Министерство
на образованието
и науката

АЗ·БУКИ
Национално
издателство
за образование и наука

Математика и информатика

Научно списание

Mathematics and Informatics

Bulgarian Journal of Educational Research and Practice

Година LXIII ■ Книжка 3 ■ 2020

Volume 63 ■ Number 3 ■ 2020

София – Sofia
2020

Научно списание
Математика и информатика
http://mathinfo.azbuki.bg
Главен редактор:
проф. д.п.н. Сава Гроздев
Висше училище по застраховане
и финанси – ВУЗФ
Ул. „Гусла“ №1
1618 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Bulgarian Journal of Educational Research and Practice
Mathematics and Informatics
http://mathinfo.azbuki.bg/
Editor-in-Chief:
Prof. Sava Grozdev, DSc.
Professor, Doctor in Mathematics, DSc. in Pedagogy
University of Finance, Business and Entrepreneurship
Gusla Street, 1
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Издател:
Национално издателство
за образование и наука „Аз-буки“

Директор:
Д-р Надя Кантарева-Барух
Научен ръководител направление
„Обществени и хуманитарни науки“:
проф. д.ф.н. Добрин Добрев
Научен ръководител направление
„Природни науки и математика“:
проф. д.х.н. Борислав Тошев
Дизайн на корицата:
Ива Батаклиева
Графичен дизайн:
Гергана Попиванова
Стилист-коректор:
Анелия Врачева
Разпространение:
Иван Шопов

Адрес на издателството:
бул. „Цариградско шосе“ 125, бл. 5
1113 София
тел. 02/ 425 0470;
02/ 425 0471; 02/ 425 0472
www.azbuki.bg
e-mail: mathinfo@azbuki.bg

Печат:
„Алианс принт“ ЕООД
Формат 70/100/16.
Печатни коли: 7,5

Publisher:
Az-buki
National Publishing House

Director:
Dr. Nadya Kantareva-Baruh
Scientific Head of Section
„Social Sciences and Humanities“:
Prof. Dobrin Dobrev, DSc
Scientific Head of Section
„Natural Sciences and Mathematics“:
Prof. Borislav Toshev, DSc
Cover Design:
Iva Bataklieva
Layout Design and Prepress:
Gergana Popivanova
Stylist-Corrector:
Aneliya Vracheva
Distribution:
Ivan Shopov

Publishing House Address:
125, Tzarigradsko Chaussee Blvd., bl. 5
1113 Sofia, Bulgaria
tel. + 359 2/ 425 0470;
+ 359 2/ 425 04 71; + 359 2/ 425 0472
www.azbuki.eu
e-mail: mathinfo@azbuki.bg

Printing House:
Aliance Print Ltd
Size: 70/100/16.
Printed Quires: 7,5

Списанието излиза 6 пъти годишно: *книжка 1 (януари-февруари); книжка 2 (март-април); книжка 3 (май-юни); книжка 4 (юли-август); книжка 5 (септември-октомври); книжка 6 (ноември-декември).*
Printout: six issues per year. *Issue 1 (january-february); Issue 2 (march-april); Issue 3 (may-june); Issue 4 (july-august); Issue 5 (september-october); Issue 6 (november-december)*

С изпращането на текст или илюстрация до редакцията на НИОН „Аз-буки“ авторът се съгласява да преотстъпи правата за анонсиране, публикуване и разпространение в изданията на издателството. Авторските права на публикуваните текстове и илюстрации са собственост на НИОН „Аз-буки“.
Материали, които не са одобрени за публикуване, не се рецензират и не се връщат на авторите.

By sending text or illustration to Az-buki Publishing House, the author agrees to submit the copyrights for announcing, publishing and distributing in all Az-buki editions. The copyright of all published texts and illustrations is property of Az-buki Publishing House. Not accepted for publication texts are not reviewed or sent back to the authors.

ISSN 1310 – 2230 (Print)
ISSN 1314 – 8532 (Online)

Издател на научно списание „Математика и информатика“ е НИОН „Аз-буки“ –
в съответствие с чл. 51 от Закона за предучилищно и училищно образование

Главен редактор

Проф. д.п.н. Сава Гроздев,
Висше училище по застраховане и финанси – София

Editor-in-Chief

Prof. Sava Grozdev, DSc.,
University of Finance, Business and Entrepreneurship – Sofia (Bulgaria)

Редактор

Живка Бакалова

Editor

Ms. Zhivka Bakalova

Редакционна колегия

Проф. д.м.н. чл.-кор. на РАО Николай Розов – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова – Москва (Россия)

Проф. д.п.н. Татяна Сергеева – Академия социального управления – Москва (Россия)

Проф. д.п.н. Мария Шабанова – Московский институт открытого образования – Москва (Россия)

Prof. Dr. Risto Malceski – FON University – Skopje (Macedonia)

Prof. Dr. Gregory Makrides – Thales Foundation – Nicosia (Cyprus)

Prof. Dr. Florence Singer – University of Ploiesti (Romania)

Prof. Dr. Sefket Arslanagic – University of Saraevo – Saraevo (Bosnia and Herzegovina)

Prof. Dr. Atanasios Gagatsis – University of Cyprus – Nicosia (Cyprus)

Prof. Dr. Michalis Lambru – University of Crete (Greece)

Проф. д-р Асен Рахнев – ПУ „П. Хилендарски“

Проф. д-р Коста Гъров – ПУ „П. Хилендарски“

Проф. д-р Росен Николаев – Икономически университет – Варна

Editorial Board

Prof. Nikolay Rozov, DSc., Academician of Russian Academy of Education

Prof. Tatyana Sergeeva, DSc. – Academy of Public Administration – Moscow (Russia)

Prof. Maria Shabanova, DSc. – Moscow State University of Open Education (Russia)

Prof. Dr. Risto Malceski – FON University – Skopje (Macedonia)

Prof. Dr. Gregory Makrides – Thales Foundation – Nicosia (Cyprus)

Prof. Dr. Florence Singer – University of Ploiesti (Romania)

Prof. Dr. Sefket Arslanagic – University of Saraevo (Bosnia and Herzegovina)

Prof. Dr. Atanasios Gagatsis – University of Cyprus – Nicosia (Cyprus)

Prof. Dr. Michalis Lambru – University of Crete (Greece)

Prof. Dr. Assen Rahnev – University of Plovdiv (Bulgaria)

Prof. Dr. Kosta Garov – University of Plovdiv (Bulgaria)

Prof. Dr. Rosen Nikolaev – University of Economics – Varna (Bulgaria)

Assoc. Prof. Dr. Katerina Anevska –
FON University – Skopje (Macedonia)

Проф. д-р Веселин Ненков – Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“ – Варна

Доц. д-р Даниела Дурева-Тупарова – Югозападен университет „Н. Рилски“

Доц. д-р Людмила Хаймина – Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова – Архангельск (Россия)

Доц. д-р Бойко Банчев –
Институт по математика и информатика – Българска академия на науките

Доц. д-р Иван Держански –
Институт по математика и информатика – Българска академия на науките

Гл. ас. д-р Тодор Митев –
Русенски университет „А. Кънчев“

Доц. д-р Петя Асенова –
Нов български университет

Доц. д-р Ангел Ангелов –
СУ „Св. Кл. Охридски“

Жечка Тотева –
ЦЕРН – Женева (Швейцария)

Д-р Диана Стефанова –
учител, Асеновград

Маня Манева –
гл. експерт, МОН

Ирина Шаркова –
учител, ПЧМГ

Д-р Маряна Кацарска – учител, 12. СУ „Иван Асен II“ – София

Галина Бобева –
директор, МГ „Баба Тонка“ – Русе

Катя Чалъкова –
учител, ПМГ – Димитровград

Assoc. Prof. Dr. Katerina Anevska –
FON University – Skopje (Macedonia)

Prof. Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof. – Nikola Vaptsarov Naval Academy – Varna (Bulgaria)

Dr. Daniela Dureva-Tuparova, Assoc. Prof. – South-West University – Blagoevgrad (Bulgaria)

Dr. Lyudmila Haymina, Assoc. Prof. – M. Lomonossov North-Arctic Federal University - Archangelsk (Russia)

Dr. Boyko Banchev, Assoc. Prof. –
Institute of Mathematics and Informatics – Bulgarian Academy of Sciences (Bulgaria)

Dr. Ivan Derjanski, Assoc. Prof. –
Institute of Mathematics and Informatics – Bulgarian Academy of Sciences (Bulgaria)

Dr. Todor Mitev, Assist. Prof. –
University of Ruse (Bulgaria)

Dr. Petya Asenova, Assoc. Prof. –
New Bulgarian University – Sofia (Bulgaria)

Dr. Angel Angelov, Assoc. Prof. –
University of Sofia (Bulgaria)

Ms. Zhechka Toteva –
CERN/IT – Geneva (Switzerland)

Dr. Diana Stefanova –
teacher, Assenovgrad (Bulgaria)

Ms. Manya Maneva –
Ministry of Education and Science (Bulgaria)

Ms. Irina Sharkova – First Private High School of Mathematics – Sofia (Bulgaria)

Dr. Maryana Katzarska – teacher, Ivan Asen II High School – Sofia (Bulgaria)

Ms. Galina Bobeva – principal, High School of Mathematics – Ruse (Bulgaria)

Ms. Katya Chalukova – teacher, High School of Mathematics – Dimitrovgrad (Bulgaria)

© Министерство на образованието и науката

Contents of Issue 3/2020 / Съдържание на брой 3/2020

EDUCATIONAL MATTERS / НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ

235 За данните и пътя към големите данни [About the Data and the Road Towards the Big Data] / *Павел Азълов / Pavel Azalov*

271 Съвременни средства и методи за обучение, използващи облачни технологии [Contemporary Means and Teaching Methods, Using Cloud Technologies] / *Любка Славова, Коста Гъров* / *Lyubka Slavova, Kosta Garov*

286 Интегративен урок по предмета „Математическа технологичност“ в условия на дистанционно обучение [Integrative Classes on the Subject “Mathematical Technology” Under Distant Learning Teaching] / *Костадин Петлешков / Kostadin Petleskov*

291 Designing a Professional Training Program for Working with Gifted Children Using Software Office 365 / *Oleg Zverev, Tatiana Sergeeva*

EDUCATIONAL TECHNOLOGIES /
ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ

297 Mathematical Modelling in Learning Outcomes Assessment (Binary Model for the Assessment of Student’s Competences Formation) / *L. E. Khaimina, E. A. Demenkova, M. E. Demenkov, E. S. Khaimin, L. I. Zelenina, I. M. Zashikhina*

306 Problems 2 and 5 on the IMO’2019 Paper / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

313 Конфигурации от педални окръжности на произволна точка в равнината на многоъгълник. [Configurations of Pedal Circles of an Arbitrary Point in the Plane of a Polygon.] / *Веселин Ненков, Станислав Стефанов, Хаим Хаимов / Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov, Haim Haimov*

324 Относно полиномите с корени във върховете на един клас изпъкнали четириъгълници [On the Polynomials with Roots in the Vertices of a Class of Convex Quadrilaterals] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

330 Анализ на анкетно проучване на учители по „Технологии и предприемачество“ [Analysis of an Inquiry Examination of Teachers in Technologies and Entrepreneurship] / *Костадин Петлешков / Kostadin Petleskov*

REVIEWS AND ANNOTATIONS / РЕЦЕНЗИИ И АНОТАЦИИ

333 Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия [Mathematical Competence Increase through Dynamic Geometry] / *Сава Гроздев / Sava Grozdev*

335 Рефлексивен модел за преподаване на компютърно моделиране в началния етап на обучение [Reflective Model for Teaching Computer Modeling in Primary Stage of Education] / *Юлия Дончева / Julia Doncheva*

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

338 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

339 Решения на задачите от брой 4, 2019 [Solutions of the Contest Problems from Issue 4, 2019]

342 READ IN THE LATEST ISSUES OF „AZ-BUKI“ JOURNALS / В НОВИТЕ БРОЕВЕ НА СПИСАНИЯТА НА ИЗДАТЕЛСТВО „АЗ-БУКИ“ ЧЕТЕТЕ

344 GUIDE FOR AUTHORS / УКАЗАНИЯ ЗА АВТОРИТЕ

Educational Technologies
Образователни технологии

ОТНОСНО ПОЛИНОМИТЕ С КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА ЕДИН КЛАС ИЗПЪКНАЛИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

[1] Сава Гроздев, [2] Веселин Ненков
[1] Висше училище по застраховане и финанси – София
[2] ВВМУ „Никола Вапцаров" – Варна

Резюме. Изведена е геометрична връзка между корените на полиноми на комплексна променлива с кратни корени във върховете на изпъкнал четириъгълник и корените на съответните им производни. Накрая, като приложение са разгледани някои полиноми на реална променлива с реални коефициенти.

Ключови думи: полином; производна на полином; корени на полином; изпъкнал четириъгълник; елипса; фокус

В (Grozdev & Nenkov, 2019) е описана една геометрична връзка между полиномите, корените на които се намират във върховете на успоредник, и корените на съответните им производни. Тази геометрична връзка съдържа фокусите на подходяща елипса, вписана в разглеждания успоредник. От друга страна, във всеки изпъкнал четириъгълник могат да се впишат безкраен брой елипси. Така възниква въпросът за съществуване на връзка между някои от тези елипси и производните на полиномите, които имат корени само във върховете на даден четириъгълник. Целта на този материал изложение е да се покаже как изглежда една такава връзка между някои полиноми с корени във върховете на изпъкнал четириъгълник, съответните им производни и подходящо подбрани елипси, вписани в разглеждания четириъгълник.

Преди да преминем към излагане на основното съдържание на разглежданата тема, ще отбележим две помощни твърдения.

Лема 1. *Ако корените на два полинома от една и съща степен образуват подобни геометрични фигури, то и корените на техните производни образуват подобни геометрични фигури.*

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018 a). От лема 1 следва, че от всички полиноми, принадлежащи на клас от полиноми с еднаква геометрия, е достатъчно да се изследва само някой нормиран полином, за да се определи геометрията на класа, определен от производните на полиномите от разглеждания клас.

Лема 2. *Ако* a_1, a_2, …, a_s *са корени на полином* $P(z)$ *от* n*-та степен, така че* a_j *е* k_j $(j=1,2,\ldots,s)$ *кратен корен на* $P(z)$ *и* $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$, *то коефициентът пред първата степен на променливата* z *е равен на*

$$a_1^{k_1-1}a_2^{k_2-1}\ldots a_s^{k_s-1}\left(k_1a_2a_3\ldots a_s+k_2a_3\ldots a_sa_1+\cdots+k_sa_1a_2\ldots a_{s-1}\right).$$

Доказателството на тази лема се съдържа в (Grozdev & Nenkov, 2018 b).

Основният резултат, който ще докажем, се съдържа в следващата теорема.

Теорема. *Нека* k_j $(j=1,2,3,4)$ *са естествени числа и* k *е елипса, вписана в изпъкналия четириъгълник* $A_1A_2A_3A_4$, *така че за допирните точки* P_1, P_2, P_3 *и* P_4 *на* k *съответно с отсечките* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 *и* A_4A_1 *са изпълнени равенствата:*

(1) $$\overline{A_1P_1}:\overline{A_2P_1}=-k_1:k_2,\ \overline{A_2P_2}:\overline{A_3P_2}=-k_2:k_3,\ \overline{A_3P_3}:\overline{A_4P_3}=-k_3:k_4,\ \overline{A_4P_4}:\overline{A_1P_4}=-k_4:k_1.$$

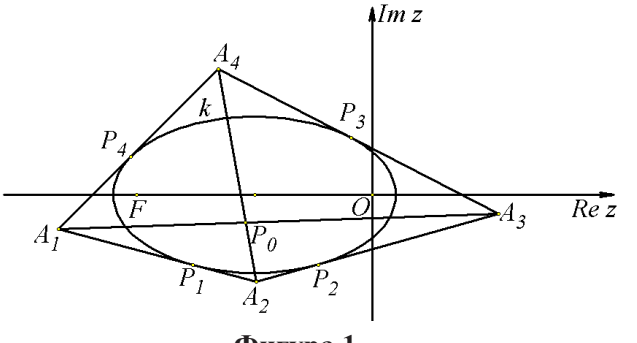
Ако един полином $P(z)$ от степен $n=k_1+k_2+k_3+k_4$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти има k_j кратен корен във върха A_j $(j=1,2,3,4)$ на $A_1A_2A_3A_4$, то производната на $P(z)$ има корени в точката $P_0=A_1A_3\cap A_2A_4$ и във фокусите на елипсата k.

Нека елипсата k има за фокус точката O, фокален параметър p и числен ексцентрицитет e. Спрямо Гаусовата координатна система K_0 от фиг. 1, както е показано в (Nenkov, 1998), афиксите p_j и a_j на точките P_j и A_j $(j=1,2,3,4)$ се изразяват съответно с формулите

(2) $$p_1=\frac{2p}{e.t_1^2+2t_1+e},\ p_2=\frac{2p}{e.t_2^2+2t_2+e},\ p_3=\frac{2p}{e.t_3^2+2t_3+e},\ p_4=\frac{2p}{e.t_4^2+2t_4+e}.$$

(3) $$a_1=\frac{2p}{et_4t_1+t_4+t_1+e},\ a_2=\frac{2p}{et_1t_2+t_1+t_2+e},\ a_3=\frac{2p}{et_2t_3+t_2+t_3+e},\ a_4=\frac{2p}{et_3t_4+t_3+t_4+e},$$

където $|t_1|=|t_2|=|t_3|=|t_4|=1$.



Фигура 1

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини, така че да бъдат изпълнени равенствата (1). Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k, A_l и P_j от една права се изразява с равенството $\frac{\overline{A_kP_j}}{\overline{A_lP_j}} = \frac{a_k - p_j}{a_l - p_j}$, от (2) и (3) след не сложни пресмятания се получават равенствата

$$(4) \qquad \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_2P_1}} = \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1}.\frac{a_1}{a_2}, \ \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{A_3P_2}} = \frac{t_1 - t_2}{t_3 - t_2}.\frac{a_2}{a_3}, \ \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{A_4P_3}} = \frac{t_2 - t_3}{t_4 - t_3}.\frac{a_3}{a_4}, \ \frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{A_1P_4}} = \frac{t_3 - t_4}{t_1 - t_4}.\frac{a_4}{a_1}.$$

От равенствата (4) получаваме

$$(5) \qquad a_2 = -\frac{k_2}{k_1}.\frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_1}.a_1, \ a_3 = -\frac{k_3}{k_1}.\frac{t_4 - t_1}{t_3 - t_2}.a_1, \ a_4 = -\frac{k_4}{k_1}.\frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_3}.a_1.$$

От равенствата (5) следва

$$(6) \qquad k_1a_2a_3a_4 + k_2a_3a_4a_1 + k_3a_4a_1a_2 + k_4a_1a_2a_3 = 0.$$

Сега да разгледаме нормирания полином $P_0(z)$ от степен $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ на комплексна променлива с комплексни коефициенти, който има k_j кратен корен във върха A_j $(j = 1,2,3,4)$ на $A_1A_2A_3A_4$. От лема 2 и равенството (6) следва, че коефициентът пред z има стойност, равна на 0. Затова производната $P_0'(z)$ има корен $z = 0$. Това всъщност на геометричен език означава, че $P_0'(z)$ има корен във фокуса O на елипсата k. Следователно според лема 1 и бележката към нея се получава, че производната $P'(z)$ на произволен полином $P(z)$ със свойствата на $P_0(z)$ има корен в точката O.

Аналогично, ако разгледаме координатна система с център в другия фокус F на k, получаваме, че $P'(z)$ има корен и в точката F. По този начин доказахме частта от теоремата, отнасяща се до елипсата k.

Остава да докажем теоремата за точката P_0. Нека нормираният полином $P_0(z)$ се представя във вида:

$$P(z) = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2}(z - a_3)^{k_3}(z - a_4)^{k_4}.$$

Тогава за неговата производна имаме

$$P'(z) = (z - a_1)^{k_1 - 1}(z - a_2)^{k_2 - 1}(z - a_3)^{k_3 - 1}(z - a_4)^{k_4 - 1}.U(z),$$

където

$$(7) \qquad \begin{aligned} U(z) &= k_1(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4) + k_2(z - a_3)(z - a_4)(z - a_1) + \\ &+ k_3(z - a_4)(z - a_1)(z - a_2) + k_4(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3). \end{aligned}$$

Тъй като $\overline{A_3P_0} : \overline{A_1P_0} = -k_3 : k_1$ и $\overline{A_4P_0} : \overline{A_2P_0} = -k_4 : k_2$, то $\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{k_3\overrightarrow{OA_1} + k_1\overrightarrow{OA_3}}{k_3 + k_1}$ и $\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{k_4\overrightarrow{OA_2} + k_2\overrightarrow{OA_4}}{k_4 + k_2}$. Като използваме (5) за афикса на p_0 получаваме следващите две равенства:

$$(8) \qquad p_0 = \frac{k_3\left(t_1 - t_2 + t_3 - t_4\right)}{\left(t_3 - t_2\right)\left(k_3 + k_1\right)}a_1,\ p_0 = \frac{k_2k_4\left(t_4 - t_1\right)\left(t_1 - t_2 + t_3 - t_4\right)}{k_1\left(t_1 - t_2\right)\left(t_3 - t_4\right)\left(k_2 + k_4\right)}a_1.$$

Като приравним стойностите на p_0 от (8), получаваме зависимостта

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\left(k_1k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1 + k_4k_1k_2\right)\left(t_3t_1 + t_4t_2\right) = \\ &= k_3k_1\left(k_4 + k_2\right)\left(t_2t_3 + t_4t_1\right) + k_4k_2\left(k_3 + k_1\right)\left(t_1t_2 + t_3t_4\right). \end{aligned}$$

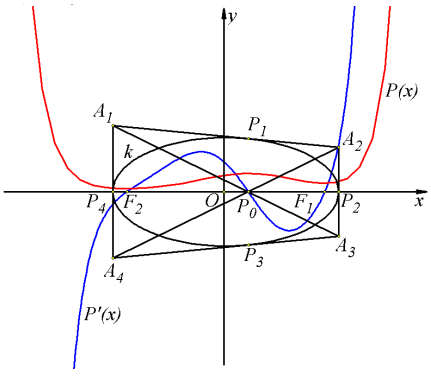
От (7) и (8) имаме

$$\begin{aligned} U\left(p_0\right) = &\frac{k_3\left[k_1\left(t_2 - t_3\right) - k_3\left(t_4 - t_1\right)\right]^2\left(t_1 - t_2 + t_3 - t_4\right)a_1^3}{k_1^2\left(k_3 + k_1\right)^3\left(t_1 - t_2\right)\left(t_2 - t_3\right)^3\left(t_3 - t_4\right)} \times \\ &\times\Big[\left(k_1k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1 + k_4k_1k_2\right)\left(t_3t_1 + t_4t_2\right) - \\ &- k_3k_1\left(k_4 + k_2\right)\left(t_2t_3 + t_4t_1\right) + k_4k_2\left(k_3 + k_1\right)\left(t_1t_2 + t_3t_4\right)\Big]. \end{aligned}$$

Оттук и равенството (9) следва, че $U\left(p_0\right) = 0$, което означава, че p_0 е корен на $P_0'(z)$. С това е доказано твърдението на теоремата и за пресечната точка на диагоналите на $A_1A_2A_3A_4$.

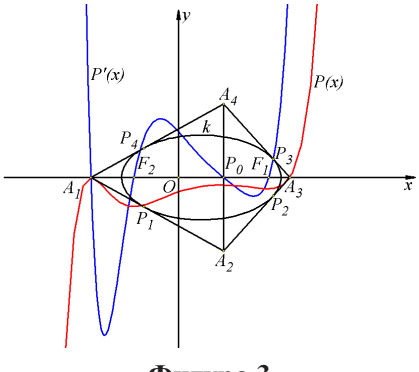
Полиномът $P'(z)$ има $k_j - 1$ кратен корен във върха A_j $(j = 1,2,3,4)$ (Genov, Mihovski & Mollov, 1991), а останалите три корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

Доказаната теорема е обобщение на съответния резултат за успоредници, описан в (Grozdev & Nenkov, 2019).



Фигура 2

Ако $P(z)=P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема. На фиг. 2 е представен полином $P(x)$ с корени във върховете на трапец, симетричен относно абсцисната ос. Той има трикратни комплексно спрегнати корени в точките A_1 и A_4 и двукратни комплексно спрегнати корени в точките A_2 и A_3. На фиг. 3 е представен полином $P(x)$ с корени във върховете на делтоид, симетричен относно абсцисната ос. Той има двукратен реален корен в точката A_1, прост реален корен в точката A_3 и трикратни комплексно спрегнати корени в точките A_2 и A_4.



Фигура 3

ЛИТЕРАТУРА

Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник, *Математика и информатика, 5*, 54 – 59

Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 а). Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник, *Математика и информатика, 3*, 283 – 293.

Гроздев, С. & В. Ненков. (2018 b). Полиноми с кратни корени във върховете на триъгълник, *Математика и информатика, 4*, 352 – 359.
Гроздев, С. & В. Ненков. (2019). Полиноми с кратни корени във върховете на правоъгълник, *Математика и информатика, 4*, 2019, 435 – 443.

REFERENCES

Nenkov, V. (1998). Conic sections, inscribed in a triangle, *Mathematics and informatics, 5* , 54 – 59.
Grozdev, S. & V. Nenkov. (2018 a). Polynomials of fourth degree with roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics, 3*, 283 – 293.
Grozdev, S. & V. Nenkov. (2018 b). Polynomials with multiple roots in the vertices of a triangle, *Mathematics and informatics, 4*, 352 – 359.
Grozdev, S. & V. Nenkov. (2019). Polynomials with multiple roots in the vertices of a parallelogram, *Mathematics and informatics, 4*, 435 – 443.

ON THE POLYNOMIALS WITH ROOTS IN THE VERTICES OF A CLASS OF CONVEX QUADRILATERALS

Abstract. A geometrical relation is derived for the roots of polynomials of complex variable with multiple roots in the vertices of a convex quadrilateral and the roots of the corresponding derivatives. As an application some polynomials of real variable and with real coefficients are considered.

Keywords: polynomial; derivative a polynomial; polynomial roots; convex quadrilateral; ellipse; focus

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
Researcher ID: AAG-4146-2020
ORCID 0000-0002-1748-7324
University of Finance, Business Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Prof. Dr. Veselin Nenkov**
Researcher ID: AAB-5776-2019
Department of Mathematics and Physics
Faculty of Engineering
Nikola Vaptsarov Naval Academy
73, Vasil Drumev St.
Varna, Bulgaria
E-mail: v.nenkov@nvna.eu
E-mail: vnenkov@mail.bg