МАТЕМАТИКА+

помагало за математика и информатика

4/2013

МАТЕМАТИКА ПЛЮС

помагало по математика и информатика

одобрено от Министерството на образованието, младежта и науката за класна и извънкласна работа

Quarterly, Volume 21 (84), Number 4, 2013

Издател: *Математика плюс Х ООД*

Помагалото се издава със съдействието на
Институт по математика и информатика – БАН

Адрес на редакцията:
Институт по математика и информатика – БАН, стаи 517 и 323,
ул. „Акад. Г. Бончев", бл. 8, 1113 София
тел. 979-28-26; 979-38-90, e-mail: sava.grozdev@gmail.com

Материали за публикуване изпращайте в два екземпляра до редакцията или до член на редакционната колегия на горния адрес. Препоръчително е ръкописите да не надвишават 6 страници. Желателно е използването на електронни носители (в такива случаи да се посочва използваният софтуер). Илюстрациите и чертежите в текста да се представят на отделен лист. Ръкописи не се връщат.

Формат $600\times840/8$	Печатни коли 9
Дадена за печат на 4. 11. 2013	Подписана за печат на 14. 11. 2013 **ISSN 0861-8321**

Издаването на настоящия брой на списанието е с финансовата подкрепа на Фонд "Научни изследвания" при Министерство на образованието и науката.

Математика плюс
бр. 4, 2013

МАТЕМАТИКА ПЛЮС е помагало за деца, ученици, студенти, професионални математици, за всеки, който се е наслаждавал на красотата на математиката или се стреми да я докосне. В популярна, привлекателна и достъпна форма се публикуват съобщения и статии с оригинални резултати, обзори на важни за математиката и информатиката направления; представят се известни математици и техните постижения; дава се информация за български и чужди училища, колежи, университети, фондации; предлагат се материали от изтъкнати специалисти за кандидатстващите във висшите учебни заведения, езикови училища, математически гимназии и техникумите; отразяват се международните олимпиади и балканиади и математически състезания у нас и в чужбина; организират се конкурси с награди; специално място се отделя на най-малките с подходящи теми и задачи; представят се професионални математици, които освен в математиката имат постижения и в други области; предлагат се математически ребуси, магически квадрати, интересни игри и играчки; организират се томболи с предметни награди.

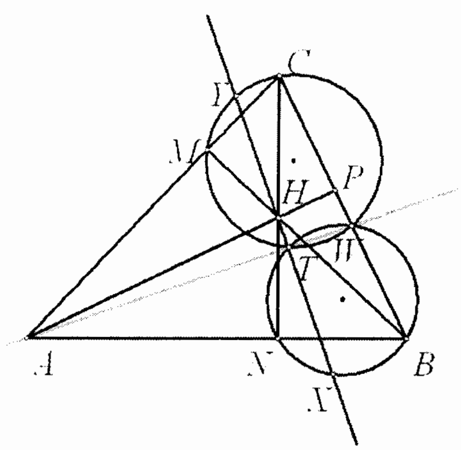
В БРОЯ:

ЕДИН ВИД ЦЕНТРАЛНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ ПРЕЗ ЕДНА ТОЧКА

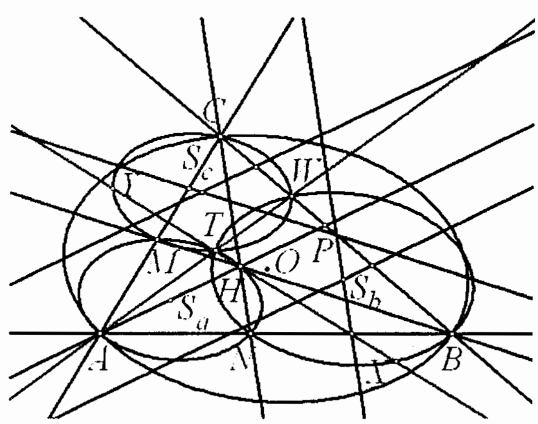
проф. Сава Гроздев, доц. д-р Веселин Ненков

Темата от Международната олимпиада по математика през 2013 г. в Колумбия включва следното тайландско предложение:

Задача. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H, а W е точка от страната BC между B и С. Точките M и N са петите на височините съответно през върховете B и C, а ω_1 и ω_2 са описаните окръжности съответно на ΔBWN и ΔCWM. Ако X и Y са диаметрално противоположните точки на W съответно върху ω_1 и ω_2, да се докаже, че точките X, Y и H лежат на една права.



Фиг. 1



Фиг. 2

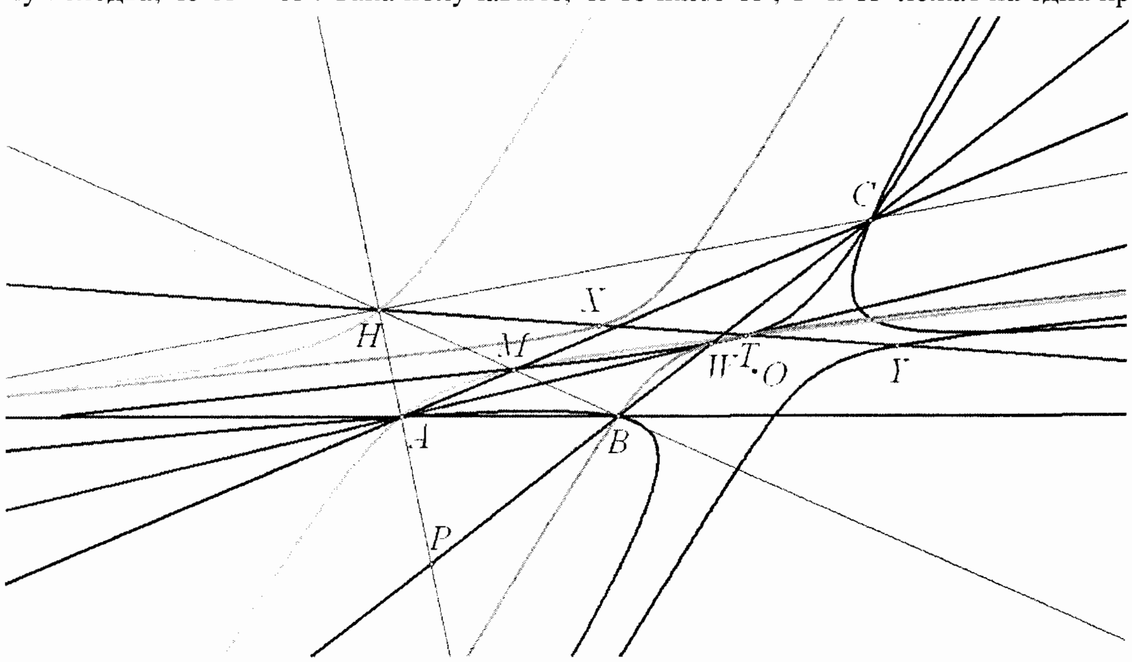
Решение: Първо да обърнем внимание на следната по-обща конфигурация. Нека W, M и N са произволни точки съответно върху страните BC, CA и AB на ΔABC, а ω_1, ω_2 и ω_3 са описаните окръжности съответно на триъгълниците BWN, CWM и AMN. Нека T е втората пресечна точка на ω_1 и ω_2. Тъй като четириъгълниците $NTWB$ и $MTWC$ са вписани съответно в ω_1 и ω_2, то са изпълнени равенствата $\sphericalangle NTW = 180° - \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle MTW = 180° - \sphericalangle ACB$. Оттук следват равенствата

$$\sphericalangle MTN = 360° - (180° - \sphericalangle ABC) - (180° - \sphericalangle ACB) = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle BAC.$$

Следователно четириъгълникът $AMNT$ е вписан в окръжност. Тъй като описаната окръжност на AMN е ω_3, то T лежи върху ω_3. По друг начин казано, окръжностите ω_1, ω_2

и ω_3 имат обща точка T при произволни точки W, M и N (Теорема на Микел). Освен това $\sphericalangle ATN = \sphericalangle AMN$.

Сега, ако точките M и N са такива, както в условието на задачата, окръжността ω_3 минава през ортоцентъра H, т.е. точките A, M, H, T и N лежат на една окръжност. От друга страна четириъгълникът $BCMN$ е вписан в окръжност и затова $\sphericalangle CMN = 180° - \sphericalangle ABC$. Оттук следва, че $\sphericalangle AMN = 180° - \sphericalangle CMN = 180° - (180° - \sphericalangle ABC) = \; = \sphericalangle ABC$. Така получаваме $\sphericalangle ATN = \sphericalangle AMN = \sphericalangle ABC$. Освен това, както беше споменато, $\sphericalangle NTW = 180° - \sphericalangle ABC$ и следователно $\sphericalangle ATN + \sphericalangle NTW = 180°$. Това означава, че точките A, T и W лежат на една права. Сега от свойството на секущите към ω_1 през точката A следва, че $AW.AT = AB.AN$. По-нататък, ако $AH \cap BC = P$, то $BPHN$ е вписан в окръжност. Прилагаме свойството на секущите към тази окръжност през A и получаваме $AP.AH = AB.AN$. От последните равенства следва, че $AW.AT = AP.AH$. Оттук получаваме, че четириъгълникът $HTWP$ е вписан в окръжност. Тъй като $\sphericalangle HPW = 90°$, то $\sphericalangle HTW = 90°$. Сега, ако HT пресича за втори път ω_1 в точка X', то WX' се вижда под прав ъгъл от T. Следователно WX' е диаметър на ω_1. Оттук следва, че $X' \equiv X$. Така получаваме, че точките H, T и X лежат на една права.



Фиг. 3

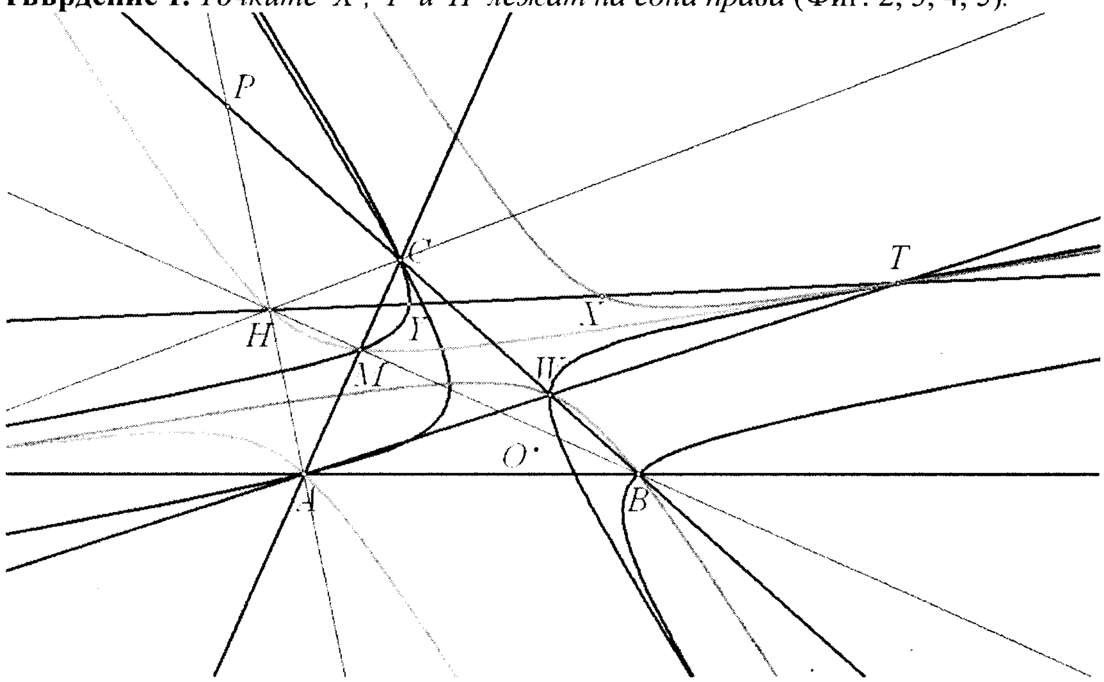
Аналогично се доказва, че точките H, T и Y лежат на една права. Така получаваме, че точките H, T, X и Y лежат на една права. С това задачата е решена.

По-нататък ще покажем едно обобщение, което е съпроводено с друго решение на задачата. След това ще обобщим конфигурацията, разгледана в изложеното доказателство, и ще получим някои интересни резултати, свързани с нея. Във всички конструкции ще подпомагаме действията си с динамичния софтуер “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP).

Точката X в условието на задачата се получава като симетрична на W спрямо центъра на ω_1, а центърът ω_1 се получава като пресечна точка на симетралите на отсечките BW и BN, които от своя страна са успоредни съответно на височините AH и CH. Сега, нека H е произволна точка в равнината на ΔABC (Фиг. 2), като $AH \cap BC = P$, $BH \cap CA = M$, $CH \cap AB = N$ и W е произволна точка върху правата BC. През средите на

BW и BN построяваме прави, успоредни съответно на AH и CH. Означаваме пресечната точка на тези прави с S_b, а точката, симетрична на W спрямо S_b, – съответно с X. Аналогична конструкция води до точка Y: през средите на CW и CM построяваме прави, успоредни съответно на AH и BH. Пресечната точка на тези прави означаваме с S_c, а точката, симетрична на W спрямо S_c, – съответно с Y. При тази конструкция е изпълнено следното:

Твърдение 1. *Точките X, Y и H лежат на една права* (Фиг. 2, 3, 4, 5).



Фиг. 4

В доказателствата на това и следващите твърдения ще използваме барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $W(0,w,1-w)$, $H(\lambda,\mu,\nu)$ $(\lambda+\mu+\nu=1)$ [1]. Оттук веднага намираме: $P\left(0,\frac{\mu}{1-\lambda},\frac{\nu}{1-\lambda}\right)$, $M\left(\frac{\lambda}{1-\mu},0,\frac{\nu}{1-\mu}\right)$, $N\left(\frac{\lambda}{1-\nu},\frac{\mu}{1-\nu},0\right)$. Правите l_1 и l_2 през средите на BW и BN, успоредни съответно на AH и CH, се представят с параметричните им уравнения във вида:

$$l_1:\begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2(1-\nu)}+\lambda t_1, \\ y=\dfrac{1+\mu-\nu}{2(1-\nu)}+\mu t_1, \\ z=(\nu-1)t_1, \end{cases} \qquad l_2:\begin{cases} x=(\lambda-1)t_2, \\ y=\dfrac{1+w}{2}+\mu t_2, \\ z=\dfrac{1-w}{2}+\nu t_2. \end{cases}$$

От тези уравнения намираме координатите на $S_b=l_1\cap l_2$ във вида:

$$S_b\left(\frac{\lambda(1-\lambda)w}{2\mu},\frac{1+(1-\lambda)w}{2},\frac{\mu-(1-\nu)(1-\lambda)w}{2\mu}\right).$$

По аналогичен начин се получава

$$S_c\left(\frac{\lambda(1-\lambda)(1-w)}{2\nu},\frac{\nu-(1-\lambda)(1-\mu)(1-w)}{2\nu},\frac{1+(1-\lambda)(1-w)}{2}\right).$$

От последните резултати намираме координатите на точките X и Y:

$$X\left(\frac{\lambda(1-\lambda)w}{\mu},1-\lambda w,-\frac{\nu\lambda w}{\mu}\right),\ Y\left(\frac{\lambda(1-\lambda)(1-w)}{\nu},-\frac{\lambda\mu(1-w)}{\nu},1-\lambda(1-w)\right).$$

От координатите на точките X и Y получаваме

$$\overrightarrow{HX}\left(\frac{\lambda\left[-\mu+(1-\lambda)w\right]}{\mu},\frac{\mu(1-\mu-\lambda w)}{\mu},\frac{-\nu(\mu+\lambda w)}{\mu}\right),$$

$$\overrightarrow{HY}\left(-\frac{\lambda\left[-\mu+(1-\lambda)w\right]}{\nu},-\frac{\mu(1-\mu-\lambda w)}{\nu},-\frac{-\nu(\mu+\lambda w)}{\nu}\right).$$

От тези представяния на векторите $\overrightarrow{HX}$ и $\overrightarrow{HY}$ забелязваме равенството $\overrightarrow{HY}=-\frac{\mu}{\nu}\overrightarrow{HX}$, което означава, че точките лежат на една права. Освен това оттук се получава следното:

Следствие 1. *Простото отношение $\overline{XH}:\overline{YH}$, в което точката H дели отсечката XY, не зависи от положението на точката W върху правата BC.*

Като обобщение на окръжностите ω_1 и ω_2 от първоначалната задача да разгледаме коничните сечения $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ с центрове S_b и S_c, описани съответно около триъгълниците BWN и CWM. За разлика от задачата, кривите $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ не бяха необходими при доказателството на твърдение 1. Тези криви обаче притежават свойствата на окръжностите ω_1 и ω_2, отбелязани в решението на задачата. Нека добавим и описаното за ΔAMN коничното сечение $\bar{k}(S_a)$ с център средата S_a на AH, което е обобщение на окръжността ω_3. Следователно $S_a\left(\frac{1+\lambda}{2},\frac{\mu}{2},\frac{\nu}{2}\right)$.

Определяме уравненията на кривите $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ във вида:

$$\bar{k}(S_a):\nu\lambda y^2+\lambda\mu z^2-\mu\nu zx-\mu\nu xy=0,$$

$$\bar{k}(S_b):\mu\nu x^2+\lambda(1-\lambda)wz^2-\lambda(1-\lambda)(1-w)yz-\lambda\left[\mu-(1-\lambda)w\right]zx-\nu\lambda xy=0,$$

$$\bar{k}(S_c):\mu\nu x^2+\lambda(1-\lambda)(1-w)y^2-\lambda(1-\lambda)wyz-\lambda\mu zx-\lambda\left[\nu-(1-\lambda)(1-w)\right]xy=0.$$

Оказва се, че тези три криви също минават през една точка:

Твърдение 2. *Кривите $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ минават през една точка T* (Фиг. 2, 3, 4, 5).

Нека l_a, l_b и l_c са правите, върху които се пресичат съответно двойките криви $\bar{k}(S_b)$, $\bar{k}(S_c)$; $\bar{k}(S_c)$, $\bar{k}(S_a)$ и $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$. От уравненията на $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ чрез изваждане получаваме:

$$l_a:(1-w)y-wz=0,$$

$$l_b:\mu\nu x+\lambda\left[\mu-(1-\lambda)w\right]y-\lambda\mu z=0,$$

$$l_c:\mu\nu x-\nu\lambda y-\lambda\left[\mu-(1-\lambda)w\right]z=0.$$

След изваждане на уравнението на l_c от уравнението на l_b се получава $(1-\lambda)\left[(1-w)y-wz\right]=0$, което означава, че уравнението на l_a е следствие от уравненията на l_b и l_c, т.е. правите l_a, l_b и l_c се пресичат в една точка T. Тази точка е обща и за кривите $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$. Координатите на T се получават, като решим системата, образувана от уравненията на които и да са две от правите l_a, l_b и l_c. Така имаме:

$$T\left(\frac{\lambda\left[(1-\lambda)w^2-2\mu w+\mu\right]}{\lambda(1-\lambda)w^2-2\lambda\mu+\mu(1-\mu)},\frac{\mu\nu w}{\lambda(1-\lambda)w^2-2\lambda\mu+\mu(1-\mu)},\frac{\mu\nu(1-w)}{\lambda(1-\lambda)w^2-2\lambda\mu+\mu(1-\mu)}\right).$$

Твърдение 3. *Точките A, T и W лежат на една права* (Фиг. 2, 3, 4, 5).

От координатите на точките A, T и W лесно намираме векторното равенство $\overrightarrow{AT}=\mu\nu\overrightarrow{AW}$. Освен доказателство на твърдение 3 оттук получаваме следното:

Следствие 2. *Простото отношение $\overline{AT}:\overline{WT}$, в което точката T дели отсечката AW, не зависи от положението на точката W върху правата BC.*

Твърдение 4. *Точката T лежи върху правата XY* (Фиг. 2, 3, 4, 5).

От координатите на H и T намираме $\overrightarrow{HT}=\dfrac{-\mu+(1-\lambda)w}{\mu\lambda(1-\lambda)w^2-2\lambda\mu+\mu(1-\mu)}.\overrightarrow{HX}$. Сега от твърдение 1 се получава твърдение 3 и следното:

Следствие 3. *Точките X, Y, T и H лежат на една права.*

Накрая ще отбележим някои свойства, свързани с вида на кривите $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$. Преди това да определим още една крива от втора степен. Нека G е медицентърът на ΔABC, а O е точка в равнината му, за която е изпълнено равенството $\overrightarrow{GO}=-\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{GH}$. Следователно $O\left(\dfrac{1-\lambda}{2},\dfrac{1-\mu}{2},\dfrac{1-\nu}{2}\right)$. Точката O е център на описана за ΔABC крива, която има следното уравнение:

$$\bar{k}(O):\lambda(1-\lambda)yz+\mu(1-\mu)zx+\nu(1-\nu)xy=0.$$

За кривите $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ е изпълнено следното:

Твърдение 5. *Кривите $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ са от един и същи вид* (Фиг. 2, 3, 4, 5).

За да определим вида на кривите $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$, намираме общите им точки с безкрайната права $x+y+z=0$. И в четирите случая от уравненията на кривите стигаме до равенството $\mu(1-\mu)x^2+2\lambda\mu xy+\lambda(1-\lambda)y^2=0$. Следователно кривите са от един и същи вид. Освен това видът им зависи от знака на дискриминантата на последното уравнение, т.е. от знака на $-\lambda\mu\nu$.

Нека l е права, минаваща през O и колинеарна с вектор $\vec{l}(\alpha,\beta,\gamma)$ $(\alpha+\beta+\gamma=0)$. Параметричните уравнения на l се записват във вида: $x=\dfrac{1-\lambda}{2}+\alpha t$, $y=\dfrac{1-\mu}{2}+\beta t$,

$z=\dfrac{1-\nu}{2}+\gamma t$. Заместваме уравненията на l в уравнението на $\overline{k}(O)$ и след известни преобразувания получаваме, че ако l и $\overline{k}(O)$ имат общи точки, те се получават при стойности $t=t_0$, за които $t_0^2=-\dfrac{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)}{4\left[\lambda(1-\lambda)\beta\gamma+\mu(1-\mu)\gamma\alpha+\nu(1-\nu)\alpha\beta\right]}$.

Нека $\overline{k}_a(O)$ е кривата, която се получава от $\overline{k}(S_a)$ при транслация с вектор

$$\overline{S_aO}\left(-\lambda,\frac{1-2\mu}{2},\frac{1-2\nu}{2}\right).$$

Получената крива има център O и следното уравнение

$$\nu\lambda\left(y-\frac{1-2\mu}{2}\right)^2+\lambda\mu\left(z-\frac{1-2\nu}{2}\right)^2-\mu\nu\left(z-\frac{1-2\nu}{2}\right)(x+\lambda)-\mu\nu(x+\lambda)\left(y-\frac{1-2\mu}{2}\right)=0.$$

След заместване на уравненията на l в последното равенство получаваме, че пресечните точки на l и $\overline{k}_a(O)$ (ако съществуват) се получават при стойности на параметъра $t=t_a$, удовлетворяващи равенството $t_a^2=-\dfrac{\mu\nu(1-\lambda)}{4\left[\lambda(1-\lambda)\beta\gamma+\mu(1-\mu)\gamma\alpha+\nu(1-\nu)\alpha\beta\right]}$.

По аналогичен начин построяваме кривите $\overline{k}_b(O)$ и $\overline{k}_c(O)$, които се получават съответно при транслации с вектори

$$\overline{S_bO}\left(\frac{(1-\lambda)(\mu-\lambda w)}{2\mu},-\frac{\mu+(1-\lambda)w}{2},\frac{-\mu\nu+(1-\nu)(1-\lambda)w}{2\mu}\right)\quad \text{и}$$

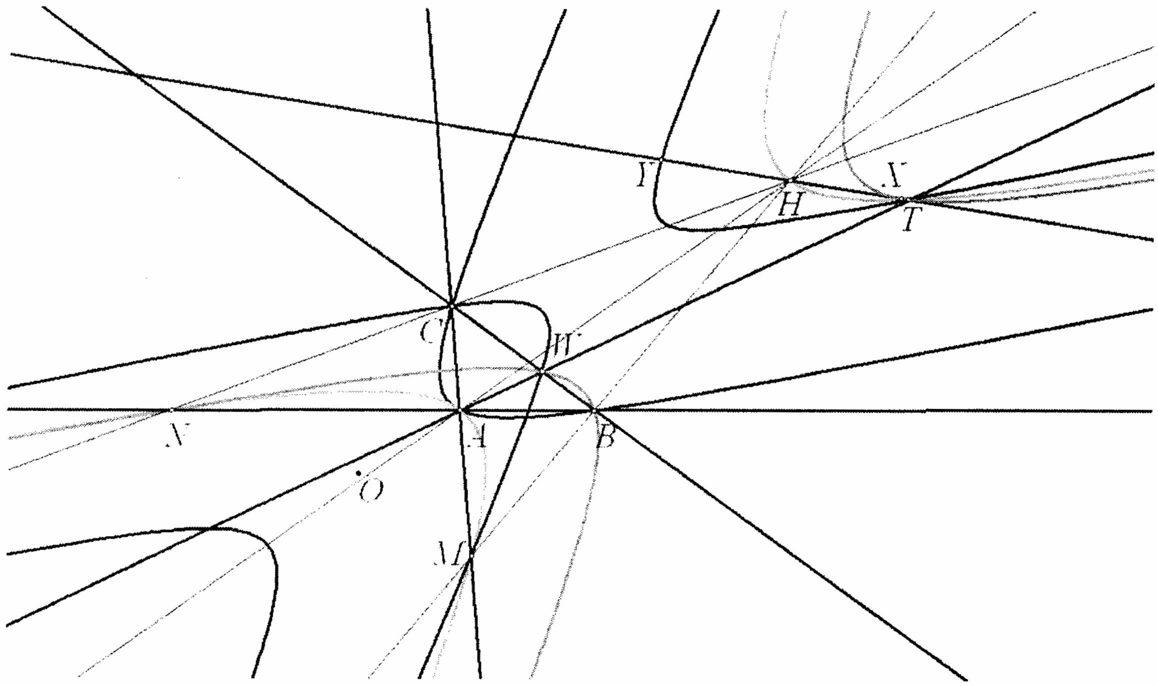
$$\overline{S_cO}\left(\frac{(1-\lambda)(\nu-\lambda w)}{2\nu},\frac{-\mu\nu+(1-\lambda)(1-\mu)(1-w)}{2\nu},-\frac{\nu+(1-\lambda)(1-w)}{2}\right).$$

Техните пресечни точки с l (когато съществуват) се получават съответно при стойности $t=t_b$ и $t=t_c$ на параметъра, които удовлетворяват равенствата

$$t_b^2=-\frac{\lambda(1-\lambda)\left[(1-\nu)(1-\lambda)w^2-2\mu w+\mu\right]}{4\mu\left[\lambda(1-\lambda)\beta\gamma+\mu(1-\mu)\gamma\alpha+\nu(1-\nu)\alpha\beta\right]},$$

$$t_c^2=-\frac{\lambda(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1-\mu)(1-w)^2-2\nu(1-w)+\nu\right]}{4\nu\left[\lambda(1-\lambda)\beta\gamma+\mu(1-\mu)\gamma\alpha+\nu(1-\nu)\alpha\beta\right]}.$$

Ако кривите $\overline{k}(O)$, $\overline{k}(S_a)$, $\overline{k}(S_b)$ и $\overline{k}(S_c)$ са елипси, правата l има две пресечни точки с всяка от тях и отношенията $\dfrac{t_a^2}{t_0^2}=\dfrac{\mu\nu}{(1-\mu)(1-\nu)}$, $\dfrac{t_b^2}{t_0^2}=\dfrac{\lambda\left[(1-\nu)(1-\lambda)w^2-2\mu w+\mu\right]}{\mu(1-\mu)(1-\nu)}$,



Фиг. 5

$\dfrac{t_c^2}{t_0^2}=\dfrac{\lambda\left[(1-\lambda)(1-\mu)(1-w)^2-2\nu(1-w)+\nu\right]}{\nu(1-\mu)(1-\nu)}$ не зависят от вектора $\vec{l}(\alpha,\beta,\gamma)$. Следователно $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ са хомотетични с $\bar{k}(O)$. Така получаваме следното:

Твърдение 6. *Ако кривите $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ са елипси, те са хомотетични* (Фиг. 2).

Когато кривите $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ са хиперболи, с помощта на GSP се вижда, че някои двойки от тях може да не са хомотетични. Ако кривите $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ са хиперболи, правата l не винаги има две пресечни точки с всяка от тях. Аналогично на разсъжденията, довели до твърдение 6, ако някои от хиперболите имат по две общи точки с някоя права l, те са хомотетични и лежат в един и същи ъгъл, образуван от асимптотите на кривите. Ако съществува права l, която не пресича някоя от тези хиперболи, тя ще лежи в допълнителния ъгъл, образуван от асимптотите на тази крива, която се пресича от l. Експериментите с GSP показват, че съществуват случаи, когато $\bar{k}(O)$, $\bar{k}(S_a)$, $\bar{k}(S_b)$ и $\bar{k}(S_c)$ се разпределят по двойки хомотетични хиперболи (Фиг. 4); съществуват случаи, когато три от тях са хомотетични, а четвъртата лежи в допълнителния ъгъл на асимптотите им (Фиг. 3); съществуват случаи, при които и четирите хиперболи са хомотетични (Фиг. 5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Паскалев, Г., И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.