на двуцифрено число и трицифрено число е 177, сборът на огледалните им числа е 483. Кои са числата?

(Отг. 23 и 154)

Задача 5. Сборът на двуцифрено число и четирицифрено число е 2750, а сборът на техните огледални числа е 8888. Кои са числата

(Отг. 62 и 2688)

Задача 6. Да се намерят две числа, чийто сбор е 1576, а сборът на техните огледални числа е 4375.

(Отг. 462 и 1114)

Задача 7. Да се намерят две огледални числа, чието произведение е 65125.

Решение. Тъй като $99.99 < 10000 < 65125$, то търсените числа имат повече от две цифри, а понеже $1000.1000 = 1000000 > 65125$, то тези числа имат по-малко от 4 цифри. Следователно те са трицифрени. По условие произведението им завършва на 5 и значи поне едно от тях завършва на 5, т.е. има вида $\overline{ab5}$. Тогава другото е $\overline{5ba} > 500$ и $\overline{ab5}.\overline{5ba} > \overline{ab5}.500$ или $65125 > \overline{ab5}.500$, откъдето $\overline{ab5} < 65125 : 500 < 131$. Трицифрените числа, които завършват на 5 и са по-малки от 131, са 105, 115 и 125. Непосредствената проверка показва, че само $125.521 = 65125$ така, че търсените числа са 125 и 521.

Задача 8. При умножение на кое четирицифрено число с 4 се получава огледалното му число?

Решение. Условието на тази задача може да се представи чрез равенството $\overline{abcd}.4 = \overline{dcba}$. Тъй като $d \leq 9$, то $a \leq 2$. Но произведението на d и 4 не може да завършва на 1, поради което следва, че $a = 2$, а тогава $d = 8$. Лесно се съобразява, че единствено възможно е $b = 1$ и $c = 7$ така, че 2178 е исканото число, за което е изпълнено условието: $2178.4 = 8712$.

С огледалните числа са свързани интересни числови ребуси, някои от които предлагаме за самостоятелно решаване:

Задача 9. $ABC + CBA = AA.BC$. (Отг. $841 + 418 = 88.14$)

Задача 10. $ABC.CBA = DAEDAE$. (Отг. $924.429 = 396396$)

Задача 11. $ABCDE : EDCBA = F$. (Отг. $87912 : 21978 = 4$)

Автор на четивото Христа Лесов

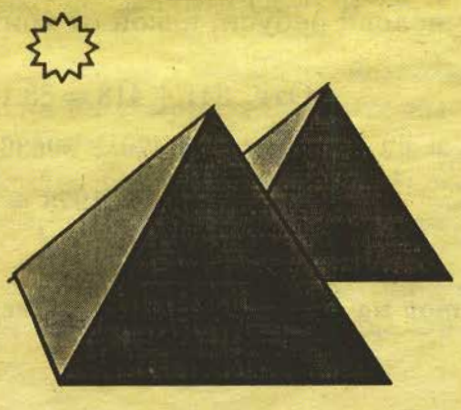
ДА СЕ ВЪЗСТАНОВИ . . .

Четиво за 6 и 7 клас

Млади приятели, знаете ли кое е общото между оживелите отново на екрана гигантски динозаври, тайнственото писмо, извадено от бутилка в стомаха на акула и наводнените участъци земя около реката Нил? Не бързайте с отговора, че няма нищо общо. Всъщност общото е ... математиката!

Сигурно вече сте гледали нашумелия филм "Джурасик парк". И ако вашето внимание е било привлечено не само от смразяващия рев на гладния тиранозавър, то добре си спомняте трудната задача, която екипът от учени във филма разреши успешно – разполагайки с няколко капчици изсъхнала кръв, запазена в хобота на праисторически комар, той възстанови живи онези огромни влечуги, които са владеели Земята много преди първия човек да украси със своите рисунки стените на пещерите. Разбира се, това засега остава фантастика. Засега.

Ако пък не сте любители на подобен род филми, то ще ви припомня за една книга, която отдавна е любимо четиво на юношите от цял свят — „Децата на капитан Грант". В нея смелите шотландски моряци на лорд Гленарван изваждат от стомаха на уловена акула бутилка и намират в нея три еднакви документа, но на различни езици. За жалост тези документи са силно повредени от морската вода и съдбата на капитан Грант и неговите корабокруширали моряци се оказва зависима от решението на задачата по възстановяването на документите. Е, героите на Жул Верн не се справят съвсем успешно с това решение, но можем ли да им се сърдим — сред тях има моряци, географ, шотландски лорд и две жени, но уви, нито един математик.



А специалистите по история на математиката казват, че геометрията – този основен дял на съвременната математика, води началото си от Древен Египет. Там най-плодородната земя била по поречието на реката Нил и затова земната площ била разделена на различни по форма и големина участъци. Но през определено време от годината „непослушният" Нил преливал от коритото си и заличавал преградите между отделните участъци. И когато

водите на реката отново се прибирали на мястото си, възниквала задачата – съвсем математическа – да се възстановят залетите от водата участъци.

Сигурно вече се досетихте защо твърдях, че общото между нещата, за които стана дума в началото, е математиката. И в трите случая възникваха задачи (съвсем различни по характер), в които нещо трябва да се възстанови. Такива задачи, които са типични за повечето съвременни науки, са на особена почит в математиката. Именно за тях ще поговорим сега. Най-общо казано, под задача за възстановяване на някакъв математически обект разбираме задача, в която предварително е дадена част от този обект. Посочени са и свойствата, които обектът трябва да притежава. Задачата се счита за решена, ако е намерен целият обект.

Математиците се радват най-много на такива задачи, в които възстановяваният обект се оказва единствен, или на задачи, в които малки изменения на предварително зададените свойства на обекта не водят до съществени промени в самия обект. Най-често такива задачи се наричат коректни. Но какви математически обекти могат да бъдат възстановявани? Отговорът е: най-различни – числа, функции, уравнения, многочлени, геометрични фигури и т.н. А сега да започнем със задачите.

Задача 1. В числото $N = \underbrace{444\ldots4}_{1995}\underbrace{888\ldots8}_{1994}*$ липсва последната цифра. Възстановете числото N, като знаете, че то е точен квадрат на естествено число.

Решение. Трудността идва първоначално оттам, че числото N е прекалено голямо. Тогава да си зададем въпроса не може ли да опитаме с по-малко число? Какво е налице в известната част на N? Имаме известен брой четворки, след което идват осмици, и то с една по-малко от четворките. Тогава да опитаме да решим „същата задача“ с число от вида $448*$. Може ли то да бъде точен квадрат? Тъй като $60^2 = 3600 < 448*$ и $70^2 = 4900 > 448*$, то ако си дадем труд да пресметнем квадратите на числата от 60 до 70, ще видим, че $67^2 = 4489$. Опитът се оказа успешен. Тогава сме длъжни да го повторим с числото $44488*$. Отново $600^2 = 360000 < 44488*$ и $700^2 = 490000 > 44488*$. Внимание! Да не би да си мислехте, че сега ще пресмятаме квадратите на всички числа от 600 до 700? Нищо подобно! Пресмятаме например, 650^2 (650 е „по средата“ между 600 и 700): $650^2 = 422500 < 44488*$. Значи 650^2 е малко. Пресмятаме $670^2 = 448900$. Сега $448900 > 44488*$, но 448900 е „доста близко“ до разглежданото число. Като си спомним, че в първия случай намерихме 67, сега опитваме с 667: $667^2 = 444889$ и виждаме, че се получава исканото. С тези „проби и грешки“ достигнахме до равенствата $67^2 = 4489$ и $667^2 = 444889$, което вече ни навежда на определена хипотеза. Вярвам, че няма да се затрудните с проверката на равенството $6667^2 = 44448889$. Тези три равенства ясно открояват зависимостта, която ни е необходима. Обърнете внимание, че броят на шестиците от лявата страна на равенствата съвпада с броя на осмиците от дясната. Числото N е открито: $N = \underbrace{444\ldots4}_{1995}\underbrace{888\ldots8}_{1994}9$. За да докажем това, трябва да установим верността на равенството

$$\underbrace{444\ldots4}_{1995}\underbrace{888\ldots8}_{1994}9 = \underbrace{666\ldots6}_{1994}7^2.$$

Да пресметнем $\underbrace{666\ldots67}_{1994}^2$:

$$\underbrace{666\ldots67}_{1994}^2 = \left(\underbrace{666\ldots6}_{1995}+1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\underbrace{999\ldots9}_{1995}+1\right)^2 = \frac{\left(2.1\underbrace{0\ldots0}_{1995}+1\right)^2}{9} =$$

$$\frac{2\underbrace{0\ldots0}_{1995}\cdot 2\underbrace{0\ldots0}_{1995}+2\underbrace{0\ldots0}_{1995}+2\underbrace{0\ldots0}_{1995}+1}{9} = \frac{4\underbrace{0000\ldots0}_{1995+1995}+4\underbrace{0\ldots0}_{1995}+1}{9} =$$

$$\frac{4.\underbrace{9999\ldots9}_{1995+1995}+4.\underbrace{9\ldots9}_{1995}+9}{9} = 4.\underbrace{1111\ldots1}_{1995+1995}+4.\underbrace{1\ldots1}_{1995}+1 = \underbrace{4\ldots4}_{1995}\underbrace{8\ldots8}_{1994}9.$$

Получихме желаното. С това задачата е решена.

Стоп! Всъщност има още един момент. Доказахме, че на мястото на звездичката можем да поставим 9. Но дали не можем да поставим и друга цифра така, че да са спазени изискванията към числото N? Отговорът е отрицателен. Причината е, че квадратите на естествените числа „се разреждат“ достатъчно бързо с нарастването на числата. Нещо повече, дори и да липсваше не само последната, а да кажем последните 100 цифри на N, задачата нямаше да получи втори отговор.

Задача 2. Петцифреното естествено число M е точен квадрат на естествено число и броят на делителите на M съвпада с цифрата на единиците му. Да се възстанови M, ако е известно, че то е най-малкото петцифрено число с това свойство.

Решение. Ще започнем решението, като докажем едно твърдение, което само по себе си представлява интерес поради широкото си приложение: ***Ако едно естествено число е точен квадрат, то има нечетен брой делители.***

Действително, ако $k = t^2$ и d е произволен делител на k, то и числото $\frac{k}{d}$ (което е естествено) също е делител на k. Тогава да групираме делителите на k по двойки от вида $\left(d; \frac{k}{d}\right)$. Във всички такива двойки, освен в двойката (t, t), ще бъдат групирани различни делители. Но тогава броят на всички делители на k ще бъде равен на 2 · броя на двойките– 1 (защо?), а това е нечетно число. Обърнете внимание, че е вярно и обратното, т.е. ако броят на делителите на едно естествено число е нечетен, то числото е точен квадрат.

Да разгледаме сега последната цифра на M. От доказаното по-горе следва, че тя е нечетна. Възможностите да е 3 или 7 отпадат веднага, тъй като нито един точен квадрат не завършва на 3 или 7. Също така трябва да се откажем от 1, защото единственото число с единствен делител е самото 1, докато M е петцифрено. Остават възможностите M да завършва на 5 или на 9. Но ако M завършва на 5, според признака за делимост на 5 то ще се дели на 5. Нека $M = a^2$. Тогава щом 5 дели M, то 5 ще дели и a и можем да запишем, че $M = (5b)^2$ или $M = 25b^2$. Но тогава числата 1; 5; 25; b; $5b$; $25b$; M са все делители на M, докато M трябваше да

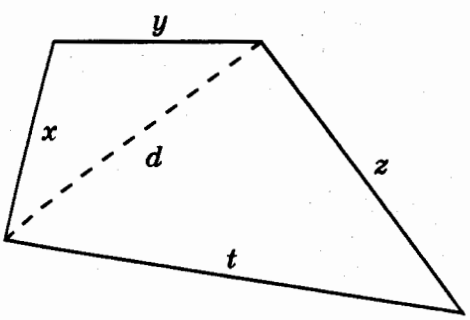
има 5 делителя. Остава вторият случай – M да завършва на 9. Отново можем да запишем, че $M = a^2$ и щом M завършва на 9, то a завършва на 3 или на 7. Тъй като $100^2 = 10000$ и M е петцифрено, то проверката започваме с $a = 103; 107; 113; 117; \ldots$ и т.н., докато открием подходящото число. Това ни гарантира намирането на най-малкото M. И така: понеже 103 е просто число, то 103^2 има три делителя — 1, 103 и 103^2 и не е решение. Аналогично стои въпросът и със 107 и 113. По нататък $117 = 3^2.13$, откъдето $117^2 = 3^4.13^2$. Убедете се самостоятелно, че 117^2 има повече от девет делителя. Следващото число е $123 = 3.41$. Оттук $123^2 = 3^2.41^2$. Ето всичките делители на 123^2: 1; 3; 3^2; 3.41; $3^2.41$; 41^2; 3.41^2 и $3^2.41^2$ и те се точно девет на брой. Следователно $M = 123^2 = 15129$.

Ще завършим със

Задача 3. Дължините a, b, c, d на страните на четириъгълник са естествени числа и всяко едно от тях дели сбора на останалите три. Известно е, че четириъгълникът не е ромб. Да се възстановят:

а) частното $\frac{a+b+c}{d}$, ако d е най-голямата страна на четириъгълника;

б) числата a, b, c, d, ако периметърът на четириъгълника е 18.



черт. 1

Решение. а) Ще използваме твърдението, че във всеки четириъгълник сборът на кои да са три страни е по-голям от четвъртата. Доказателството му може да разгледате на чертеж 1. Тогава $a + b + c > d$ или $\frac{a+b+c}{d} > 1$. От друга страна, от сборовете $a + b + c$ и $d + d + d$ вторият е по-голям (тук използваме, че четириъгълникът не е ромб). Получихме, че $a + b + c < 3d$, т.е. $\frac{a+b+c}{d} < 3$. И понеже по условие числото $\frac{a+b+c}{d}$ е цяло, остава единствената възможност $\frac{a+b+c}{d} = 2$.

б) Щом $\frac{a+b+c}{d} = 2$, т.е. $a+b+c = 2d$, то $18 = a+b+c+d = 2d+d$, откъдето $d = 6$. По-нататък разглеждаме два случая. Ако има и друга страна с дължина 6 (по-голяма от 6 няма, защото d е най-голямата), то сборът на другите две страни е $18 - 12 = 6$ и са на лице възможностите за a, b, c, d:

$1, 5, 6, 6$ – отпада, тъй като $6 + 6 + 1$ не се дели на 5;

$2, 4, 6, 6$ – отпада, тъй като $6 + 6 + 2$ не се дели на 4;

$3, 3, 6, 6$ – четирите числа удовлетворяват условието.

Във втория възможен случай трите страни са по-малки от 6. Тогава са възможни следните случаи:

$2, 5, 5, 6$ – отпада, тъй като $2 + 5 + 6$ не се дели на 5;

$3, 4, 5, 6$ – отпада, тъй като $3 + 4 + 6$ не се дели на 5;

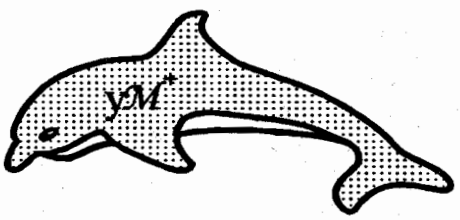
$4, 4, 4, 6$ – отпада, тъй като $4 + 4 + 6$ не се дели на 4.

Получихме, че две от страните са с дължина 6, а другите две са с дължина 3. Можете ли да начертаете такъв четириъгълник? Колко нееднакви такива четириъгълника могат да се начертаят?

Автор на четивото Светлозар Дойчев

m+конкурс

ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ



ИЗДИРВАНЕ НА ТАЛАНТИ е задочно математическо състезание. За победителите подготвяме страхотни изненади. Те, заедно със своите учители, ще бъдат поканени на специално организирания ФЕСТИВАЛ УМ+. Състезанието се провежда в 3 кръга. В този брой ви представяме задачите от I кръг. Поне една от задачите е свързана с четивата за съответните класове от предните страници. Прочетете ги внимателно, решете задачите и едва тогава се захванете със задачите от състезанието. Не се отчайвайте, ако не се справите и с трите задачи. Пишете ни дори и в случай на непълно решена задача. В писмата отбелязвайте трите си имена, класа, училището, името на учителя ви по математика. Допуска се и колективно участие (ако например задачите се разглеждат в школата по математика). В този случай изпращайте само едно писмо с името на избран от вас капитан на отбора. Пишете на адрес:

МАТЕМАТИКА ПЛЮС
Институт по математика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София

I КРЪГ

Задачи за 4 клас

1. 1. Съществува ли естествено число k, за което произведението $k.k$ се представя като: а) сбор; б) разлика на две четни двуцифрени огледални числа? Обосновете отговора си!

2. Да се намери най-малкото естествено число N, сборът на цифрите на което е 40, а сборът на цифрите на числото $N-1995$ е 43. Има ли друго естествено число със същото свойство?

3. Въже с дължина 12 метра да се нареже на равни части така, че с тях да се построи фигура, която се състои от:

а) равностранен триъгълник и три квадрата;

б) квадрат и четири равностранни триъгълника.

Задачи за 5 клас

1. Д-р М. Плюс си намислил двуцифрено число. Умножил го с 8, резултата разделил на 3 и получил огледалното число на намисленото. Кое число си е намислил Д-р М. Плюс?

2. На мястото на звездичките в умножението $1995. * ** = * * * * * * * *$ да се поставят цифрите от 0 до 9, като всяка се използва точно по веднъж, така че да се получи вярно числово равенство. Да се намерят всички такива числа.

3. Разполагате с 3 листа, всеки от които разрежете на 5 части. След това някои от тези части разрежете отново на 5 части и т.н. Може ли така да получите: а) 1995; б) 1996 листчета?

Задачи за 6 клас

1. С помощта на три различни ненулеви цифри са образувани всички възможни различни трицифрени числа. Сборът на тези числа е разделен без остатък на произведението на тези цифри. Частното е двуцифрено число, което се записва с две от дадените цифри. Да се намерят трите цифри.

2. Записът на естественото число N има вида $\overline{xyzzyxyy}$, където x, y, z са различни цифри. Да се възстанови числото N, ако е известно, че сборът от различните му прости делители е 19.

3. Да се определи дължината на ръба на куб, която се изразява с естествено число метри, а обемът измерен в куб.м., е сбор от трицифрено число и съответното му число, записано със същите цифри в обратен ред.

Задачи за 7 клас

1. Естественото число n е такова, че числото $A = \dfrac{2^n + 3^n}{11}$ е цяло. Да се намерят последните две цифри на A.

2. За едно петцифрено естествено число N са дадени три твърдения:

а) N се дели на 37;

б) N завършва на 37;

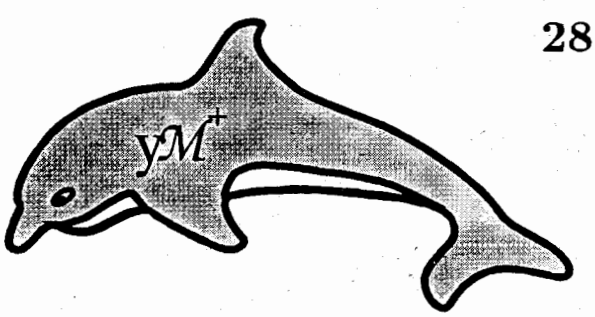
в) сборът от цифрите на N е 37.

Не е известно дали тези твърдения са верни. Известно е обаче, че няма друго петцифрено естествено число, освен N, за което твърденията запазват същата вярност (или невярност). Да се възстанови числото N.

3. Разглеждат се всички паралелепипеди с измерения естествени числа, сборът от реципрочните стойности на които е 1. Измежду тези паралелепипеди да се определи онзи, който има най-голям обем.

Задачите се предложени от Светлозар Дойчев и Христо Лесов.

Краен срок за изпращане на решения
28 февруари 1996 г.



М+ томбола

Наградите за бр. 2, 1995 г.

MONTANA TRADING COMPANY

официален дистрибутор на Winsome Computing Systems
копие на Kew2Win Версия 2.0 печели

Мария Узунова, с. Хвойна, общ. Чепеларе

Електронен калкулатор

1. Валентин Орешков, Казанлък
2. Даниела Анастасова, Варна

Електронен часовник

1. Амалия Кюркчиева, Габрово
2. Елена Колева, В. Търново

Наградите са осигурени от Фирма 3 КА, ул. „Денкоглу“ 23, София

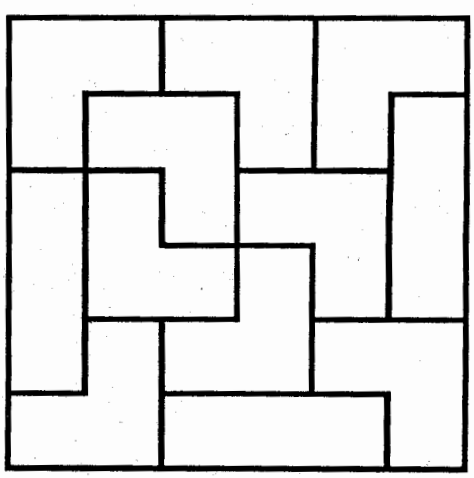
Книги с математическа тематика

1. Милена Леондиева, София
2. Петър Тотев, с. Рогош
3. Добромир Христакиев, Пловдив
4. Павлина Йонова, Ловеч
5. Христо Гьошев, София
6. Боряна Димитрова, Благоевград
7. Соня Йовчева, Ямбол
8. Петър Донов, Плевен
9. Антония Атанасова, Шумен
10. Иванка Юрукова, Пловдив

Наградите бяха изтеглени на 1 ноември 1995 г. в гр. Стара Загора по време на Турнира по математика, посветен на Деня на народните будители, организиран от секция „Ив. Салабашев“ на Съюза на математиците в България.

Конкурс ЛЕГО

До изтичане на крайния срок в редакцията бяха получени 297 верни отговора на задачата от бр. 2, 1995 г. на МАТЕМАТИКА ПЛЮС. Един от възможните отговори е даден на чертежа.



Ето имената на тримата, които след теглене на жребий, получават сувенирните награди ЛЕГО:

1. Гинка Маринска, с. Попинци
2. Георги Ангелов, Враца
3. Владимир Павлов, В. Търново

Книгите ще бъдат изпратени по пощата, а останалите награди могат да се получат от редакцията след уговорка на тел. (02)-713-28-26 или (02)-45-13-13.

ЗАДАЧИ M^+ РЕШЕНИЯ

продължение от стр. 36

M^+58. Общата част на $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ е шестоъгълник с равни страни. Ако R и r (R_1 и r_1) са радиусите на описаната и вписаната окръжности за $\triangle ABC$ ($\triangle A_1B_1C_1$), да се докаже, че $\frac{r}{R} = \frac{r_1}{R_1}$.

(П. Макулев, Пловдив)

Решение на Ст. Атанасов. Нека $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{a_3}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{a_4}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{a_5}$ и $\overrightarrow{QK} = \overrightarrow{a_6}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $|\overrightarrow{a_k}| = 1$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. От очевидното равенство $\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_5} = -(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_6})$ след повдигане на квадрат получаваме

$$a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + 2(\overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_3} + \overrightarrow{a_3}.\overrightarrow{a_5} + \overrightarrow{a_1}\overrightarrow{a_5}) =$$

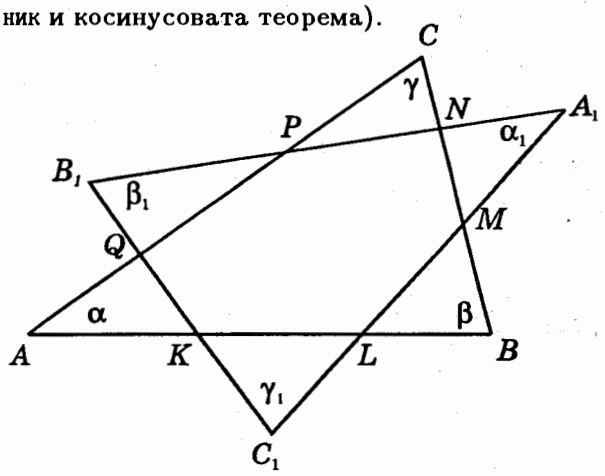
$$a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 + 2(\overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{a_4} + \overrightarrow{a_4}.\overrightarrow{a_6} + \overrightarrow{a_2}\overrightarrow{a_6})$$

$$\iff 3 + 2[\cos(\pi-\beta) + \cos(\pi-\gamma) + \cos(\pi-\alpha)] =$$

$$3 + 2[\cos(\pi-\alpha_1) + \cos(\pi-\beta_1) + \cos(\pi-\gamma_1)]$$

$$\iff \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha_1 + \cos\beta_1 + \cos\gamma_1.$$

Но за всеки триъгълник с ъгли α, β и γ, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$. Сега остава да използваме добре известния факт, че $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ (докажете го сами, като използвате съответните формули за лице на триъгълник и косинусовата теорема).

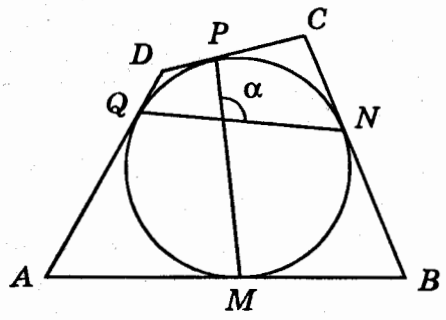


Интересни решения на тази красива задача ни изпратиха **и А. Асенов**, и **Г. Пламенов**.

M^+59. В изпъкнал четириъгълник с периметър P е вписана окръжност с радиус R. Нека α е ъгълът, който сключват отсечките, свързващи допирните точки, лежащи върху срещуположните страни. Да се докаже неравенството $\frac{P}{R} \geq \frac{8}{\sin\alpha}$. Кога се достига равенството?

(Л. Зикатанов, София)

Решение на Ст. Атанасов и С. Али Зеорг, студент 3 курс във ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски", София. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник със страни $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Да означим с M, N, P и Q (вж. чертежа) допирните точки на вписаната в него окръжност със страните му. Ще използваме следната формула за лице на четириъгълник: $S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$, където $P = 2p$ (вж. например В. Прасолов, Задачи по планиметрии, часть I, стр. 82, зад.4.45, изд. "Наука", Москва, 1986 г.)



В нашия случай $a + c = b + d$, т.е. $S^2 = abcd\sin^2\frac{A+C}{2}$. Сега да забележим, че $\alpha = \sphericalangle PMN + \sphericalangle MNQ = \sphericalangle PNC + \sphericalangle AMQ = \frac{180^\circ - \sphericalangle C}{2} + \frac{180^\circ - \sphericalangle A}{2} = 180^\circ - \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle C}{2}$, т.е. $\sin\alpha = \sin\frac{A+C}{2}$. Следователно, използвайки неравенството между средно аритметично и средно геометричо, получаваме: $\sin^2\alpha = \frac{S^2}{abcd} = \frac{P^2R^2}{4abcd} \geq \frac{P^2R^2}{4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4} = \frac{P^2R^2.64}{P^4} = \left(\frac{8R}{P}\right)^2 \iff \frac{P}{R} \geq \frac{8}{\sin\alpha}$. Равенството се достига само ако $a = b = c = d$, т.е. ако четириъгълникът е ромб.

Задачата е решена и от **А. Асенов, Г. Пламенов и Л. Каменова**.

M^+60. Нека $f(x)$ е полином от степен n със старши коефициент 1, всички корени на който са реални числа. Да се докаже, че за всяко реално число x, по-голямо от най-големия корен на полинома, е в сила неравенството

$$\frac{f^{(1)}(x)}{1^1} \cdot \frac{f^{(2)}(x)}{2^2} \cdots \frac{f^{(n)}(x)}{n^n} \geq (f(x))^{\frac{n-1}{2}},$$

където $f^{(k)}(x)$ е k-тата производна на $f(x)$.

(Б. Михайлов, Пловдив)

Решение на А. Асенов и Г. Пламенов. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са корените на полинома $f(x)$. Тогава $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ и по индукция се установява, че $f^{(k)}(x) = k![(x-x_1)\ldots(x-$

$x_{n-k})+(x-x_1)\ldots(x-x_{n-k-1})(x-x_{n-k+1})+\cdots+(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)]$, $k=1,2,\ldots,n$, където в скобите има $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ събираеми, във всяко от които участват $n-k$ множители. Ако x удовлетворява условието на задачата, от неравенството между средно аритметично и средно геометрично получаваме

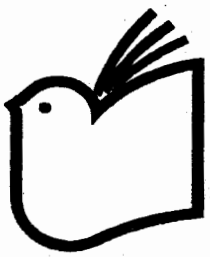
$$f^{(k)}(x)\geq$$

$$\geq k!\binom{n}{k}\sqrt[\binom{n}{k}]{[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)]^{\binom{n-1}{n-k-1}}}.$$

Тъй като $\binom{n-1}{n-k-1}=\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{n}$, то оттук следва, че $f^{(k)}(x)\geq n(n-1)\ldots(n-k+1)(f(x))^{\frac{n-k}{n}}$, $k=1,2,\ldots,n$. От получените неравенства заключаваме, че $f^{(1)}(x).f^{(2)}(x)\ldots f^{(n)}(x)\geq n^n(n-1)^{n-1}\ldots 2^2.1^1(f(x))^{\frac{n-1}{2}}$, с което неравенството е установено. Равенство се достига само ако $x_1=x_2=\cdots=x_n$, т.е. ако $f(x)=(x-x_1)^n$.

Бележка на редакцията: Задача M^+60 е зад. 52 от книгата „Задачи по „елементарна“ математика“ на Б. Михайлов, изд. „Веди“, София, 1995 г. Тя бе приета за публикуване в Математика плюс, бр. 1, 1995, месеци преди появата на горната книга. И трите получени решения са различни от авторовото. Ние предпочетохме да изложим решението на А. Асенов и Г. Пламенов, което може би не е така елегантно, както това на Ст. Атанасов и Б. Михайлов, но има това достойнство, че не използва нищо повече от неравенството между средно аритметично и средно геометрично (доказателствата на Б. Михайлов и Ст. Атанасов използват „неучилищния“ факт, че ако нулите на полинома $f(x)$ са реални, то и нулите на $f'(x)$ също са реални).

Най-сигурният начин да получите търсените от Вас книги.
Във всяко селище на България.
По пощата направо във Вашия дом. По Ваш избор.



ОБЕДИНЕНА БЪЛГАРСКА КНИГОПОЩА

Читатели от цялата страна, поръчвайте книги, речници, енциклопедии

- на корична цена
- доставени във Вашия дом
- надеждно опаковани
- с препоръчана поща (R) или обявена стойност (ОС)
- плащате само част от пощенските разходи

Попълнете талона и ще получите безплатен каталог на ОБЕДИНЕНА БЪЛГАРСКА КНИГОПОЩА.

Предлагаме Ви най-хубавото от

- българската литература
- преводна художествена и научна литература
- класика в оригинал
- литература на руски език
- детска и юношеска литература
- учебни помагала и ръководства
- речници и енциклопедии

НАШИЯТ АДРЕС: 1000 София, пощенска кутия 1396, тел. за справки 87 24 04
ул. Братя Миладинови № 10 (ъгъла с ул. Ал. Стамболийски)

ТАЛОН ЗА КАТАЛОГ

ЕГН ..... Пощ. код ..... Гр./с. .....

жк ..... ул. ..... бл. .....

Име ..... Презиме ..... Фамилия .....

Уважаеми читатели,
Моят опит показва, че учениците от 8 до 11 клас, които използват тази програма, постигат завидни успехи и качества на математически елит. Програмата съдържа необходимата теория, решения на основни типове задачи, и оригинални задачи за самостоятелна работа.

Васил Лазаров

Книгата можете да поръчате на адрес:

София 1421, ул. "Богатица" 23,
бл. АБВ, вх. Б, ап.2,
тел.: (02) 65 91 45,
Васил Лазаров

Списание МАТЕМАТИКА ПЛЮС можете да намерите във всички книжарници на книгоразпространителска фирма "ЗОРА-93" ООД. В тях можете да направите и абонамент за списанието за 1996 г.

"ЗОРА - 93" ООД

Книжарници: гр. София, кв. "Зона Б-5", бл. 7, вх. В
гр. София, ул. "Граф Игнатиев" 15, тел. 80-14-38
гр. Шумен, ул. "8-ми март" 22, тел. 5-75-26
гр. Видин, ул. "Цар Иван Александър", бл. 3-4, тел. 2-00-87
гр. Ямбол, ул. "Васил Карагьозов" 21, тел. 3-56-86
гр. Ботевград, ул. "Гурко" 19
гр. Монтана, ул. "Христо Ботев" 70
гр. Габрово, ул. "Николаевска" 106, тел. 3-25-55
гр. Плевен, хотел "Балкан"

Книжна борса: бул. "Цариградско шосе" 117, щанд 2, тел.-ц. 75-311/282

Купувайте изданията на МАТЕМАТИКА ПЛЮС от нашия оторизиран разпространител "ЗОРА-93"ООД, тел. 77-35-24, тел./факс 75-11-09.

DARIK
Radio

...РАДИОТО !

София - Добрич - Враца - Кюстендил - Г. Оряховица

През 1996 г. очаквайте:

- **Ако кандидатствате във ВУЗ** *подготовка и примерни теми*
- **Ако кандидатствате след 7 клас** *подготовка и примерни теми*
- **Издирване на таланти** *национален конкурс уМ+ за ученици 4, 5, 6 и 7 клас*
- **Олимпиади + подготовка**
- **Кенгуру в България** *френска математическа игра-състезание*
- **М+ томбола – големи награди**

Абонирайте се за сп. МАТЕМАТИКА ПЛЮС
каталожен номер в РП - 1467

ISSN 0861-8321
Цена 75 лв.