АЗ·БУКИ
Национално
издателство
за образование
и наука

www.azbuki.bg

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАУЧНО СПИСАНИЕ
■ ГОДИНА LXI ■ КНИЖКА 4, 2018

MATHEMATICS AND INFORMATICS

BULGARIAN JOURNAL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND PRACTICE
VOLUME 61 ■ NUMBER 4, 2018

4 2018
ГОДИНА LXI

София – Sofia
2018

Профил на списанието

Списание „Математика и информатика" излиза от 1958 г. и е продължител на списания „Математика и физика" (до 1976 г.), „Обучението по математика" (до 1988 г.) и „Обучението по математика и информатика" (до 1994 г.). Носител е на орден „Св. св. Кирил и Методий".

Стремежът на редколегията е да съчетае в хармонично единство знанието, ученето и технологиите с надеждата да илюстрира идеята, че едно от най-важните приложения в науката е образованието. Освен материали, отразяващи добрите традиции в преподаването на математика и информатика у нас, в списанието се третират проблеми, свързани с иновативни образователни стратегии. На страниците му намират място разработки в рамките на престижни европейски проекти, чиито автори са международни експерти, български учени, учители и дори ученици, правещи първите си стъпки в науката. Дискутират се идеи и добри практики за интегриране на математиката, информатиката и информационните технологии с цел да се насърчи изследователският подход в учебния процес.

Основни рубрики са: „Ние и светът"; „Математическото образование по света"; „Международни проекти"; „Математика & Информатика"; „Учебни програми. Учебници"; „Въпроси на преподаването"; „Извънкласна работа"; „Научнопопулярен отдел"; „Проучвания. Резултати"; „Дискусии"; „Олимпиади. Състезания"; „Конкурсните изпити по математика и информатика"; „Ако работите с малките ученици"; „Из историята на математиката"; „Наши учени. Наши учители"; „За студентите".

Journal Scope

The Mathematics and Informatics journal has been published since 1958. It is a continuation of Mathematics and Physics (till 1976). The Teaching of Mathematics (till 1988), The Teaching of Mathematics and Informatics (till 1994). It was awarded the national order of „Cyril and Methodius".

The core mission of the editorial staff is to integrate harmonically knowledge, learning and technologies in the belief that education is one of the most important science applications. Together with publications reflecting good traditions in teaching mathematics and informatics the journal considers innovative educational strategies. It communicates contributions to prestigious European projects related to education, whose authors are international experts, Bulgarian researchers, teachers, and even students making their first steps in research. Ideas and good practices in integrating mathematics, informatics and ICT for promoting the inquiry-based learning are being published and discussed.

Basic headings: We and the world; Mathematical Education Worldwide; International Projects; Mathematics & Informatics; Curricula. Textbooks; Teaching Matter; Out-of-class Work; Scientific-popular Reading; Research. Results; Discussions; Olympiads. Competitions; Entrance Exams in Mathematics and Informatics; If You Work with Young Students; On the History of Mathematics; Bulgarian Scientists. Bulgarian Teachers; For University Students.

Web of Science

Mathematics and Informatics Journal is indexed and abstracted in Web of Science: Emerging Sources Citation Index

ERIH PLUS

Mathematics and Informatics Journal is included in the European Reference Index for the Humanities and the Social Sciences (ERIH PLUS)

EBSCO HOST

The Mathematics and Informatics Journal articles are included in EBSCOhost Research Databases

Central and Eastern European Online Library

The Mathematics and Informatics Journal articles are full text indexed by the Central and Eastern European Online Library (CEEOL)

The Mathematics and Informatics Journal articles are indexed by Google Scholar, Primo (Ex Libris) and Summon (ProQuest)

Министерство
на образованието
и науката

АЗ-БУКИ

Национално
издателство
за образование и наука

Математика и информатика

Научно списание

Mathematics and Informatics

Bulgarian Journal of Educational Researh and Practice

Година LXI ■ Книжка 4 ■ 2018

Volume 61 ■ Number 4 ■ 2018

София – Sofia
2018

Научно списание
Математика и информатика
http://mathinfo.azbuki.bg
Главен редактор:
Проф. д.п.н. Сава Гроздев
Висше училище по застраховане
и финанси – ВУЗФ
Ул. „Гусла“ №1
1618 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Bulgarian Journal of Educational Research and Practice
Mathematics and Informatics
http://mathinfo.azbuki.bg/
Editor-in-Chief:
Prof. Sava Grozdev, DSc.
Professor, Doctor in Mathematics, DSc. in Pedagogy
University of Finance, Business and Entrepreneurship
Gusla Street, 1
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Издател:
Национално издателство
за образование и наука „Аз-буки“
Директор:
Д-р Надя Кантарева-Барух
Научен ръководител направление
„Обществени и хуманитарни науки“:
проф. д.ф.н. Добрин Добрев
Научен ръководител направление
„Природни науки и математика“:
проф. д.х.н. Борислав Тошев
Дизайн на корицата:
Ива Батаклиева
Графичен дизайн:
Гергана Пониванова
Стилист-коректор:
Анелия Врачева
Разпространение:
Иван Шопов

Адрес на издателството:
бул. „Цариградско шосе“ 125, бл. 5
1113 София
тел. 02/ 425 0470;
02/ 425 0471; 02/ 425 0472
www.azbuki.bg
e-mail: mathinfo@azbuki.bg

Печат:
„Алианс принт“ ЕООД
Формат 70/100/16.
Печатни коли: 6

Publisher:
Az-buki
National Publishing House
Director:
Dr. Nadya Kantareva-Baruh
Scientific Head of Section
„Social Sciences and Humanities“:
Prof. Dobrin Dobrev, DSc
Scientific Head of Section
„Natural Sciences and Mathematics“:
Prof. Borislav Toshev, DSc
Cover Design:
Iva Bataklieva
Layout Design and Prepress:
Gergana Popivanova
Stylist-Corrector:
Aneliya Vracheva
Distribution:
Ivan Shopov

Publishing House Address:
125, Tzarigradsko Chaussee Blvd., bl. 5
1113 Sofia, Bulgaria
tel. + 359 2/ 425 0470;
+ 359 2/ 425 04 71; + 359 2/ 425 0472
www.azbuki.bg
e-mail: mathinfo@azbuki.bg

Printing House:
Aliance Print Ltd
Size: 70/100/16.
Printed Quires: 6

Списанието излиза 6 пъти годишно: *книжка 1 (януари-февруари); книжка 2 (март-април); книжка 3 (май-юни); книжка 4 (юли-август); книжка 5 (септември-октомври); книжка 6 (ноември-декември).*
Printout: six issues per year. *Issue 1 (january-february); Issue 2 (march-april); Issue 3 (may-june); Issue 4 (july-august); Issue 5 (september-october); Issue 6 (november-december)*

ISSN 1310 – 2230 (Print)
ISSN 1314 – 8532 (Online)

Издател на научно списание „Математика и информатика“ е НИОН „Аз-буки“ – в съответствие с чл. 51 от Закона за предучилищно и училищно образование

доц. д-р Веселин Ненков – *Колеж Ловеч, Технически университет – Габрово*

доц. д-р Даниела Дурева-Тупарова – *ЮЗУ „Н. Рилски“*

доц. д-р Бойко Банчев – *Институт по математика и информатика – Българска академия на науките*

доц. д-р Иван Держански – *Институт по математика и информатика – Българска академия на науките*

доц. д-р Росен Николаев – *Икономически университет – Варна*

гл. ас. д-р Тодор Митев – *Русенски университет „А. Кънчев“*

доц. д-р Петя Асенова – *Нов български университет*

доц. д-р Ангел Ангелов – *СУ „Св. Кл. Охридски“*

доц. д-р Ивайло Старибратов – *директор, ОМГ – Пловдив*

д-р Диана Стефанова – *учител, Асеновград*

Маня Манева – *гл. експерт, МОН*

Ирина Шаркова – *учител, ПЧМГ*

Гергана Николова – *учител, ПМГ – Бургас*

Митко Кунчев – *директор, МГ „Баба Тонка“ – Русе*

Катя Чалъкова – *учител, ПМГ – Димитровград*

Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof. – *Technical College Lovech, Technical University – Gabrovo (Bulgaria)*

Dr. Daniela Dureva-Tuparova, Assoc. Prof. – *South-West University – Blagoevgrad (Bulgaria)*

Dr. Boyko Banchev, Assoc. Prof. – *Institute of Mathematics and Informatics – Bulgarian Academy of Sciences (Bulgaria)*

Dr. Ivan Derjanski, Assoc. Prof. – *Institute of Mathematics and Informatics – Bulgarian Academy of Sciences (Bulgaria)*

Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof. – *University of Economics – Varna (Bulgaria)*

Dr. Todor Mitev, Assist. Prof. – *University of Ruse (Bulgaria)*

Dr. Petya Angelova, Assoc. Prof. – *New Bulgarian University – Sofia (Bulgaria)*

Dr. Angel Angelov, Assoc. Prof. – *University of Sofia (Bulgaria)*

Dr. Ivaylo Staribratov, Assoc. Prof. – *principal, High School of Mathematics – Plovdiv (Bulgaria)*

Dr. Diana Stefanova – *teacher, Assenovgrad (Bulgaria)*

Ms. Manya Maneva – *Ministry of Education and Science (Bulgaria)*

Ms. Irina Sharkova – *First Private High School of Mathematics – Sofia (Bulgaria)*

Ms. Gergana Nikolova – *teacher, High School of Mathematics – Burgas (Bulgaria)*

Mr. Mitko Kunchev – *principal, High School of Mathematics – Ruse (Bulgaria)*

Ms. Katya Chalukova – *teacher, High School of Mathematics – Dimitrovgrad (Bulgaria)*

CONTENTS / СЪДЪРЖАНИЕ

EDUCATIONAL MATTERS /
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ

327 За простите числа [About the Prime Numbers] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

338 Инцентър на четириъгълник [Incenter of a Quadrilateral] / *Станислав Стефанов / Stanoslav Stefanov*

352 Полиноми с кратни корени във върховете на триъгълник [Polynomials with Multiple Roots in the Vertices of a Triangle] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

EDUCATIONAL TECHNOLOGIES /
ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ

360 Епициклоида [Epicycloid] / *Инкар Аскар, Камила Сарсембаева / Inkar Askar, Kamila Sarsenbayeva*

368 Гипоциклоида [Hypocycloid] / *Борислав Борисов, Деян Димитров, Иван Стефанов, Николай Нинов, Теодор Христов / Borislav Borisov, Deyan Dimitrov, Ivan Stefanov, Nikolay Ninov, Teodor Hristov*

378 Множества от точки, породени от двойки равнобедрени триъгълници със специално разположение на основите [Sets of Points, Generated by a Pair of Isosceles Triangles with a Special Location of Their Bases] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

396 Четири нови докторски дисертации по методика на обучението по математика и информатика [Four New Phd Dissertations In Methodology of Mathematics and Informatics Teaching] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ
403 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of Issue]

404 Решения на задачите от брой 5, 2017 [Solutions of the Contest Problems from issue 5, 2017]

411 READ IN THE LATEST ISSUES OF „AZBUKI“ JOURNALS / В НОВИТЕ БРОЕВЕ НА СПИСАНИЯТА НА ИЗДАТЕЛСТВО „АЗ БУКИ“ ЧЕТЕТЕ

413 GUIDE FOR AUTHORS / УКАЗАНИЯ ЗА АВТОРИТЕ

ПОЛИНОМИ С КРАТНИ КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА ТРИЪГЪЛНИК

[1)]Сава Гроздев, Веселин Ненков
[1)]Висше училище по застраховане и финанси – София

Резюме. Разгледана е една геометрична връзка между корените на полином и тези на неговата производна, когато всички корени на полинома се намират в три неколинеарни точки. Тази връзка се осъществява чрез фокусите на специална елипса, определена от кратностите на корените на полинома.
Keywords: polynomial; root; triangle; ellipse; focus

Известна е една геометрична връзка между корените на полиномите от трета степен с неколинеарни корени и корените на съответните им производни. Според тази връзка, ако корените на полином от трета степен са разположени във върховете на триъгълник, то корените на неговата производна се намират във фокусите на елипсата, допираща се до страните на триъгълника в техните среди (Nenkov, 2010). От друга страна, освен споменатата елипса във всеки триъгълник могат да се впишат безброй много елипси. Затова възниква въпросът за възможността някои от тези елипси също да осъществяват геометрични връзки между полиноми и съответните им производни. Оказва се, че някои от тези елипси осъществяват геометрични връзки между някои видове полиноми с кратни корени във върховете на разглеждан триъгълник и корените на неговата производна.

Преди да преминем към излагане на основното съдържание на този въпрос, ще отбележим три помощни твърдения.

Лема 1. *Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури* (Grozdev & Nenkov, 2018 a)

Ясно е, че ако един нормиран полином (който има коефициент 1 пред най-високата си степен) и един ненормиран полином (който има коефициент, различен от 1, пред най-високата си степен) имат едни и същи корени, то и техните производни ще имат едни и същи корени. Затова от тази лема следва, че ако за производната на един нормиран полином от известен клас установим геометрията на корените му, то можем да твърдим, че всеки полином от този клас има същата геометрия на корените си (Grozdev & Nenkov, 2018 a).

Лема 2. *Ако* a_1, a_2, $\ldots$, a_s *са корени на полином* $P(z)$ *от* n *-та степен,* k_j $(j=1,2,\ldots,s)$ *са съответните им кратности и* $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$*, то коефициентът пред първата степен на променливата* z *е равен на:*

$$a_1^{k_1-1}a_2^{k_2-1}\ldots a_s^{k_s-1}\left(k_1a_2a_3\ldots a_{s-1}a_s+k_2a_3a_4\ldots a_sa_1+\cdots+k_sa_{s-1}a_{s-2}\ldots a_2a_1\right).$$

Доказателство. Означаваме корените на $P(z)$ с b_1, b_2, ..., b_n. Коефициентът пред z според формулите на Виет е сума на n събираеми, получени от всевъзможните произведения на числата b_1, b_2, $\ldots$, b_n, взети по $n-1$ пъти във всяко събираемо.

Нека $b_1=a_1$, $b_2=a_2$, $\ldots$, $b_s=a_s$; $b_{s+1}=b_{s+2}=\cdots=b_{s+k_1-1}=a_1$,

$$b_{s+k_1}=b_{s+k_1+1}=\cdots=b_{s+k_1+k_2-2}=a_2,\ \ldots,$$

$$b_{s+k_1+k_2+\cdots+k_{s-1}-(s-2)}=b_{s+k_1+k_2+\cdots+k_{s-1}-(s-2)+1}=\cdots=b_{s+k_1+k_2+\cdots+k_{s-1}-(s-2)+k_s-2}=a_s$$

$$\left(b_{n-k_s+2}=b_{n-k_s+3}=\cdots=b_{n-1}=b_n=a_s\right).$$

Едно от събираемите в коефициента пред z е $b_1b_2\ldots b_{n-2}b_{n-1}$ $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_{s-1}^{k_s}a_s^{k_s}$ (тъй като липсва само $b_n=a_s$). Сега, ако заменим в $b_1b_2\ldots b_{n-2}b_{n-1}$ последователно b_{n-1}, b_{n-2}, $\ldots$, b_{n-k_s+2} с b_n, получаваме още k_s-2 пъти $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_{s-1}^{k_{s-1}}a_s^{k_s-1}$. Следователно по този начин получаваме k_s-1 пъти това събираемо. Накрая, като заменим b_s с b_n, получаваме същото произведение още един път. Следователно цялата сума съдържа произведението $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_{s-1}^{k_{s-1}}a_s^{k_s-1}$ точно k_s пъти.

Като приложим същата идея за всеки от другите корени, получаваме съответното събираемо в твърдението на лемата. Така стигаме до доказателство на лемата.

Лема 3. *Ако точките* P_1*,* P_2 *и* P_3 *лежат съответно върху страните* A_2A_3*,* A_3A_1 *и* A_1A_2 *на* $\Delta A_1A_2A_3$*, то коничното сечение* k*, минаващо през* P_1*,* P_2 *и* P_3*, се допира до правите* A_2A_3*,* A_3A_1 *и* A_1A_2 *тогава и само тогава, когато правите* A_1P_1*,* A_2P_2 *и* A_3P_3 *минават през една точка* P*.*

Доказателство. Нека коничното сечение k се допира до правите A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 съответно в точките P_1, P_2 и P_3. Означаваме правите A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 съответно с p_1, p_2 и p_3. Ако разгледаме тези прави в реда $p_1p_2p_2p_3p_3p_1$, според теоремата на Брианшон (Mateev, 1977) получаваме, че правите $p_1=A_1P_1$, $p_2=A_2P_2$ и $p_3=A_3P_3$ се пресичат в една точка P.

Обратно, ако правите $p_1=A_1P_1$, $p_2=A_2P_2$ и $p_3=A_3P_3$ се пресичат в една точка P и отново разгледаме реда прави $p_1p_2p_2p_3p_3p_1$, то според теоремата на Брианшон (Mateev, 1977), приложена в обратна посока, следва, че P_1, P_2 и

P_3 са допирни точки съответно за правите A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 към конично сечение k. С това лемата е доказана.

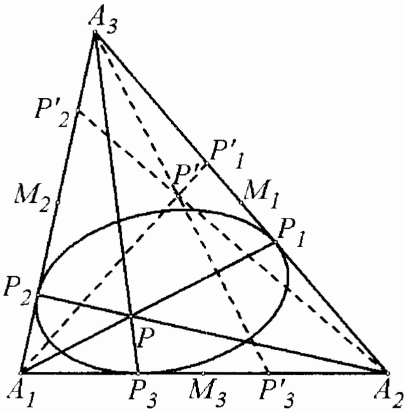
За да подчертаем по-дълбоката връзка между полиномите с кратни корени във върховете на даден триъгълник $A_1A_2A_3$ и някои от вписаните в този триъгълник елипси, да предположим, че точките A_1, A_2 и A_3 са снабдени с маси k_1, k_2 и k_3. Това означава, че разглеждаме масовите точки (k_1, A_1), (k_2, A_2) и (k_3, A_3) (Paskalev & Chobanov, 1985).

Ако в точките P_1', P_2' и P_3' се намират масовите центрове съответно на двойките масови точки (k_2, A_2) и (k_3, A_3), (k_3, A_3) и (k_1, A_1) и (k_1, A_1) и (k_2, A_2), то са изпълнени равенствата: $\overline{A_2P_1'} : \overline{A_3P_1'} = -k_3 : k_2$, $\overline{A_3P_2'} : \overline{A_1P_2'} = -k_1 : k_3$, $\overline{A_1P_3'} : \overline{A_2P_3'} = -k_2 : k_1$ (Paskalev & Chobanov, 1985). От тези равенства и теоремата на Чева (Paskalev & Chobanov, 1985) следва, че правите A_1P_1', A_2P_2' и A_3P_3' се пресичат в една точка P', в която се намира центърът на масите на трите разглеждани масови точки (Paskalev & Chobanov, 1985). Според лема 3 правите A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 са допирателни към елипса k' съответно в точките P_1', P_2' и P_3.

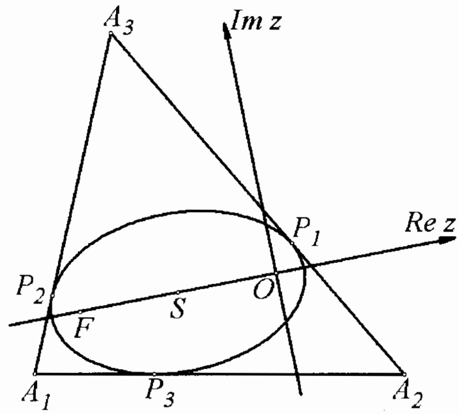
Ако точките P_1, P_2 и P_3 са такива, че са изпълнени равенствата

$$(1) \qquad \overline{A_2P_1} : \overline{A_3P_1} = -k_2 : k_3,\ \overline{A_3P_2} : \overline{A_1P_2} = -k_3 : k_1,\ \overline{A_1P_3} : \overline{A_2P_3} = -k_1 : k_2,$$

в тях се намират масовите центрове съответно на двойките масови точки (k_2^{-1}, A_2) и (k_3^{-1}, A_3), (k_3^{-1}, A_3) и (k_1^{-1}, A_1) и (k_1^{-1}, A_1) и (k_2^{-1}, A_2). Точките P_1, P_2 и P_3 са симетрични съответно на P_1', P_2' и P_3' спрямо средите M_1, M_2 и M_3 съответно на отсечките A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 (фиг. 1). От равенствата (1) и теоремата на Чева следва, че правите A_1P_1, A_2P_2 и A_3P_3 се пресичат в една точка P, в която се намира центърът на масите за масовите точки (k_1^{-1}, A_1), (k_2^{-1}, A_2) и (k_3^{-1}, A_3) (фиг. 1). По този начин получаваме, че точките P и P' са изотомично спрегнати спрямо $\Delta A_1A_2A_3$ (Paskalev & Chobanov, 1985). Според лема 3 правите A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 са допирателни към елипса k съответно в точките P_1, P_2 и P_3 (фиг. 1). Ще покажем, че именно елипсата k е свързващият елемент между корените на полином с кратни корени във върховете на $\Delta A_1A_2A_3$ и неговата производна.



Фигура 1



Фигура 2

Нека елипсата k има за фокус точката O, фокален параметър p и числен ексцентрицитет e. Спрямо Гаусовата координатна система K_0 от фиг. 2, както е показано в (Nenkov, 1998), афиксите p_j и a_j на точките P_j и A_j $(j=1,2,3)$ се изразяват съответно с формулите

$$(2) \qquad p_1=\frac{2p}{e.t_1+2t_1+e},\ p_2=\frac{2p}{e.t_2+2t_2+e}\ p_3=\frac{2p}{e.t_3+2t_3+e}.$$

$$(3)\ a_1=\frac{2p}{et_2t_3+t_2+t_3+e},\ a_2=\frac{2p}{et_3t_1+t_3+t_1+e},\ a_3=\frac{2p}{et_1t_2+t_1+t_2+e},$$

където $|t_1|=|t_2|=|t_3|=1$.

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че да бъдат изпълнени равенствата (1). Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k, A_l и P_j от една права се изразява с равенството $\frac{\overline{A_kP_j}}{\overline{A_lP_j}}=\frac{a_k-p_j}{a_l-p_j}$, от (2) и (3) след несложни пресмятания се получават равенствата

$$(4) \qquad \frac{\overline{A_2P_1}}{\overline{A_3P_1}}=\frac{t_3-t_1}{t_2-t_1}.\frac{a_2}{a_3},\ \frac{\overline{A_3P_2}}{\overline{A_1P_2}}=\frac{t_1-t_2}{t_3-t_2}.\frac{a_3}{a_1},\ \frac{\overline{A_1P_3}}{\overline{A_2P_3}}=\frac{t_2-t_3}{t_1-t_3}.\frac{a_1}{a_2}.$$

От второто и третото равенство в (4) и (1) следват равенствата

$$(5) \qquad a_2=-\frac{k_2}{k_1}.\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}.a_1,\ a_3=-\frac{k_3}{k_1}.\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}.a_1.$$

От равенствата (5) непосредствено се получава и равенството

$$(6)\qquad k_1a_2a_3 + k_2a_3a_1 + k_3a_1a_2 = 0.$$

Сега да разгледаме нормирания полином $P_0(z)$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти от степен $n = k_1 + k_2 + k_3$, който има k_j-кратен корен във върха A_j $(j = 1,2,3)$ на $\Delta A_1A_2A_3$. От лема 2 и равенството (6) следва, че коефициентът пред z има стойност 0. Затова производната $P_0'(z)$ има корен $z = 0$. Това всъщност на геометричен език означава, че $P_0'(z)$ има корен във фокуса O на елипсата k. Следователно, според лема 1 и бележката към нея, се получава, че производната $P'(z)$ на произволен полином $P(z)$ със свойствата на $P_0(z)$ има корен в точката O.

Аналогично, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус F на k, получаваме, че $P'(z)$ има корен и в точката F. По този начин доказахме следната

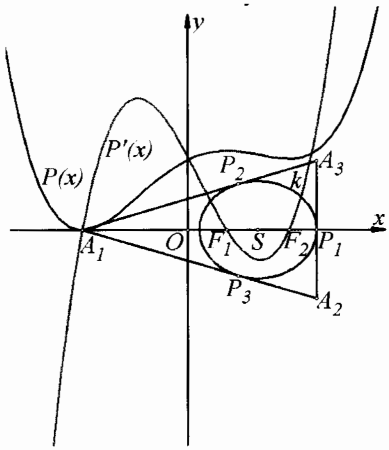
Теорема. *Ако един полином $P(z)$ от степен $n = k_1 + k_2 + k_3$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има k_j-кратен корен във върха A_j $(j = 1,2,3)$ на $\Delta A_1A_2A_3$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите на елипсата k, допираща се до правите A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 съответно в точките P_1, P_2 и P_3, за които са изпълнени равенствата $\overline{A_2P_1} : \overline{A_3P_1} = -k_2 : k_3$, $\overline{A_3P_2} : \overline{A_1P_2} = -k_3 : k_1$, $\overline{A_1P_3} : \overline{A_2P_3} = -k_1 : k_2$.*

Полиномът $P'(z)$ има ($k_j - 1$) -кратен корен във върха A_j $(j = 1,2,3)$ (Genov, Mihovski & Molov, 1991), а останалите два корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

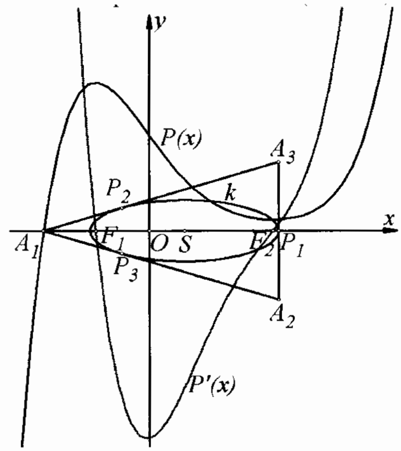
От теоремата непосредствено се получава следното

Следствие. *Ако един полином $P(z)$ от степен $n = 3.m$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има m-кратен корен във върха A_j $(j = 1,2,3)$ на $\Delta A_1A_2A_3$, то производната $P'(z)$ на $P(z)$ има корени във фокусите на елипсата k, допираща се до отсечките A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 в техните среди.*

По този начин се получава едно обобщение на теоремата, доказана в (Nenkov, 2010).

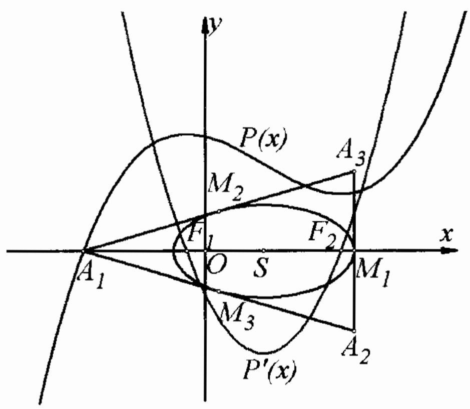


Фигура 3

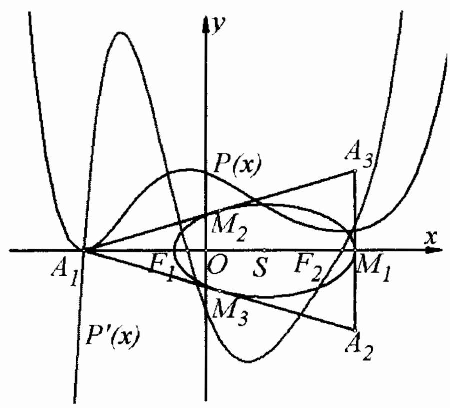


Фигура 4

Ако $P(z)=P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема и нейното следствие. На фиг. 3 е показан полином $P(x)$ с двукратен реален корен в A_1 и два прости комплексно спрегнати корена в A_2 и A_3. Производната $P'(x)$ има три прости реални корена, съответните точки на които са върхът A_1 и фокусите F_1 и F_2 на елипсата k. На фиг. 4 е представен полином $P(x)$ с прост реален корен в A_1 и два двукратни комплексно спрегнати корена в A_2 и A_3. Производната $P'(x)$ има два прости реални корена, съответните точки на които са фокусите F_1 и F_2 на елипсата k.

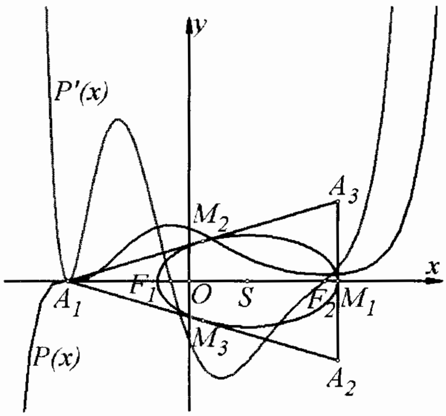


Фигура 5

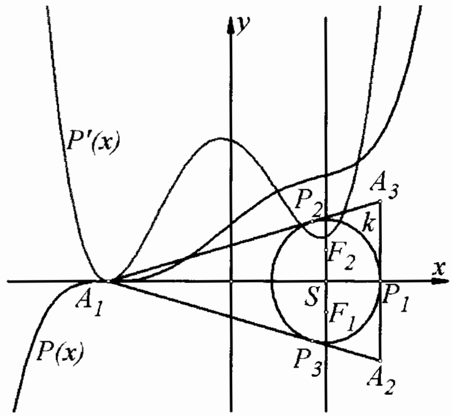


Фигура 6

Полиноми, които съответстват на следствието, са показани на фиг. 5, 6 и 7. Тези полиноми имат съответно прости, двукратни и трикратни корени във върховете на $\Delta A_1A_2A_3$, т.е. те се получават при $m=1$, $m=2$ и $m=3$.



Фигура 7



Фигура 8

На фиг. 8 полиномът $P(x)$ има трикратен реален корен в A_1 и два прости комплексно спрегнати корена в A_2 и A_3. Графиката на производната $P'(x)$ не минава през фокусите F_1 и F_2 на елипсата k, тъй като те отговарят на два комплексно спрегнати корена на $P'(x)$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers*. Kiev: Radjansk school. [Балк, М., Г. Балк & А. Полухин (1988). *Реальные применения мнимых чисел*. Киев: Радянська школа.]

Genov, G, S Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2018 b). Polynomials of forth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and Informatics, 3*, 277 – 282. [Гроздев, С. & В. Ненков (2018 b). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник. Математика и информатика, 3, 277 – 282.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2018 a). Polynomials of third degree with collinear roots, *Mathematics and Informatics, 3*, 283 – 293. [Гроздев, С.

& В. Ненков (2018 а). Полиноми от трета степен с колинеарни корени. *Математика и информатика, 3*, 283 – 293.]

Mateev, A. (1977). *Projective geometry*. Sofia: Nauka i Izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]

Маркушевич, А. & Л. Маркушевич (1980). *Увод в теорията на аналитичните функции*. София: Наука и изкуство. [Markushevich, A. & L. Markushevich (1980). *Introduction to the theory of Analytic functions*. Sofia: Nauka i Izkustvo.]

Nenkov, V. (1998). Conics inscribed in a triangle. *Mathematics and Informatics*, 5, 54 – 59 [Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник. *Математика и информатика, 5*, 54 – 59.]

Nenkov, V. (2010). A relation between non-real roots and a real ellipse. *Mathematics Plus*, 2, 61 – 63 [Ненков, В. (2010). Една връзка между нереални корени и реална елипса, *Математика плюс, 2*, 61 – 63.]

Paskalev, G. & I. Chobanov. (1985). *Notable points in the triangle*. Sofia: Narodna prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

Prasolov, V. (1986). *Problems in plane geometry. Part II.* Moscow: Nauka. [Прасолов, В. (1986). *Задачи по планиметрии. Часть II.* Москва: Наука.]

POLYNOMIALS WITH MULTIPLE ROOTS IN THE VERTICES OF A TRIANGLE

Abstract. It is considered a geometric relation between the roots of a polynomial and the roots of its derivative, when all roots of the polynomial are in three non-collinear points. This relation is realized through the focuses of a special ellipse, which is determined by the multiplicities of the polynomial roots.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
45, Stoyan Balgarencheto Str.
5662 Beli Osam, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg