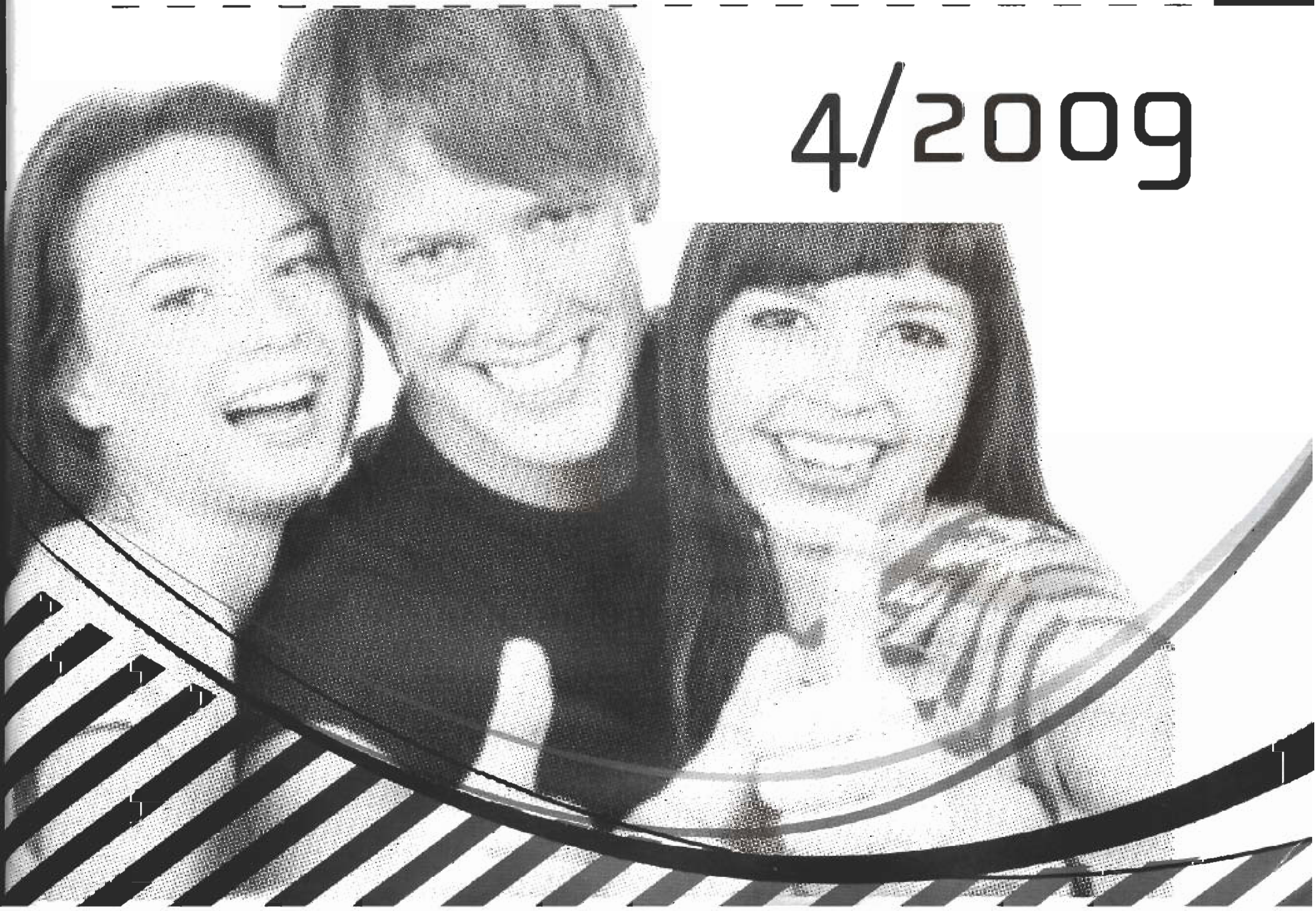
МАТЕМАТИКА+

помагало за
математика и
информатика

4/2009



МАТЕМАТИКА ПЛЮС

помагало по математика и информатика

одобрено от Министерството на образованието, младежта и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 17 (68), Number 4, 2009

Издател: *Математика плюс Х ООД*

Помагалото се издава със съдействието на
Институт по математика и информатика – БАН

Адрес на редакцията:
Институт по математика и информатика – БАН, стаи 517 и 323,
ул. „Акад. Г. Бончев", бл. 8, 1113 София
тел. 979-28-26; 979-38-00, e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат 600×840/8 Печатни коли 9
Дадена за печат на 30. 11. 2009 Подписана за печат на 10.12.2009 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой от списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието, младежта и науката.

Математика плюс
бр. 4, 2009

В БРОЯ:

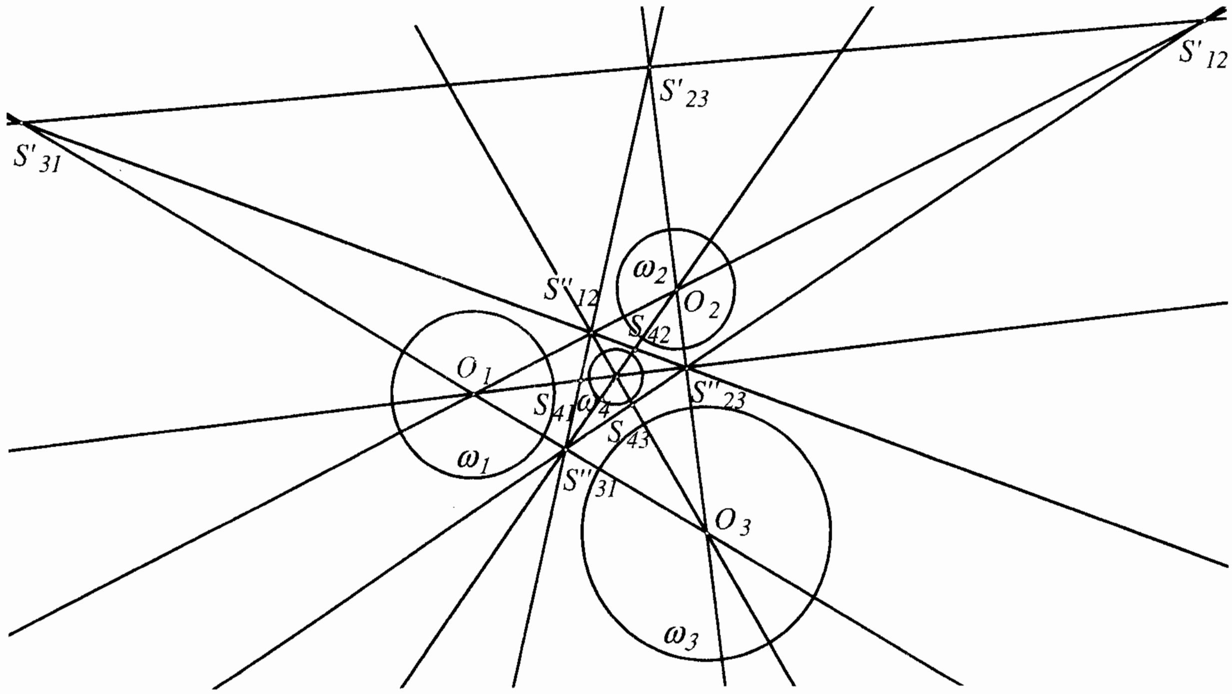
МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и информатиката направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически гимназии и техникумите; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

МНОЖЕСТВО ОТ ХОМОТЕТИИ, СВЪРЗАНО С ОПИСАНИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Една забележителна геометрична връзка между две произволни окръжности от една равнина се изразява във факта, че тези окръжности са винаги хомотетични. Центровете на хомотетия лежат върху централата на двете окръжности, а когато окръжностите имат общи допирателни, центровете на хомотетия съвпадат с пресечните точки на допирателните.

Ако в равнината са дадени три произволни окръжности, то между всеки две от тях се пораждат хомотетии. По този начин се получават шест точки в равнината, които са центрове на съответните хомотетии. Възниква въпросът за определяне на геометричните особености в разположението на тези шест точки. За да се отговори на този въпрос, е достатъчно да се вземе предвид, че произведението на две хомотетии с коефициенти k_1 и k_2, за които $k_1k_2 \neq 1$, е хомотетия с коефициент k_1k_2 и център, лежащ върху правата, определена от центровете на хомотетиите [1].



Фиг. 1.

Непосредствено от това твърдение достигаме до няколко извода за конфигурацията от произволни три окръжности ω_1, ω_2 и ω_3, които могат да се обединят в следната:

Лема 1. *Хомотетиите в множеството на три окръжности* ω_1, ω_2 *и* ω_3 *притежават свойствата:*

1) Хомотетията h_{ij} *с център* S_{ij} *на* ω_i *върху* ω_j *може да се представи като произведение на хомотетия* h_{ik} *с център* S_{ik} *на* ω_i *върху* ω_k *и хомотетия* h_{kj} *с център* S_{kj} *на* ω_k *върху* ω_j, *като* S_{ij} *лежи на правата* $S_{ik}S_{kj}$ $(1 \le i \ne j \ne k \le 3)$.

2) Външните центрове на хомотетия за трите двойки окръжности лежат на една права [1], [2].

3) Всеки два вътрешни центъра на хомотетия лежат на една права с един външен център на хомотетия.

4) Шестте центъра на хомотетия са разположени по три върху четири прави [2].

Твърденията на лема 1 са илюстрирани на фиг. 1. Може да се каже, че те изразяват свойства на взаимодействието между две окръжности посредством трета окръжност. След като ни е известно как две произволни окръжности си взаимодействат хомотетично посредством трета произволна окръжност, можем да търсим геометрични зависимости между двойки окръжности, поставени при някакви специални условия. При тези условия можем да търсим специално разположение на някой от центровете на хомотетия за тези окръжности. Първото, което изглежда естествено за изследване, е към дадени произволни три окръжности ω_1, ω_2 и ω_3 да се добави четвърта окръжност ω_4. Ако ω_4 е произволна, трудно биха се наблюдавали специални връзки в множеството на четири окръжности, които да приличат на тези от лема 1. Затова трябва да поставим ω_4 при специални условия спрямо разположението на ω_1, ω_2 и ω_3. Едно такова условие е тази окръжност заедно с още една от ω_1, ω_2 и ω_3 да има общ център на хомотетия с другите две. Нещо повече, разположението на ω_4 може да е такова, че да има две такива комбинации от двойки окръжности с общ център на хомотетия. Тогава може да се очаква, че и останалите две двойки окръжности имат общ център на хомотетия (Фиг. 1.). Оказва се, че това предположение е изпълнено и може да се формулира по следния начин:

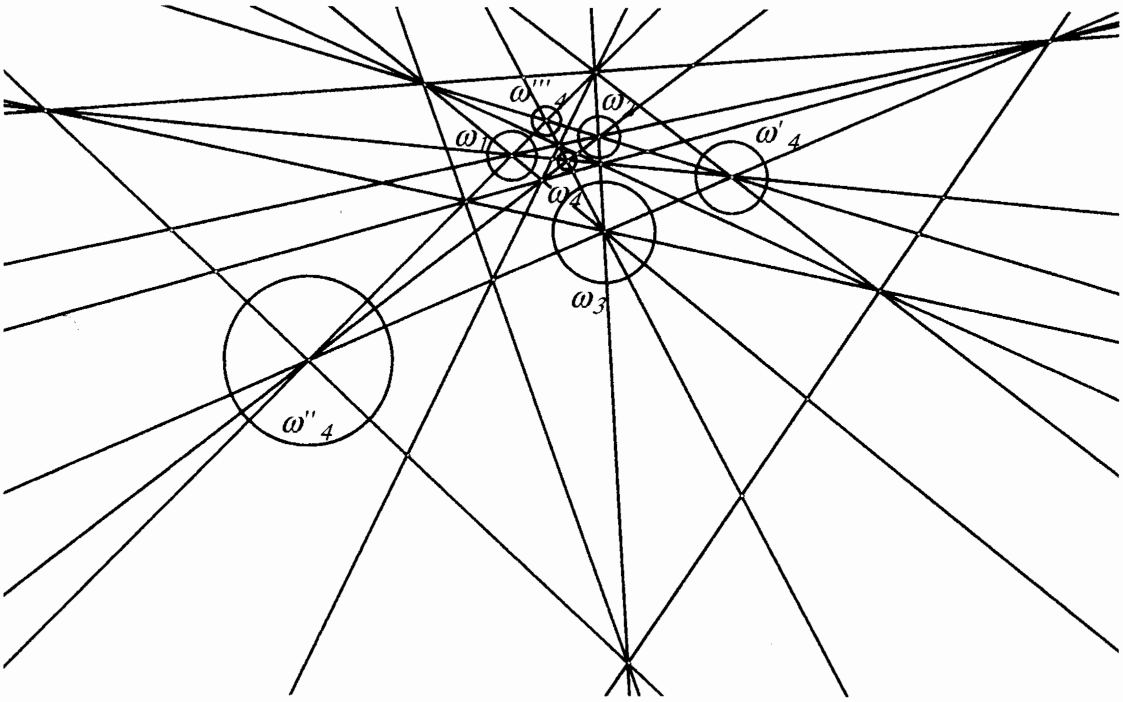
Лема 2. *Ако четири окръжности са разположени по такъв начин в равнината, че две комбинации от по две двойки окръжности имат общ център на хомотетия, то останалите две двойки окръжности също имат общ център на хомотетия.*

Доказателство. Нека S''_{12} е общ център на хомотетия за двойките окръжности ω_1, ω_2 и ω_3, ω_4, нека S''_{23} е общ център на хомотетия за двойките окръжности ω_2, ω_3 и ω_4, ω_1, а S''_{31} е вътрешният център на хомотетия за ω_3 и ω_1 (Фиг. 1.). Ще докажем, че S''_{31} е център на хомотетия за ω_2 и ω_4. Нека ω_j има център O_j и радиус r_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ и $O_2O_4 \cap O_3O_1 = S_0$. От свойствата на хомотетията следва, че са изпълнени равенствата:

$$\frac{\overline{S''_{12}O_1}}{\overline{S''_{12}O_2}} = -\frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{\overline{S''_{23}O_2}}{\overline{S''_{23}O_3}} = -\frac{r_2}{r_3} \text{ и } \frac{\overline{S''_{31}O_3}}{\overline{S''_{31}O_1}} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Правите $O_3S''_{12}$, $O_1S''_{23}$ и O_2S_0 по построение се пресичат в точката O_4. Затова от теоремата на Чева за $\Delta O_1O_2O_3$ и точките S''_{12}, S''_{23} и S_0 е изпълнено равенството:

$$\frac{\overline{S''_{12}O_1}}{\overline{S''_{12}O_2}} \cdot \frac{\overline{S''_{23}O_2}}{\overline{S''_{23}O_3}} \cdot \frac{\overline{S_0O_3}}{\overline{S_0O_1}} = -1.$$



Фиг. 2.

От последното равенство се получава, че $\frac{\overline{S_0O_3}}{\overline{S_0O_1}} = -\frac{r_3}{r_1}$, което съвпада с равенството за точката S''_{31}. Следователно $S_0 \equiv S''_{31}$. Това означава, че точката S''_{31} лежи на правата O_2O_4. Тъй като точките S'_{12}, S''_{23} и S''_{31} (S'_{12} е външен център на хомотетия за ω_1 и ω_2) според лема 1 (приложена към ω_1, ω_2 и ω_3) лежат на една права, то това означава, че правите $S'_{12}S''_{23}$ и O_2O_4 се пресичат в точката S''_{31} (Фиг. 1.). Освен това, външните центрове на хомотетия за трите двойки окръжности, образувани от комбинирането на ω_1, ω_2 и ω_4, лежат на една права (според лема 1), то правата $S'_{12}S''_{23}$ пресича централата O_2O_4 във външния център на хомотетия за окръжностите ω_2 и ω_4. Но както бе показано, тази пресечна точка е S''_{31} и затова S''_{31} е външен център на хомотетия за двойката окръжности ω_2, ω_4. Аналогично на лема 1 за центровете на хомотетия между четирите окръжности се наблюдава следното разположение:

Дванадесетте центъра на хомотетия са разположени по четири върху три прави (Фиг. 1.).

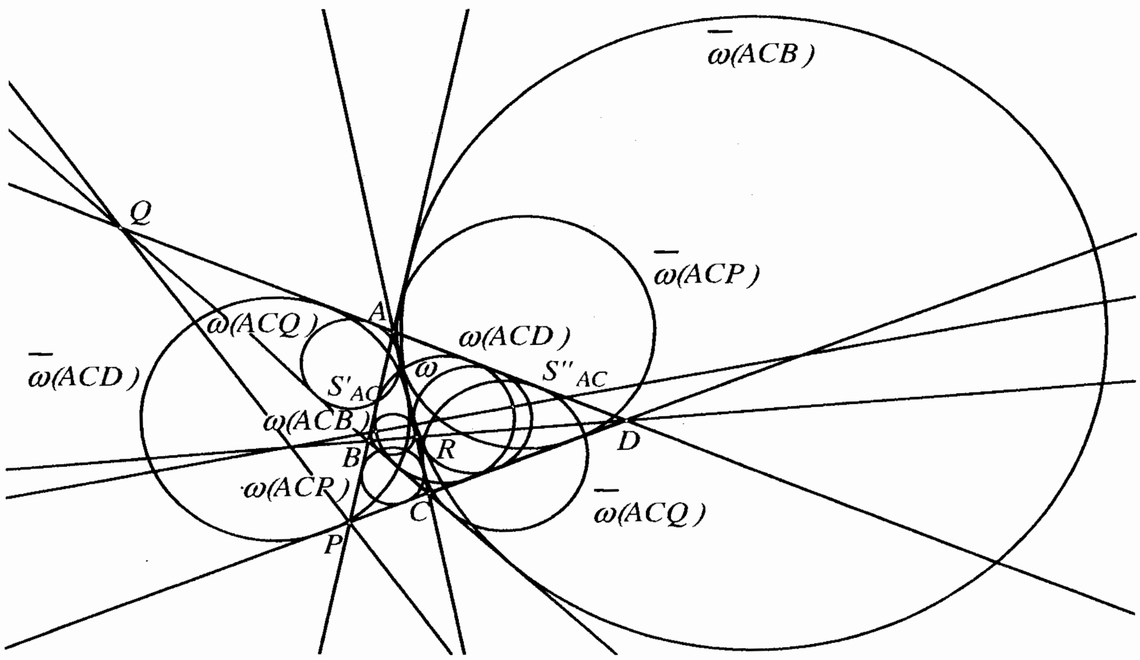
Общият брой на окръжностите, които удовлетворяват лема 2 при фиксирани три окръжности, е четири (Фиг. 2.). Доказателствата в останалите три случая се извършват аналогично на вече разгледания.

Друг походящ пример, който предоставя възможност за изследвания върху разположението на центровете на хомотетия между двойки окръжности и прилагане на изложените идеи, е една от задачите на 49-ата международна олимпиада по математика през миналата година. Задачата е следната:

Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $|BA| \neq |BC|$. Вписаните в триъгълниците ABC и ADC окръжности са означени съответно с ω_1 и ω_2. Известно е, че съществува окръжност ω, която се допира до лъча BA в точка след A, до лъча BC в точка след C и до правите AD и CD. Да се докаже, че общите външни допирателни на ω_1 и ω_2 се пресичат върху ω.

Първото нещо, което прави впечатление в тази задача, е, че съществуването на окръжността ω превръща разглеждания четириъгълник $ABCD$ във *външно описан* за ω. Второ, твърдението на задачата всъщност означава, че външният център на хомотетия за ω_1 и ω_2 е точка от ω. Освен това съществуват *описани* четириъгълници $ABCD$, т. е. такива, за които окръжността ω се допира в точки от отсечките AB, BC, CD и DA. Такива четириъгълници също могат да притежават подобна двойка окръжности с център на хомотетия върху вписаната окръжност ω. Външно вписаните се различават от вписаните четириъгълници само по разположението на окръжността ω по отношение на страните им. Това означава, че няма основателни причини във връзка с вписаната окръжност ω единият вид четириъгълници да притежава по-специални свойства от другия. Затова имаме достатъчно основания да изследваме и двата вида четириъгълници по отношение на разположението върху ω на някои от центровете на хомотетия за вписаните окръжности на триъгълници, образувани от страни и диагонали на съответните видове четириъгълници.

Нека $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник. Въвеждаме означенията $AB \cap CD = P$, $BC \cap DA = Q$ и $AC \cap BD = R$. Тези точки ще наричаме диагонални точки за $ABCD$. Ще предполагаме, че и трите диагонални точки съществуват. Правите AC и BD ще наричаме вътрешни диагонали, а PQ външен диагонал за $ABCD$. Вписаната окръжност за ΔACB ще означаваме с $\omega(ACB)$, а външно вписаната окръжност за същия триъгълник, лежаща в $\angle ABC$, ще означаваме с $\overline{\omega}(ACB)$ (последната буква отговаря на ъгъла, в който се намира окръжността). Аналогични означения ще използваме и за окръжностите, вписани в другите триъгълници, които имат за върхове някои три от точките A, B, C, D, P, Q и R.



Фиг. 3.

Преди да започнем изследванията си върху местоположението на центровете на хомотетия за определени окръжности, трябва да имаме идея точно кои двойки окръжности да разглеждаме. Известно е, че четириъгълникът $ABCD$ е описан точно когато окръжностите $\omega(ACB)$ и $\omega(ACD)$ са допирателни [3]. Допирната точка е център на хомотетия за тези окръжности и местоположението му е известно – в случая се намира върху правата AC. Това ни подсказва да разгледаме двойките вписани окръжности за триъгълниците с обща страна по всеки от трите диагонала на описан (външно описан) за дадена окръжност ω четириъгълник $ABCD$, за да определим кои от тях са допирателни. Наблюденията ни довеждат до формулирането на следните резултати:

Твърдение 1. *Четириъгълникът $ABCD$ е описан за окръжност тогава и само тогава, когато поне една от следните двойки окръжности са допирателни:*

1) $\omega(ACB)$ *и* $\omega(ACD)$, $\overline{\omega}(ACB)$ *и* $\overline{\omega}(ACD)$, $\omega(ACP)$ *и* $\omega(ACQ)$, $\overline{\omega}(ACP)$ *и* $\overline{\omega}(ACQ)$ (Фиг. 3.)*;*

2) $\omega(BDA)$ *и* $\omega(BDC)$, $\overline{\omega}(BDA)$ *и* $\overline{\omega}(BDC)$, $\omega(BDP)$ *и* $\omega(BDQ)$, $\overline{\omega}(BDP)$ *и* $\overline{\omega}(BDQ)$*;*

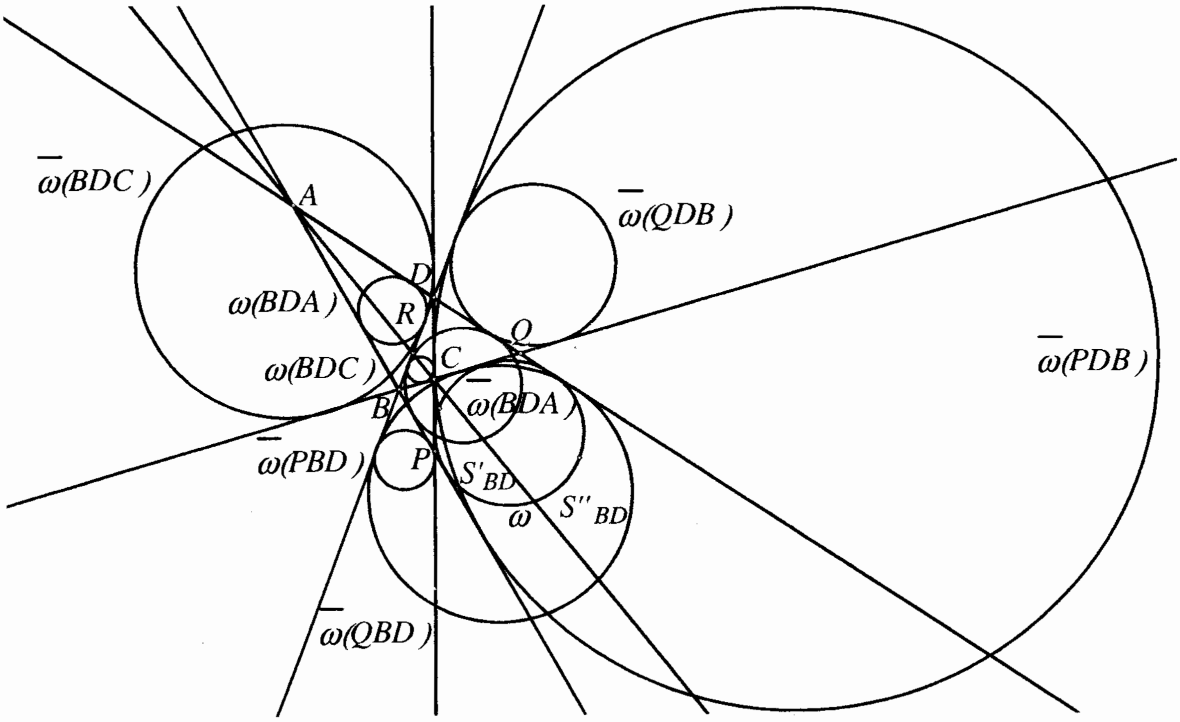
3) $\omega(PQB)$ *и* $\omega(PQD)$, $\overline{\omega}(PQB)$ *и* $\overline{\omega}(PQD)$, $\overline{\omega}(AQP)$ *и* $\overline{\omega}(CPQ)$, $\overline{\omega}(APQ)$ *и* $\overline{\omega}(CQP)$.

Твърдение 2. *Четириъгълникът $ABCD$ е външно описан за окръжност, намираща се в $\angle ABC$, тогава и само тогава, когато поне една от следните двойки окръжности са допирателни:*

1) $\omega(ACB)$ *и* $\overline{\omega}(ACD)$, $\overline{\omega}(ACB)$ *и* $\omega(ACD)$, $\overline{\omega}(PAC)$ *и* $\overline{\omega}(QAC)$, $\overline{\omega}(PCA)$ *и* $\overline{\omega}(QCA)$ (Фиг. 4.)*;*

2) $\overline{\omega}(ABD)$ *и* $\overline{\omega}(CBD)$, $\overline{\omega}(ADB)$ *и* $\overline{\omega}(CDB)$, $\overline{\omega}(PBD)$ *и* $\overline{\omega}(QBD)$, $\overline{\omega}(PDB)$ *и* $\overline{\omega}(QDB)$*;*

3) $\omega(PQB)$ *и* $\overline{\omega}(PQD)$, $\overline{\omega}(PQB)$ *и* $\omega(PQD)$, $\omega(PQA)$ *и* $\overline{\omega}(PQC)$, $\overline{\omega}(PQA)$ *и* $\omega(PQC)$.



Фиг. 4.

Доказателството на твърдение 1 се получава от изразяването на дължините на допирателните към вписана в даден триъгълник окръжност чрез дължините на страните на този триъгълник и равенството $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$, което изразява необходимо и достатъчно условие, за да бъде $ABCD$ описан [3]. Доказателството на твърдение 2 се получава по същия начин, но от еквивалентните равенства $|AB|+|AD|=|CB|+|CD|$, $|AP|+|CP|=|AQ|+|CQ|$ и $|BP|+|DP|=|BQ|+|DQ|$. От твърдение 1 се вижда, че за двойките допиращи се окръжности, прилежащи на вътрешните диагонали, всички вътрешни центрове на хомотетия (допирните точки) лежат на една права (съответния диагонал), а за прилежащите на външния диагонал това се отнася за външните центрове на хомотетия. От твърдение 2 се наблюдава подобна картина, като вътрешният диагонал BD, лежащ в ъгъла, определящ вписаната окръжност ω, се държи като външния диагонал на предишния случай, а външният диагонал PQ се държи като вътрешен.

Всяко от горните твърдения показва, че всеки диагонал определя триъгълници, които се групират по два с по две двойки допирателни окръжности. Като се разгледат всеки два такива триъгълника и се комбинират окръжностите, които не са допирателни и са вписани в различни триъгълници, се достига до следните изводи:

Твърдение 3. *Всеки четириъгълник $ABCD$, описан за окръжност ω, притежава следните свойства:*

1) двойките окръжности $\omega(ACB)$, $\overline{\omega}(ACD)$ и $\omega(ACP)$, $\omega(ACQ)$ имат общ вътрешен център на хомотетия S'_{AC}, а двойките окръжности $\overline{\omega}(ACB)$, $\omega(ACD)$ и $\overline{\omega}(ACP)$, $\overline{\omega}(ACQ)$ имат общ вътрешен център на хомотетия S''_{AC}, като точките S'_{AC} и S''_{AC} са разположени диаметрално противоположно върху ω (Фиг. 3.);

2) двойките окръжности $\omega(BDA)$, $\overline{\omega}(BDC)$ и $\overline{\omega}(BDP)$, $\omega(BDQ)$ имат общ вътрешен център на хомотетия S'_{BD}, а двойките окръжности $\overline{\omega}(BDA)$, $\omega(BDC)$ и $\omega(BDP)$, $\overline{\omega}(BDQ)$ имат общ вътрешен център на хомотетия S''_{BD}, като точките S'_{BD} и S''_{BD} са разположени диаметрално противоположно върху ω;

3) външният център на хомотетия S'_{PQ} за окръжностите $\omega(PQB)$ и $\overline{\omega}(PQD)$ съвпада с вътрешния център на хомотетия за окръжностите $\overline{\omega}(CPQ)$ и $\overline{\omega}(AQP)$, а външният център на хомотетия S''_{PQ} за окръжностите $\overline{\omega}(PQB)$ и $\omega(PQD)$ съвпада с вътрешния център на хомотетия за окръжностите $\overline{\omega}(CQP)$ и $\overline{\omega}(APQ)$, като точките S'_{PQ} и S''_{PQ} са разположени диаметрално противоположно върху ω.

Твърдение 4. *Всеки четириъгълник $ABCD$, външно описан за окръжност ω, намираща се в $\angle ABC$, притежава следните свойства:*

1) външният център на хомотетия S'_{AC} за окръжностите $\omega(ACB)$ и $\omega(ACD)$ съвпада с вътрешния център на хомотетия за окръжностите $\overline{\omega}(PAC)$ и $\overline{\omega}(QCA)$, а външният център на хомотетия S''_{AC} за окръжностите $\overline{\omega}(ACB)$ и $\overline{\omega}(ACD)$ съвпада с вътрешния център на хомотетия за окръжностите $\overline{\omega}(PCA)$ и $\overline{\omega}(QAC)$, като точките S'_{AC} и S''_{AC} са разположени диаметрално противоположно върху ω (Фиг. 4.);

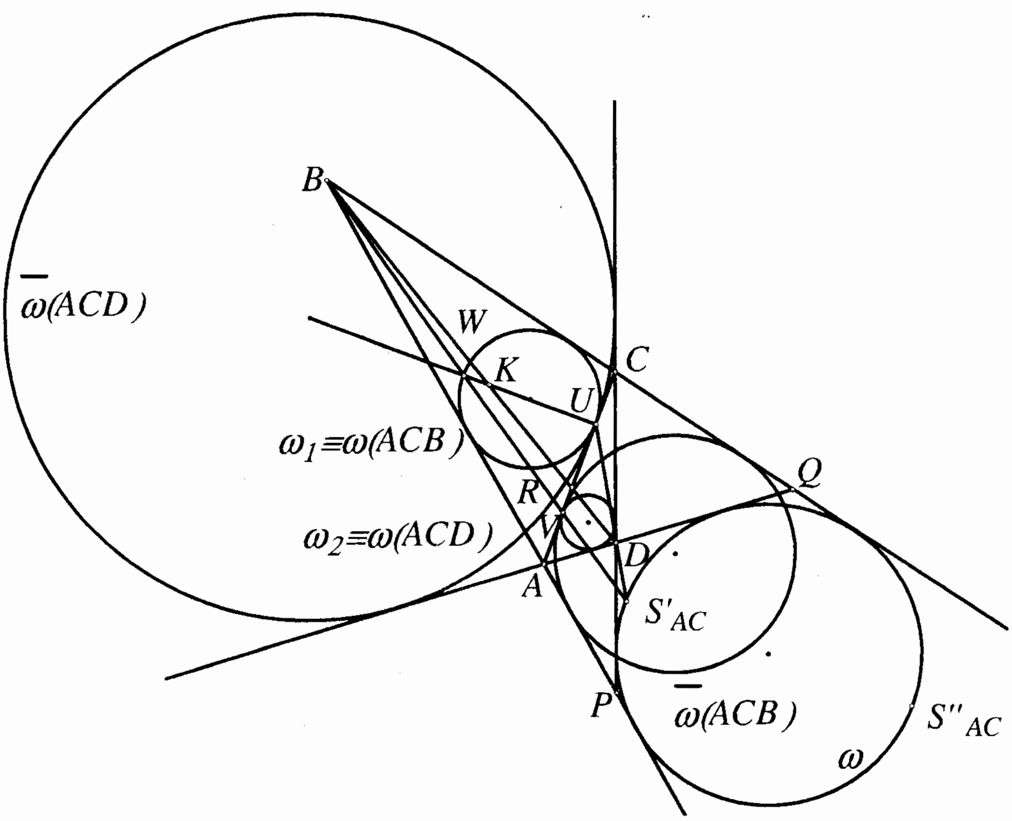
2) двойките окръжности $\overline{\omega}(ADB)$, $\overline{\omega}(CBD)$ и $\overline{\omega}(PDB)$, $\overline{\omega}(QBD)$ имат общ външен център на хомотетия S'_{BD}, а двойките окръжности $\overline{\omega}(ABD)$, $\overline{\omega}(CDB)$ и $\overline{\omega}(PBD)$, $\overline{\omega}(QDB)$

имат общ външен център на хомотетия S''_{BD}, като точките S'_{BD} и S''_{BD} са разположени диаметрално противоположно върху ω;

3) двойките окръжности $\omega(PQB), \omega(PQD)$ и $\omega(PQA), \omega(PQC)$ имат общ вътрешен център на хомотетия S'_{PQ}, а двойките окръжности $\overline{\omega}(PQB), \overline{\omega}(PQD)$ и $\overline{\omega}(PQA), \overline{\omega}(PQC)$ имат общ вътрешен център на хомотетия S''_{PQ}, като точките S'_{PQ} и S''_{PQ} са разположени диаметрално противоположно върху ω.

Доказателствата на отделните случаи в твърдения 3 и 4 се извършват по един и същи начин, затова ще се спрем само на доказателството на случай 1) в твърдение 4, който е свързан със задачата от олимпиадата.

Нека $\omega_1 \equiv \omega(ACB)$ и $\overline{\omega}(ACD)$ се допират в точка U, а $\omega_2 \equiv \omega(ACD)$ и $\overline{\omega}(ACB)$ – в точка V (Фиг. 5.). Точките U и V лежат върху правата AC и са външни центрове на хомотетии h_1 и h_2 между съответните двойки окръжности. Външният център на хомотетия h_{12} (пресечната точка на общите външни допирателни) за ω_1 и ω_2 означаваме с S'_{AC}. Забелязва се, че $\overline{\omega}(ACD)$ се преобразува в ω_2 чрез хомотетия h' с външен център D, а $\overline{\omega}(ACB)$ – в ω_1 чрез хомотетия h'' с външен център B.



Фиг. 5.

От лема 1 следва, че хомотетията h_{12} може да се представи като произведение на хомотетиите h_1 и h'. Затова точките U, D и S'_{AC} лежат на една права (Фиг. 5.). По аналогичен начин h_{12} може да се представи като произведение на хомотетиите h_2 и h'', поради което точките V, B и S'_{AC} лежат на една права. Следователно правите UD и VB се пресичат в точката S'_{AC} (Фиг. 5.). Нека сега $\overline{h}_1$ е хомотетията с център D, която преобразува $\overline{\omega}(ACD)$ в ω, а $\overline{h}_2$ е хомотетията с център B, която преобразува $\overline{\omega}(ACB)$ в ω. Нека още $\overline{h}$ е хомотетията с вътрешен център между $\overline{\omega}(ACD)$ и $\overline{\omega}(ACB)$. Тогава U е образ на V при $\overline{h}$. Хомотетията $\overline{h}$ може да се представи като произведение на $\overline{h}_1$ и $\overline{h}_2^{-1}$. Следователно центърът на $\overline{h}$ лежи върху правата BD. От друга страна този център лежи върху общата вътрешна допирателна на окръжностите $\overline{\omega}(ACD)$ и $\overline{\omega}(ACB)$. Следователно центърът на $\overline{h}$ е пресечната точка R на вътрешните диагонали.

Хомотетията $\overline{h}_1$ преобразува U в първата пресечна точка T на правата UD с ω, а хомотетията $\overline{h}_2$ преобразува V в първата пресечна точка T' на правата VB с ω. Но точката V се преобразува в T чрез произведението на хомотетиите $\overline{h}$ и $\overline{h}_1$. Следователно $T' \equiv T$. По този начин получихме, че правите UD и VB се пресичат в точката T от ω. Но както беше показано по-рано, същите прави се пресичат в точката S'_{AC}. С това е доказано, че външният център на хомотетия S'_{AC} за ω_1 и ω_2 е точка от ω. Това всъщност е решението на формулираната по-рано задача. По аналогичен начин се получава, че външният център на хомотетия S''_{AC} за $\overline{\omega}(ACD)$ и $\overline{\omega}(ACB)$ е точка от ω, която се получава от пресичането на правите UB и VD.

Нека BV пресича за първи път ω_1 в точката W (Фиг. 5.). Хомотетията $h''^{-1}\overline{h}$ преобразува ω_1 в $\overline{\omega}(ACD)$ и точката W в U. Точките W и U лежат на една права с центъра K на тази хомотетия (вътрешният център на хомотетия за тези окръжности) (Фиг. 5.). Тъй като U също е център на хомотетия за тези окръжности, то точките U, W и K лежат върху централата на ω_1 и $\overline{\omega}(ACD)$. Следователно U и W са диаметрално противоположни за ω_1 (Фиг. 5.). Хомотетията с център B, която преобразува ω_1 в ω, изпраща точките W и U съответно в S'_{AC} и S''_{AC}. Следователно точките S'_{AC} и S''_{AC} са диаметрално противоположни за ω (Фиг. 5.). Относно другите две двойки окръжности $\overline{\omega}(PAC), \overline{\omega}(QCA)$ и $\overline{\omega}(PCA)$, $\overline{\omega}(QAC)$, присъстващи в тази част на твърдение 4, е ясно, че съответните центрове на хомотетия са диаметрално противоположни точки от ω по аналогични на вече установените причини. Остава да се съобрази, че четворките окръжности $\omega(BDA)$, $\omega(BDC)$, $\overline{\omega}(PBD)$, $\overline{\omega}(QDB)$ и $\overline{\omega}(BDA)$, $\overline{\omega}(BDC)$, $\overline{\omega}(PDB)$, $\overline{\omega}(QBD)$ притежават свойствата, описани в лема 2, за да се установи, че съответните центрове на хомотетия съвпадат. С това първата част на твърдение 4 е напълно доказана.

Да обърнем внимание, че всички разгледани твърдения се отнасят за четириъгълници без успоредни страни. Не е трудно обаче да се забележат разликите на тези случаи с разгледаните. В тези случаи някои от триъгълниците няма да съществуват, защото няма да съществува някоя диагонална точка (в смисъл на крайна точка). Освен това е ясно, че няма външно описани трапец и успоредник. Съществуват обаче делтоиди, които са едновременно описани и външно описани. Всъщност твърдения 3 и 4 отразяват факта, че всеки описан (външно описан) четириъгълник (за който всички диагонални точки са крайни) притежава шест забележителни точки върху вписаната си окръжност. Когато четириъгълникът е трапец, точките са четири и са разположени във върховете на правоъгълник. За ромб тези точки също са четири, но са разположени във върховете на квадрат. При делтоида върху всяка от вписаните му окръжности точките са по четири, разположени във върховете на два хомотетични квадрата.

В заключение ще отбележим, че от гледна точка на тук разгледаните въпроси основните затруднения при решаване на споменатата олимпиадна задача са свързани със забелязването на двете допълнителни окръжности и хомотетичните им взаимодействия с дадените по условие окръжности. Освен това, частта на твърдение 4, свързана с тази задача, дава информация и за хомотетичната връзка между допълнителните окръжности. Техните общи външни допирателни също се пресичат в точка от ω, която е диаметрално противоположа на точката, определена в твърдението на задачата.

Литература

[1] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Част I. Наука, Москва, 1986.

[2] Й. Табов. Хомотетията в задачи. Народна просвета, София, 1989.

[3] Г. Паскалев. Работата в кръжока по математика. Част I. Народна просвета, София, 1984, с. 200-201.

A Set of Homotheties Connected with Circumscribed Quadrilaterals

Sava Grozdev, Vesselin Nenkov

Abstract. One of the problems of the International Mathematical Olympiad 2009 gives some possibilities to consider homothety centers of circle couples. Properties of circumscribed quadrilaterals are examined in the paper and some generalizations of the Olympiad problem are proposed. The GEOMETER'S SKETCHPAD software is used as a heuristic tool in discovering new geometric facts.
