

# МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ



София, 2012

Съюз на математиците в България

**МАТЕМАТИКА И  
МАТЕМАТИЧЕСКО  
ОБРАЗОВАНИЕ**

Доклади на Четиридесет и първата пролетна  
конференция на Съюза на математиците в България  
Боровец, 9–12 април, 2012



Union of Bulgarian Mathematicians

**MATHEMATICS AND  
EDUCATION IN  
MATHEMATICS**

Proceedings of the Forty First Spring Conference of the  
Union of Bulgarian Mathematicians  
Borovetz, April 9–12, 2012

Докладите се издават със съдействието на  
Института по математика и информатика на БАН

# Четиридесет и първа пролетна конференция на Съюза на математиците в България

Боровец, 9–12 април 2012 г.

## Програмен комитет:

### *Председател:*

чл.-кор. проф. д-мн Юлиан Ревалски –  
ИМИ, БАН

### *Секретари:*

гл.ас. д-р Георги Бояджиев –  
ИМИ, БАН

гл.ас. д-р Красимира Иванова –  
ИМИ, БАН

ас. Албена Василева – ИМИ, БАН

### *Членове:*

чл.-кор. проф. д-мн Веселин Дренски –  
ИМИ, БАН

проф. д-мн Сава Гроздев – ИМИ, БАН

проф. д-мн Румел Даскалов –  
ТУ, Габрово

проф. д-мн Светозар Маргенов –  
ИИКТ, БАН

проф. д-мн Апжела Славова –  
ИМИ, БАН

проф. д-мн Петър Стапчев – ИМИ, БАН

проф. д-мн Йордан Табов – ИМИ, БАН

проф. д-мн Николай Янев – ИМИ, БАН

доц. д-р Петя Аснова – НБУ

доц. д-р Надежда Рибарска – ФМИ, СУ

доц. д-р Красен Стефанов – ФМИ, СУ

доц. д-р Иван Топов – ФМИ, СУ

Силвия Кънчева – държавен  
експерт в МОМН

Снежинка Матакисва – главен

експерт в МОМН

Павел Петров – Плевен

## Организационен комитет:

### *Почетни членове:*

Здравко Димитров – Областен управител  
на Област Пловдив

Иван Тотев – Кмет на Община Пловдив

Илко Николов – Председател на  
Общински съвет – Пловдив

### *Председател:*

проф. д-р Асен Рахнев – Декап на ФМИ, ПУ

### *Членове:*

проф. д-мн Снежана Христова – ФМИ, ПУ

проф. д-р Димитър Мекеров – ФМИ, ПУ

проф. д-р Николай Кюркчиев – ФМИ, ПУ

доц. д-р Антоан Илиев – ФМИ, ПУ

Председател на секция на СМБ–Пловдив

доц. д-р Евгения Ангелова – ФМИ, ПУ

доц. д-р Коста Гъргов – ФМИ, ПУ

доц. д-р Манчо Манев – ФМИ, ПУ

доц. д-р Христо Крушков – ФМИ, ПУ

гл.ас. д-р Ангел Голев – ФМИ, ПУ

гл.ас. д-р Ашна Малипова – ФМИ, ПУ

гл.ас. д-р Иван Шотлеков – ФМИ, ПУ

гл.ас. Стефка Апсва – ФМИ, ПУ

гл.ас. Тодорка Терзиева – ФМИ, ПУ

ас. Никола Вълчапов – ФМИ, ПУ

ас. Кремена Стефанова – ФМИ, ПУ

Иванка Киркова – Началник РИО Пловдив

Зара Дапаилова – старши експерт в РИО

Венета Табакова – старши експерт в РИО

Ивайло Старибратов – Директор на ОМГ

Бистра Тапсва – ОМГ Пловдив

Цветана Димитрова – ОМГ Пловдив

*Технически секретар:* Красимира Карабашева – СМБ

*Редколегия:* проф. д-мн Петър Русев,

гл.ас. д-р Георги Бояджиев, гл.ас. д-р Красимира Иванова, ас. Албена Василева

© Съюз на математиците в България, 2012

Формат: 1000 × 700/16

Дата за печат на 06.03.2012 г.

Тираж 400

Печатни коли 26

Подписана за печат на 16.03.2012 г.

ISSN 1313-3330

## СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР .....	3
-----------------	---

### ЮБИЛЕИ

<i>Петър Кендеров, Андрей Андреев, Стефка Димова, Светослав Марков.</i> Академик Благовест Сендов на 80 години .....	7
<i>Иван Димовски.</i> Давид Хилберт – По случай 150-годишнината от рождението му .....	23
<i>Грозьо Стапилов.</i> Николаџ Лобачевски и Янош Бояй – първи създатели на неевклидова геометрия .....	34
<i>Радослав Павлов.</i> Алан Тюринг – енигматичният гений на информационната ера .....	45

### ДОКЛАДИ ПО ПОКАНА

<i>Mitrofan M. Choban, Petar S. Kenderov, Warren B. Moors<sup>#</sup>.</i> Pseudo-compact semi-topological groups .....	53
<i>Петър Попиванов.</i> Разпределение на простите числа и някои приложения	61
<i>Tsvetomir Tsachev.</i> Optimal control of heterogeneous systems .....	70
<i>Аврам Ескенази.</i> Софтуер за бизнеса или бизнес със софтуера .....	83
<i>Първан Е. Първанов.</i> Теглови апроксимации с оператори от тип на Гудман-Шарма .....	93
<i>Djurdjica Такаџи.</i> Visualization of problems' solution .....	101
<i>Татяна Ф. Сергеева.</i> Актуални проблеми школногo математического образования .....	107

---

<sup>#</sup>Speaker invited by the Programme Committee, whose talk is based on this article.

## ДИСКУСИИ И СЕМИНАРИ

<i>Силвия Къпчева, Коста Гъров, Красимир Асенов.</i> Дискусия „Националните състезания по ИТ – състояние и перспективи“ .....	115
<i>Георги Туларов, Аврам Ескенази, Даниела Дурева.</i> Дискусия „Квалификацията на учителите по информатика и информационни технологии – реалности, предизвикателства, перспективи“ .....	116
<i>Пламен Матеев, Марусия Славчова-Божкова, Снежинка Матакиева.</i> Дискусия „Обучението по комбинаторика и статистика – реалност и перспективи“ .....	118
<i>Красимир Марков, Стоян Порязов, Йордан Табов.</i> Дискусия „Информационно моделиране – същност и приложения в изследванията, образованието и бизнеса“ .....	120
<i>Петър Кецдеров, Евгения Сендова.</i> Семинар „Изследователският подход в образованието по математика и информатика“ – практически семинар в рамките на европейския проект „Фибоначи“ .....	122
<i>Мадлен Христова, Стелiana Кокинова, Елена Маринова.</i> Семинар „Ще повлияе ли програмата за международно оценяване на учениците върху практиките за обучение и оценяване по математика в българското училище?“ .....	124

## СЕКЦИЯ А: МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРУКТУРИ

<i>Alexander Arhangel'skii, Mitrofan Choban, Ekaterina Mihaylova.</i> About homogeneous spaces and conditions of completeness of spaces .....	129
<i>Alexander Arhangel'skii, Mitrofan Choban, Ekaterina Mihaylova.</i> About homogeneous spaces and the Baire property in remainders.....	134
<i>Alexander Arhangel'skii, Mitrofan Choban, Ekaterina Mihaylova.</i> About topological groups and the Baire property in remainders.....	139
<i>Asen Bojilov, Nedyalko Nenov.</i> An inequality for generalized chromatic graphs	143
<i>Georgi S. Boychev.</i> On a summability method defined by means of Hermite polynomials.....	148
<i>Rumen Dangovski, Kalina Petrova.</i> Self-avoiding walks in the plane.....	152
	409

<i>Ilinka Diinitrova, Tsvetelina Mladenova.</i> Classification of the maximal subsemi-groups of the semigroup of all partial order-preserving transformations ..	158
<i>Ivan Dimovski, Yulian Tsankov.</i> Exact solutions of nonlocal boundary value problems for one- and two-dimensional heat equation.....	163
<i>Tsvetan Hristov, Nedyu Popivanov, Manfred Schneider.</i> Quasi-regular solutions for 3D equations of Tricomi and Keldish types.....	173
<i>Snezhana Hristova, Kremena Stefanova, Liliana Vankova.</i> Discrete generalization of Gronwall-Bellman inequality with maxima and application.....	180
<i>Lyudmil Karandzhulov, Neli Sirakova.</i> Asymptotic expansion of solution for almost regular and weakly perturbed systems of ordinary differential equations .....	185
<i>Nedyu Popivanov, Aleksey Nikolov.</i> Singular solutions of Protter's problem for a class of 3-D hyperbolic equations .....	191
<i>Petra Staynova.</i> A note on quasi-Lindelöf spaces .....	197
<i>Simeon Stefanov, Velika Dragieva.</i> Evolution of sets systems and homotopy groups of spheres.....	202

## СЕКЦИЯ Б: МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ИНФОРМАТИКА

<i>Boyko Bantchev.</i> Fraction space revisited .....	209
<i>Yani Chaushev, Miloslav Sredkov, Krassimir Manev.</i> CORE: A multi-purpose programming contest repository system .....	219
<i>Todor Cholakov, Dimiter Birov.</i> Automated software reengineering model and framework .....	225
<i>Peter Gospodinov, Dobri Dankov, Vladimir Roussinov, Stefan Stefanov.</i> Couette gas flow between cylinders with different temperature.....	232
<i>Mihail Konstantinov, Vesela Pasheva, Petko Petkov.</i> Numerical issues in using MATLAB.....	239

<i>Krassimir Manev, Neli Maneva, Haralambi Haralambiev. Extracting business rules through static analysis of the source code</i> .....	247
<i>Zdravko Slavov. On the optimal allocations in economy with fixed total resources</i> .....	254
<i>Magdalina Todorova. Verification of procedural programs via building their generalized nets models</i> .....	259
<i>Tihomir Trifonov, Tsvetanka Georgieva-Trifonova. Warehousing and OLAP analysis of data about unique bulgarian bells</i> .....	266
<i>Evelina Veleva. Some marginal densities of the Wishart distribution</i> .....	273

## СЕКЦИЯ В: ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

<i>Jordanka Angelova, Petar Halachev. Monitoring in educational process via students grade points</i> .....	281
<i>Elena Bozhinovska, Linda Fahlberg-Stojanovska. Benefits of using virtual manipulatives in math lessons in primary school</i> .....	288
<i>Daniela Orozova, Veselina Jecheva. An intelligent approach to electronic test results evaluation</i> .....	293
<i>Zoran Trifunov, Linda Fahlberg-Stojanovska. Validating the use of technology in mathematics education with statistics</i> .....	299
<i>Петя Асенова, Марин Маринов. Проблеми на бакалавърските и магистърските програми по информатика у нас</i> .....	304
<i>Димитър Белев, Антон Белев, Калоян Буковски. Едно свойство на точката на Лемоан</i> .....	311
<i>Сава Гроздев, Живко Желев. Емпиричната индукция като евристичен похват в решаването на математически задачи</i> .....	318
<i>Сава Гроздев, Иванка Марашева-Делинова, Емил Делинов. Електронна библиотека от ученически проекти по математика и информационни технологии</i> .....	325

<i>Сава Гроздев, Веселин Ненков. Една забележителна точка на триъгълника</i>	330
<i>Коста Гъров, Стефка Анева, Елена Тодорова. Някои нови методически аспекти на преподаването на бази от данни в часовете по информационни технологии в 10. клас</i>	338
<i>Коста Гъров, Виоислав Радев. Върху едно приложение на Macromedia Flash при решаване на задачи по Дискретна математика в началното училище</i>	345
<i>Лиляна Каракашева. Съвременен модел на семинарни упражнения, осигуряващ повишаване ефективността на обучението по математически анализ</i>	351
<i>Емил Келеведжиев, Зорница Дженкова. Състезателни задачи по информатика за 9–10 клас</i>	359
<i>Камелия Колева. Някои подходи за решаване на логически задачи от тип тричленна релация</i>	366
<i>Борислав Лазаров, Ивайло Кортезов. Решаване на задачи с помощта на таблица</i>	375
<i>Росен Николаев. Максимален брой корени на един тип модулни уравнения</i>	380
<i>Юлия Нинова. Необходимост и достатъчност или аналитично и синтетично решение на задачи с параметър</i>	386
<i>Марусия Славчова-Божкова, Рене Камова. Обучението по Статистика в рамките на средното образование в Англия</i>	395
<i>Бистра Царева. Интерактивно обучение по синтетична геометрия в динамична среда</i>	401



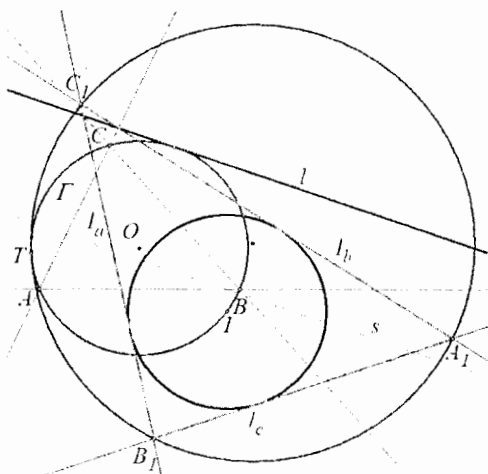
## ЕДНА ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНА ТОЧКА НА ТРИЪГЪЛНИКА

Сава Гроздев, Веселин Ненков

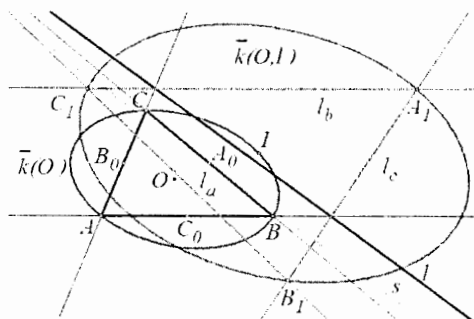
С помощта на една от задачите от Международната олимпиада по математика през 2011 г. е открита една нова забележителна точка за триъгълник. Доказани са различни свойства на тази точка и са намерени аналози на твърдението от олимпиадната задача, свързани с конични сечения и хармонично спрегнати прави.

Една от най-интересните задачи на 52-та международна олимпиада по математика през т.г. в Холандия е задача 6 (японско предложение) [1]. Задачата е следната:

Нека  $l$  е допирателна към описаната окръжност  $\Gamma$  на остроъгълен  $\triangle ABC$ . С  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$  са означени симетричните прави на  $l$  съответно спрямо правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника, образуван при пресичането на  $l_a$ ,  $l_b$  и  $l_c$ , се допира до  $\Gamma$ . (Фиг. 1)



Фиг. 1



Фиг. 2

Оказва се, че определената в задачата конфигурация е изключително богата. Нека  $O$  е центърът на  $\Gamma$ , а  $l_b \cap l_c = A_1$ ,  $l_c \cap l_a = B_1$  и  $l_a \cap l_b = C_1$ . С  $I$  означаваме центъра на вписаната окръжност за  $\triangle A_1B_1C_1$ , а с  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$  – центровете на

външно вписаните за  $\Delta A_1 B_1 C_1$  окръжности, лежащи съответно в ъглите с върхове  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Забележителен факт е, че точката  $I$  лежи върху  $\Gamma$  (Фиг. 1). Нещо повече, ако се откажем от свойството на  $l$  да е допирателна, този факт остава в сила за произволна права  $l$  от равнината на  $\Delta ABC$  (доказателството е изложено по-долу). Именно точката  $I$  е повооткритата точка. В случай, че  $\Delta ABC$  е тъпоъгълен, върху  $\Gamma$  лежи тази от точките  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , която съответства на тъпия ъгъл на  $\Delta ABC$ . Така, използвайки въведените означения, получаваме следното:

**Твърдение 1.** *За произволна права  $l$  от равнината на даден  $\Delta ABC$  точно един от центровете  $I$ ,  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$  на вписаните в  $\Delta A_1 B_1 C_1$  окръжности лежи върху  $\Gamma$ .*

В по-нататъшните разглеждания използваме барицентрични координати спрямо дадения  $\Delta ABC$ , като  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  и  $C(0, 0, 1)$  [2]. С  $A_0\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $B_0\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$  и  $C_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  означаваме средите съответно на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ . Аналогично разглеждаме барицентрични координати и спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$ , като  $A_1(1, 0, 0)$ ,  $B_1(0, 1, 0)$  и  $C_1(0, 0, 1)$ . Валидно е следното:

**Твърдение 2.** *Координатите спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$  на тази от точките  $I$ ,  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , която лежи върху  $\Gamma$ , съвпадат с координатите на  $O$  спрямо  $\Delta ABC$ .*

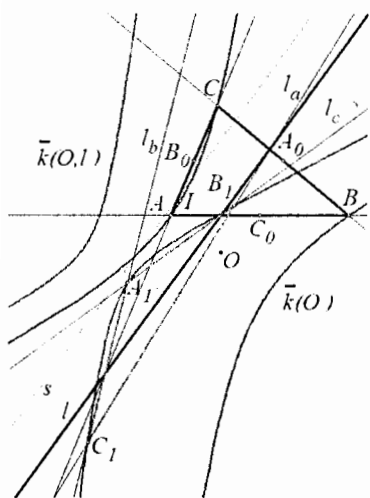
Преди да докажем горните две твърдения, ще посочим обобщение на формулираната в началото олимпиадна задача. Откриването на споменатите факти, както и на следващите, е осъществено с помощта на програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP). В търсенето на обобщение е естествено да заменим окръжността  $\Gamma$  с крива от втора степен, описана около даден (не задължително остроъгълен)  $\Delta ABC$ . Означаваме центъра на такава крива отново с  $O$ , а самата крива – с  $\bar{k}(O)$ . Ясно е, че  $\bar{k}(O)$ , а следователно и  $O$ , подлежи на специализация. Възможно е и обратното – най-напред да изберем  $O$ , а след това да определим  $\bar{k}(O)$  от условията кривата да е описана около  $\Delta ABC$ . От разсъжденията по-долу следва, че е удобно да се търгне от специализация на  $O$ .

Нека  $l$  е произволна права от равнината на  $\Delta ABC$  и нека  $l$  пресича правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  съответно в точките  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . Ако  $l_a$  е симетричната на  $l$  спрямо  $BC$ , то  $BC$  е ъглополовяща (и ос на симетрия) на единия от ъглите между  $l$  и  $l_a$ . Њглополовящата на другия ъгъл е също ос на симетрия за  $l$  и  $l_a$  и е успоредна на симетралата на  $BC$ . Следователно, правата  $l_a$  е хармонично спрегнатата на  $l$  спрямо ъглополовящите на ъглите между  $l$  и  $BC$  в точката  $A'$ . Това дава основание, когато  $O$  е произволна точка от равнината на  $\Delta ABC$  ( $O$  е център на единствено описано за  $ABC$  конично сечение  $\bar{k}(O)$ ) да построим права  $l'_a$  през точката  $A'$ , която е успоредна на диаметъра  $OA_0$  за  $\bar{k}(O)$ . Сега определяме правата  $l_a$  като хармонично спрегнатата на  $l$  спрямо  $BC$  и  $l'_a$ . По аналогичен начин чрез точките  $B'$  и  $C'$  определяме съответно правите  $l_b$  и  $l_c$ . Когато  $\bar{k}(O) \equiv \Gamma$ , така построените прави преминават в правите, симетрични на  $l$  спрямо  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  съответно.

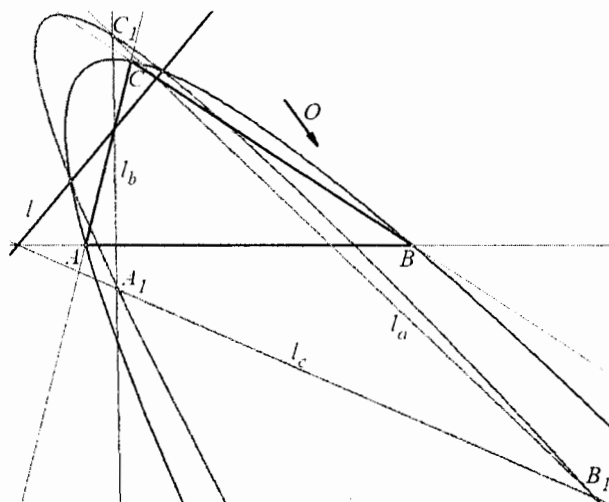
Нека  $l_b \cap l_c = A_1$ ,  $l_c \cap l_a = B_1$  и  $l_a \cap l_b = C_1$ . Ако  $O(x_0, y_0, z_0)$  е дефинирана с барицентричните си координати спрямо  $\Delta ABC$ , тя определя крива  $\bar{k}(O, l)$ , описана около  $\Delta A_1 B_1 C_1$ . Може да се очаква, че точката  $I(x_0, y_0, z_0)$ , определена спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$  (както в частния случай, и тук имаме  $A_1(1, 0, 0)$ ,  $B_1(0, 1, 0)$  и  $C_1(0, 0, 1)$ ), е център на някаква вписана за  $\Delta A_1 B_1 C_1$  крива, която в частност преминава във

вписана окръжност за  $\Delta A_1 B_1 C_1$ . Основахме, че сме понадали на правилната точка  $I$  дава наблюдението с GSP, което показва, че се получава обобщение на твърдение 1 в следния вид:

**Твърдение 3.** Точката  $I(x_0, y_0, z_0)$ , определена спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$ , лежи върху кривата  $\bar{k}(O)$ . (Фиг. 1, 2, 3, 4)



Фиг. 3



Фиг. 4

Вписаната в  $\Delta A_1 B_1 C_1$  крива с център  $I$  от своя страна трябва да определя еднозначно крива  $\bar{k}(O, l)$ , описана около  $\Delta A_1 B_1 C_1$ . Такава крива, както е показано в [3], се получава чрез спрегнатия триъгълник  $I_A I_B I_C$  на  $I$  спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$ . По-точно, кривата  $\bar{k}(O, l)$  минава през средите на отсечките  $I I_A, I I_B, I I_C, I_B I_C, I_C I_A$  и  $I_A I_B$ . Така, по точката  $I$  еднозначно се определя крива  $\bar{k}(O, l)$ , описана около  $\Delta A_1 B_1 C_1$ . По-нататък можем да изследваме разположението на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  в зависимост от правата  $l$  и да проверим дали наистина се получава обобщение. С помощта на GSP забелязваме, че когато  $l$  се допира до  $\bar{k}(O)$ , кривата  $\bar{k}(O, l)$  се допира до  $\bar{k}(O)$ . Нещо повече, като използваме въведените означения, може да се формулира следното:

**Твърдение 4.** Ако правата  $l$  пресича  $\bar{k}(O)$ , допира се до  $\bar{k}(O)$  или няма общи точки с  $\bar{k}(O)$ , то кривите  $\bar{k}(O, l)$  и  $\bar{k}(O)$  имат съответно две крайни общи точки, допират се в една крайна точка или нямат общи крайни точки. (Фиг. 1, 2, 3, 4)

От това твърдение непосредствено получаваме:

**Следствие 1.** Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  се допират в крайна точка точно когато  $l$  и  $\bar{k}(O)$  са допирателни. (Фиг. 1)

**Следствие 2.** Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  имат най-много две общи крайни точки.

В случая, когато  $\bar{k}(O)$  е парабола, е изпълнено следното:

**Твърдение 5.** Ако  $\bar{k}(O)$  е парабола и  $l$  има обща точка  $P$  с нея, то  $P$  лежи и върху  $\bar{k}(O, l)$ . (Фиг. 4)

Наблюденията върху взаимното разположение на кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  дават основание и за следното:

**Твърдение 6.** *Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  са хомотетични. (Фиг. 1, 2, 3, 4)*

От това твърдение непосредствено получаваме:

**Следствие 3.** *Кривите  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  са от един и същи вид. (Фиг. 1, 2, 3, 4)*

Преминваме към доказване на формулираните твърдения. Ако спрямо  $\Delta ABC$  точката  $O$  има координати  $(x_0, y_0, z_0)$ , то спрямо  $\Delta ABC$  кривата  $\bar{k}(O)$  има следното уравнение:

$$(1) \quad \bar{k}(O) : (-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)xy = 0.$$

Нека правата  $l$  има уравнение  $ux + vy + wz = 0$  спрямо  $\Delta ABC$ . Координатите на  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  са съответно:  $A' \left( 0, \frac{w}{w-v}, \frac{v}{v-w} \right)$ ,  $B' \left( \frac{u'}{w-u}, 0, \frac{u}{u-w} \right)$  и  $C' \left( \frac{v}{v-u}, \frac{u}{u-v}, 0 \right)$ . Да пресечем снопа прави с център  $A'$  с правата  $OA_0$ . Тъй като по построение  $l'_a \parallel OA_0$ , то точките  $A'' = l \cap OA_0$  и  $A''' = l_a \cap OA_0$  са симетрични спрямо  $A_0$ . С помощта на уравненията на правите  $l$  и  $OA_0$  определяме координатите на  $A''$ :

$$A'' \left( \frac{(v+w)x_0}{2l_0 - (v+w)(x_0 + y_0 + z_0)}, \frac{ux_0 + w(z_0 - y_0)}{2l_0 - (v+w)(x_0 + y_0 + z_0)}, \frac{ux_0 + v(y_0 - z_0)}{2l_0 - (v+w)(x_0 + y_0 + z_0)} \right),$$

където  $l_0 = ux_0 + vy_0 + wz_0$ . От симетрията спрямо  $A_0$  следва, че

$$A''' \left( \frac{(v+w)x_0}{2l_0 - (v+w)(x_0 + y_0 + z_0)}, \frac{(u-v-w)x_0 + v(y_0 - z_0)}{2l_0 - (v+w)(x_0 + y_0 + z_0)}, \frac{(u-v-w)x_0 + w(z_0 - y_0)}{2l_0 - (v+w)(x_0 + y_0 + z_0)} \right).$$

Окончателно, с помощта на координатите на  $A'$  и  $A'''$  намираме уравнението на  $l_a$ :

$$(2) \quad l_a : (ux_0 + (v+w)(x_0 + y_0 + z_0) - 2l_0)x + vx_0y + wx_0z = 0, \quad l_0 = ux_0 + vy_0 + wz_0.$$

Да отбележим два особени случая за правата  $l_a$ . Единият се получава, когато  $l \parallel BC$ . Тогава считаме, че  $l_a \parallel BC$  и  $l_a$  минава през  $A'''$ . В случай, че  $l \equiv OA_0$ , приемаме, че  $l_a \equiv OA_0$ . Тези случаи се съгласуват напълно със съответните случаи при осева симетрия. Проверждането на необходимите пресмятания показва, че сега уравнението на  $l_a$  отново се изразява с (2). Затова при по-нататъшните пресмятания няма да е необходимо да се разглеждат отделни случаи.

Аналогично на (2) се получават и уравненията на правите  $l_b$  и  $l_c$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} l_b : uy_0x + (vy_0 + (w+u)(x_0 + y_0 + z_0) - 2l_0)y + wy_0z &= 0, \\ l_c : uz_0x + vz_0y + (wz_0 + (u+v)(x_0 + y_0 + z_0) - 2l_0)z &= 0. \end{aligned}$$

След решаване на трите системи от по две уравнения, които се получават от (2) и (3), се намират координатите на върховете на  $\Delta A_1 B_1 C_1$ :

1) Ако  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола, т.е.  $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ , то

$$(4) \quad \begin{aligned} A_1 & \left( \frac{\vartheta + (2x_0 - 1)(l_0 - u)u}{\vartheta}, \frac{(2l_0 - u - v)uy_0}{\vartheta}, \frac{(2l_0 - u - w)uz_0}{\vartheta} \right), \\ B_1 & \left( \frac{(2l_0 - v - u)vx_0}{\vartheta}, \frac{\vartheta + (2y_0 - 1)(l_0 - v)v}{\vartheta}, \frac{(2l_0 - v - w)vz_0}{\vartheta} \right), \\ C_1 & \left( \frac{(2l_0 - w - u)wx_0}{\vartheta}, \frac{(2l_0 - w - v)wy_0}{\vartheta}, \frac{\vartheta + (2z_0 - 1)(l_0 - w)w}{\vartheta} \right), \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} \vartheta &= 2l_0^2 - 2l_0(u + v + w) + u^2x_0 + v^2y_0 + w^2z_0 + vw + wu + uv \\ &= 2l_0^2 - l_0(u + v + w) + vwx_0 + wuy_0 + uvz_0; \end{aligned}$$

2) Ако  $\bar{k}(O)$  е парабола, т.е.  $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ , то

$$(5) \quad A_1 \left( \frac{l_0 + ux_0}{l_0}, \frac{uy_0}{l_0}, \frac{uz_0}{l_0} \right), \quad B_1 \left( \frac{vx_0}{l_0}, \frac{l_0 + vy_0}{l_0}, \frac{wz_0}{l_0} \right), \quad C_1 \left( \frac{wx_0}{l_0}, \frac{wy_0}{l_0}, \frac{l_0 + wz_0}{l_0} \right).$$

От (4) и (5) получаваме съответно:

**Следствие 4.** Ако  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола, лицата  $S_{ABC}$  и  $S_{A_1B_1C_1}$  съответно на  $\Delta ABC$  и  $\Delta A_1B_1C_1$  са свързани с формулата

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{(2l_0 - u - v - w)^2}{\vartheta} S_{ABC}.$$

**Следствие 5.** Ако  $\bar{k}(O)$  е парабола, лицата  $S_{ABC}$  и  $S_{A_1B_1C_1}$ , съответно на  $\Delta ABC$  и  $\Delta A_1B_1C_1$ , са свързани с формулата  $S_{A_1B_1C_1} = 2S_{ABC}$ .

Нека произволна точка има координати  $(x, y, z)$  спрямо  $\Delta ABC$  и координати  $(x', y', z')$  спрямо  $\Delta A_1B_1C_1$ . Тогава

$$(6) \quad \begin{aligned} x &= x_{A_1}x + x_{B_1}y + x_{C_1}z, \\ y &= y_{A_1}x + y_{B_1}y + y_{C_1}z, \quad [2, \text{с. } 90-91] \\ z &= z_{A_1}x + z_{B_1}y + z_{C_1}z. \end{aligned}$$

Сега от (1), (4), (5) и (6) следва, че уравнението на  $\bar{k}(O)$  спрямо  $\Delta A_1B_1C_1$  във всички случаи може да се запише по следния начин:

$$(7) \quad \bar{k}(O) : \begin{aligned} & (2l_0 - (u + v + w)(x_0 + y_0 + z_0))(x_0^2y'z' + y_0^2z'x' + z_0^2x'y') \\ & + (x' + y' + z')(u(-x_0 + y_0 + z_0)y_0z_0x' + v(x_0 - y_0 + z_0)z_0x_0y' \\ & + w(x_0 + y_0 - z_0)x_0y_0z') = 0. \end{aligned}$$

След заместване на координатите на  $I(x_0, y_0, z_0)$  в (7) установяваме, че  $I \in \bar{k}(O)$ . Това доказва твърдение 3. Следователно, ако е вярно твърдение 1, то е вярно и твърдение 2.

Според резултатите, получени в [3], уравнението на  $\bar{k}(O, l)$  спрямо  $\Delta A_1B_1C_1$  може да се запише във вида:

$$(8) \quad \bar{k}(O, l) : x_0^2y'z' + y_0^2z'x' + z_0^2x'y' = 0.$$

Ако  $\bar{k}(O)$  има безкрайна точка  $(x', y', z')$ , то  $x' + y' + z' = 0$  и уравнението (7) в този случай се редуцира до (8). Следователно, всяка безкрайна точка на  $\bar{k}(O)$  принадлежи и на  $\bar{k}(O, l)$ . Отгук получаваме и доказателство на Следствие 3. Ако

$\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  имат обща крайна точка  $(x', y', z')$ , то  $x' + y' + z' = 1$  и от (7) и (8) следва, че тази точка лежи на правата  $r$  с уравнение

$$(9) \quad r : u(-x_0 + y_0 + z_0)y_0z_0x' + v(x_0 - y_0 + z_0)z_0x_0y' + w(x_0 + y_0 - z_0)x_0y_0z' = 0.$$

Оттук изразяваме  $z'$ , заместяваме го в (8) и получаваме

$$(10) \quad u(-x_0 + y_0 + z_0)y_0^3x'^2 + v(x_0 - y_0 + z_0)x_0^3y'^2 + x_0y_0(u(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + v(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - w(x_0 + y_0 - z_0)z_0)x'y' = 0.$$

Последното разглеждаме като квадратно уравнение за  $y'/x'$ . Броят на реалните корени зависи от знака на израза

$$(11) \quad D = u^2(-x_0 + y_0 + z_0)^2x_0^2 + v^2(x_0 - y_0 + z_0)^2y_0^2 + w^2(x_0 + y_0 - z_0)^2z_0^2 - 2vw(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)y_0z_0 - 2vu(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0)z_0x_0 - 2wv(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)x_0y_0.$$

Следователно, знакът на израза  $D$  от (11) определя броя на общите крайни точки на  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$ . От друга страна, от уравнението на  $l$  в (1) след елиминиране на  $z$  се получава уравнение, подобно на (10). Броят на реалните корени на това уравнение отново зависи само от знака на  $D$  от (11). Така получаваме, че броят на общите точки на  $l$  и  $\bar{k}(O)$  съвпада с броя на общите крайни точки на  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$ . С това Твърдение 4 е доказано.

За да докажем Твърдение 5, заместяваме резултатите от (5) и (6) в (9) и получаваме, че правата  $r$  спрямо  $\Delta ABC$  има уравнение  $r : ux + vy + wz = 0$ . Следователно  $r \equiv g$ . Това доказва Твърдение 5.

В доказателството на Твърдение 6 използваме следното помощно твърдение

**Лема.** Ако триъгълниците  $A_1B_1C_1$  и  $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  са такива, че  $B_1C_1 \parallel \bar{B}_1\bar{C}_1$ ,  $C_1A_1 \parallel \bar{C}_1\bar{A}_1$  и  $A_1B_1 \parallel \bar{A}_1\bar{B}_1$ , то барицентричните координати на техния перспективен център спрямо  $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  са равни на съответните му барицентрични координати спрямо  $\Delta A_1B_1C_1$ .

Сега да определим координатите  $(x_I, y_I, z_I)$  на  $I$  спрямо  $\Delta ABC$ . Ако  $\bar{k}(O)$  е парабола, от (5) и (6) следва, че  $I \equiv O$ . Когато  $\bar{k}(O)$  не е парабола, от (4) и (6) получаваме равенствата

$$(12) \quad x_I = \frac{(2l_0 - u - v)(2l_0 - u - w)x_0}{\vartheta}, \quad y_I = \frac{(2l_0 - v - u)(2l_0 - v - w)y_0}{\vartheta}, \\ z_I = \frac{(2l_0 - w - u)(2l_0 - w - v)z_0}{\vartheta}.$$

Нека  $\bar{l}$  е произволна права, успоредна на  $l$ , и  $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  е породеният от нея триъгълник. Лесно се вижда, че  $B_1C_1 \parallel \bar{B}_1\bar{C}_1$ ,  $C_1A_1 \parallel \bar{C}_1\bar{A}_1$  и  $A_1B_1 \parallel \bar{A}_1\bar{B}_1$ . Следователно за  $\Delta A_1B_1C_1$  и  $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$  е приложима лемата.

Ако  $\bar{l}$  има уравнение  $\bar{u}x + \bar{v}y + \bar{w}z = 0$ , то  $\frac{\bar{v} - \bar{w}}{v - w} = \frac{\bar{w} - \bar{u}}{w - u} = \frac{\bar{u} - \bar{v}}{u - v} = \delta$ . Без ограничение можем да смятаме, че  $\bar{w} = w$ . Лесно се вижда, че  $\bar{u} = \delta u + (1 - \delta)w$ ,  $\bar{v} = \delta v + (1 - \delta)w$ ,  $\bar{l}_0 = \delta l_0 + (1 - \delta)w$  и  $\bar{\vartheta} = \delta^2 \vartheta$ . Сега, ако  $\bar{I}$  е точката, която има координати  $(x_0, y_0, z_0)$  спрямо  $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ , то за координатите  $\hat{y}_I = (x_I, y_I, z_I)$  спрямо  $\Delta ABC$  от (4) и (6) се получават равенствата  $x_{\hat{I}} = x_I$ ,  $y_{\hat{I}} = y_I$  и  $z_{\hat{I}} = z_I$ . Следователно,  $\bar{I} \equiv I$ . Така от лемата получаваме, че  $I$  е центърът на перспективност за  $\Delta A_1B_1C_1$  и  $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ . Освен това,  $I$  е център на хомотетия  $\hat{h}$  за тези триъгълници. Освен

върховете на  $\Delta A_1 B_1 C_1$  и  $\Delta \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$ , хомотетията  $\bar{h}$  преобразува една в друга и средите на страните на спрегнатите за  $I$  триъгълници спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$  и  $\Delta \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1$ . Но тези две шесторки съответни точки лежат върху кривите  $\bar{k}(O, l)$  и  $\bar{k}(O, \bar{l})$ . Следователно,  $\bar{h}$  е хомотетия за  $\bar{k}(O, l)$  и  $\bar{k}(O, \bar{l})$ . Сега, ако  $\bar{l}$  е допирателна за  $\bar{k}(O)$ , и  $\bar{k}(O, \bar{l})$  е хомотетична на  $\bar{k}(O)$ , ще следва, че  $\bar{k}(O, l)$  е хомотетична с  $\bar{k}(O)$ . Затова е достатъчно да докажем, че  $\bar{k}(O, l)$  и  $\bar{k}(O)$  са хомотетични, когато са допирателни.

Нека  $\bar{k}(O, l)$  и  $\bar{k}(O)$  се допират в точка  $T(x'_T, y'_T, z'_T)$  (координатите са спрямо  $\Delta A_1 B_1 C_1$ ) и  $\vec{g}(\alpha, \beta, \gamma)(\alpha + \beta + \gamma = 0)$  е произволен вектор. Нека правата  $g : x' = x'_T + \alpha t, y' = y'_T + \beta t, z' = z'_T + \gamma t$  пресича повторно  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  съответно в точки  $T_1$  и  $T_2$ . Точките  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  се получават съответно при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ . Тогава  $\overrightarrow{TT_1} = \frac{t_1}{t_2} \overrightarrow{TT_2}$ . Параметрите  $t_1$  и  $t_2$  определяме, като заместим уравненията на  $g$  съответно в (7) и (8). За отношението им получаваме

$$(13) \quad \frac{t_1}{t_2} = 1 + \frac{u(-x_0 + y_0 + z_0)y_0z_0\alpha + v(x_0 - y_0 + z_0)z_0x_0\beta + w(x_0 + y_0 - z_0)x_0y_0\gamma}{(2l - (u + v + w)(x_0 + y_0 + z_0))((y'_T z_0^2 + z'_T y_0^2)\alpha + (z'_T x_0^2 + x'_T z_0^2)\beta + (x'_T y_0^2 + y'_T x_0^2)\gamma)}$$

От (10) и (9) имаме  $y'_T = -\frac{y_0 d_z x'_T}{2v x_0^2 (x_0 - y_0 + z_0)}$  и  $z'_T = -\frac{z_0 d_y x'_T}{2w x_0^2 (x_0 + y_0 - z_0)}$ , където

$$d_y = u x_0 (-x_0 + y_0 + z_0) - v y_0 (x_0 - y_0 + z_0) + w z_0 (x_0 + y_0 - z_0),$$

$$d_z = u x_0 (-x_0 + y_0 + z_0) + v y_0 (x_0 - y_0 + z_0) - w z_0 (x_0 + y_0 - z_0).$$

От (11) при  $D = 0$  се получава  $d_y^2 = 4wuz_0x_0(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0)$  и  $d_z^2 = 4uvx_0y_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)$ . Освен това, от (8) следват равенствата

$$y'_T z_0^2 + z'_T y_0^2 = -\frac{y'_T z'_T x_0^2}{x'_T}, \quad z'_T x_0^2 + x'_T z_0^2 = -\frac{z'_T x'_T y_0^2}{y'_T}, \quad x'_T y_0^2 + y'_T x_0^2 = -\frac{x'_T y'_T z_0^2}{z'_T}.$$

С помощта на изведените резултати преобразуваме (13) във вида:

$$(13') \quad \frac{t_1}{t_2} = 1 - \frac{u(-x_0 + y_0 + z_0)y_0z_0x'_T}{(2l_0 - (u + v + w)(x_0 + y_0 + z_0))x_0^2 y'_T z'_T}.$$

Полученият израз не зависи от вектора  $\vec{g}$  и затова  $\bar{k}(O)$  се получава от  $\bar{k}(O, l)$  при хомотетия с център  $T$  и коефициент  $t_1/t_2$ . С това Твърдение 6 е доказано.

В случая, когато  $x_0 + y_0 + z_0 = 0$ , от (13') получаваме  $t_1/t_2 = 2$ , т.е. в сила е интересното

**Следствие 6.** Ако  $\bar{k}(O)$  и  $\bar{k}(O, l)$  са параболи, то  $\bar{k}(O)$  се получава от  $\bar{k}(O, l)$  при хомотетия с коефициент 2.

Ако  $k(I)$  е кривата с център  $I$ , която е вписана в  $\Delta A_1 B_1 C_1$ , както е показано в [4],  $\bar{k}(O, l)$  е хомотетична с  $k(I)$ . Затова от твърдение 6 следва, че  $k(I)$  и  $\bar{k}(O)$  са хомотетични. Следователно, ако  $\bar{k}(O) \equiv \Gamma$ , то  $k(I)$  е вписана в  $\Delta A_1 B_1 C_1$  окръжност. Това доказва Твърдение 1. С това всички формулирани дотук твърдения са доказани.

Накрая да разгледаме една връзка между точката  $I$  и правата  $l$ , когато  $\bar{k}(O)$  е централна крива. Нека  $p_a, p_b$  и  $p_c$  са правите, които минават през произволна точка  $P$  от  $\bar{k}(O)$  и са съответно успоредни на  $OA_0, OB_0$  и  $OC_0$ . Ако  $p_a \cap BC = A_P, p_b \cap CA = B_P$  и  $p_c \cap AB = C_P$ , то както е показано в [5], точките  $A_P, B_P$  и  $C_P$  лежат

на една права, която наричаме *Симсънова права на точката P спрямо кривата  $\bar{k}(O)$* . Тъй като  $I$  е точка от  $\bar{k}(O)$ , тя има Симсънова права спрямо тази крива, а наблюденията с GSP показват, че е в сила следното:

**Твърдение 7.** *Ако  $\bar{k}(O)$  е елипса или хипербола, Симсъновата права на  $I$  спрямо  $\bar{k}(O)$  е успоредна на правата  $l$ . (Фиг. 1, 2, 3)*

За да докажем Твърдение 7, достатъчно е да проверим, че векторът  $\overrightarrow{A_I B_I}$  е колинеарен с вектора  $\overrightarrow{l}(v-w, w-u, u-v)$  (той от своя страна е колинеарен с  $l$ ). От резултатите в [5] и (12) за координатите на  $A_I$  и  $B_I$  получаваме

$$A_I \left( 0, \frac{(u-w)(2l_0-u-v)(1-2z_0)}{2\vartheta}, \frac{(2l_0-w-u)(2l_0-u-v+2(u-w)z_0)}{2\vartheta} \right),$$

$$B_I \left( \frac{(v-w)(2l_0-u-v)(1-2z_0)}{2\vartheta}, 0, \frac{(2l_0-v-w)(2l_0-u-v+2(v-w)z_0)}{2\vartheta} \right).$$

Сега лесно се вижда, че  $\overrightarrow{A_I B_I} = \frac{(2l_0-u-v)(1-2z_0)}{2\vartheta} \overrightarrow{l}$ . С това Твърдение 7 е доказано.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Гроздев. Международна олимпиада по математика. *Математика плюс*, (2011), No 3 (75), 56-59.
- [2] Г. Паскалев, И. Чованов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.
- [3] В. Ненков. Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, (2008), No 2, 35-42.
- [4] В. Ненков. Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, (2010), No 5, 42-61.
- [5] В. Ненков. Две описани копични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование*, **36** (2007), 392-396.

Сава Иванов Гроздев  
Институт по математика и информатика  
ул. Акад. Г. Бопчев, бл. 8  
1113 София  
e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Веселин Ненков Ненков  
Технически колеж Ловеч  
ул. Съйко Съев № 31  
Ловеч  
e-mail: vnenkov@mail.bg

## A REMARKABLE POINT OF THE TRIANGLE

Sava Grozdev, Veselin Nenkov

A new remarkable point of the triangle is discovered by means of a problem from the International Mathematical Olympiad in 2011. Various properties of this point are proved and some analogies to the assertion of the Olympic problem are found in connection with conics and harmonically conjugated lines.