ОТНОСНО ПОЛИНОМИТЕ С КОРЕНИ ВЪВ ВЪРХОВЕТЕ НА ЕДИН КЛАС ПЕТОЪГЪЛНИЦИ

проф. дн Сава Гроздев, проф. д-р Веселин Ненков

Резюме. Изведена е геометрична връзка между корените на полиноми на комплексна променлива с кратни корени във върховете на изпъкнал петоъгълник и корените на съответните им производни. Като приложение са разгледани някои полиноми на реална променлива с реални коефициенти.

Ключови думи: полином, производна на полином, корени на полином, изпъкнал петоъгълник, елипса, фокус.

В (Гроздев & Ненков, 2020) е описана една геометрична връзка между полиномите, корените на които се намират във върховете на изпъкнал четириъгълник, и корените на съответните им производни. Тази геометрична връзка съдържа фокусите на подходяща елипса, вписана в разглеждания четириъгълник (ако такава елипса съществува). От друга страна всеки изпъкнал петоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$ съдържа точно две елипси – едната е вписана в $A_1A_2A_3A_4A_5$, а другата е вписана в звездовидния петоъгълник $A_1A_3A_5A_2A_4$. Така възниква въпросът за съществуване на връзка между някои видове изпъкнали петоъгълници и съдържащите се в тях елипси и производните на полиномите, които имат корени само във върховете на разглежданите петоъгълници. Оказва се, че съществува такава връзка, която е подобна на тази при четириъгълниците. Тя се изразява със следното твърдение:

Теорема. *Нека* k_j $\left(j=1,2,3,4,5\right)$ *са естествени числа и* k' *е елипса, вписана в изпъкналия петоъгълник* $A_1A_2A_3A_4A_5$ *така, че за допирните точки* P_1, P_2, P_3, P_4 *и* P_5 *на* k' *съответно с отсечките* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 *и* A_5A_1 *са изпълнени равенствата:* $\overline{A_1P_1}:\overline{A_2P_1}=-k_1:k_2$, $\overline{A_2P_2}:\overline{A_3P_2}=-k_2:k_3$, $\overline{A_3P_3}:\overline{A_4P_3}=-k_3:k_4$, $\overline{A_4P_4}:\overline{A_5P_4}=-k_4:k_5$ $\overline{A_5P_5}:\overline{A_1P_5}=-k_5:k_1$. *Ако полиномът* $P\left(z\right)$ *от степен* $n=k_1+k_2+k_3+k_4+k_5$ *има* k_j *кратен корен във върха* A_j $\left(j=1,2,3,4,5\right)$ *на* $A_1A_2A_3A_4A_5$, *то производната на* $P\left(z\right)$ *има корени във фокусите на елипсата* k' *и фокусите на елипсата* k'', *вписана в звездовидния петоъгълник* $A_1A_3A_5A_2A_4$.

В доказателството на теоремата ще използваме следващите две помощни твърдения.

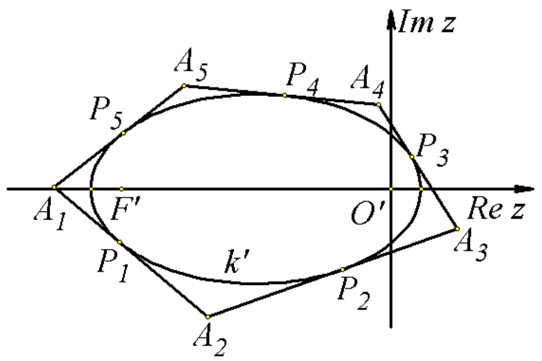
Лема 1. *Коничните сечения* k' *и* k'' *са вписани съответно в петоъгълниците* $A_1A_2A_3A_4A_5$ *и* $A_1A_3A_5A_2A_4$. *Ако* Δ *е триъгълник, определен от две страни на единия* *петоъгълник и една страна на другия, то в Δ може да се впише конично сечение, което съдържа допирните точки на k' и k'' с правите, заграждащи Δ.*

Доказателството на тази лема се съдържа в (Ненков, 2009).

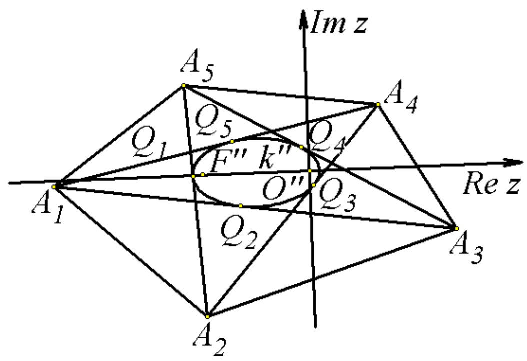
Лема 2. *Ако a_1, a_2, …, a_s са корени на полином $P(z)$ от n-та степен така, че a_j е k_j $(j=1,2,\dots,s)$ кратен корен на $P(z)$ и $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$, то коефициентът пред първата степен на променливата z е равен на*

$$a_1^{k_1-1}a_2^{k_2-1}\dots a_s^{k_s-1}\left(k_1a_2a_3\dots a_s+k_2a_3\dots a_sa_1+\cdots+k_sa_1a_2\dots a_{s-1}\right).$$

Доказателството на тази лема се съдържа в (Гроздев & Ненков, 2018).



Фиг. 1



Фиг. 2

Нека елипсата k' има за фокус точката O', фокален параметър p' и числен ексцентрицитет e'. Спрямо Гаусовата координатна система K' от фиг. 1, както е показано в (Ненков, 1998), афиксите p_j и a_j на допирните точки P_j (Фиг. 1) и върховете A_j $(j=1,2,3,4,5)$ се изразяват съответно с формулите

$$(1)\quad p_1=\frac{2p'}{e'.t_1^2+2t_1+e'},\quad p_2=\frac{2p'}{e'.t_2^2+2t_2+e'},\quad p_3=\frac{2p'}{e'.t_3^2+2t_3+e'},$$
$$p_4=\frac{2p'}{e'.t_4^2+2t_4+e'},\quad p_5=\frac{2p'}{e'.t_5^2+2t_5+e'},$$

$$(2)\quad a_1=\frac{2p'}{e't_5t_1+t_5+t_1+e'},\quad a_2=\frac{2p'}{e't_1t_2+t_1+t_2+e'},\quad a_3=\frac{2p'}{e't_2t_3+t_2+t_3+e'},$$
$$a_4=\frac{2p'}{e't_3t_4+t_3+t_4+e'},\quad a_5=\frac{2p'}{e't_4t_5+t_4+t_5+e'}.$$

Сега ще намерим зависимости между разглежданите величини така, че да бъдат изпълнени равенствата, дефинирани в теоремата. Тъй като простото отношение на произволни три точки A_k, A_l и P_j от една права се изразява с равенството $\dfrac{\overline{A_kP_j}}{\overline{A_lP_j}}=\dfrac{a_k-p_j}{a_l-p_j}$, от (1) и (2), след не сложни пресмятания, се получават равенствата

$$(3)\qquad \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_2P_1}}=\frac{t_5-t_1}{t_2-t_1}\cdot\frac{a_1}{a_2},\quad \frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{A_3P_2}}=\frac{t_1-t_2}{t_3-t_2}\cdot\frac{a_2}{a_3},\quad \frac{\overline{A_3P_3}}{\overline{A_4P_3}}=\frac{t_2-t_3}{t_4-t_3}\cdot\frac{a_3}{a_4},$$
$$\frac{\overline{A_4P_4}}{\overline{A_5P_4}}=\frac{t_3-t_4}{t_5-t_4}\cdot\frac{a_4}{a_1},\quad \frac{\overline{A_5P_5}}{\overline{A_1P_5}}=\frac{t_4-t_5}{t_1-t_5}\cdot\frac{a_5}{a_1}.$$

От равенствата (3) получаваме

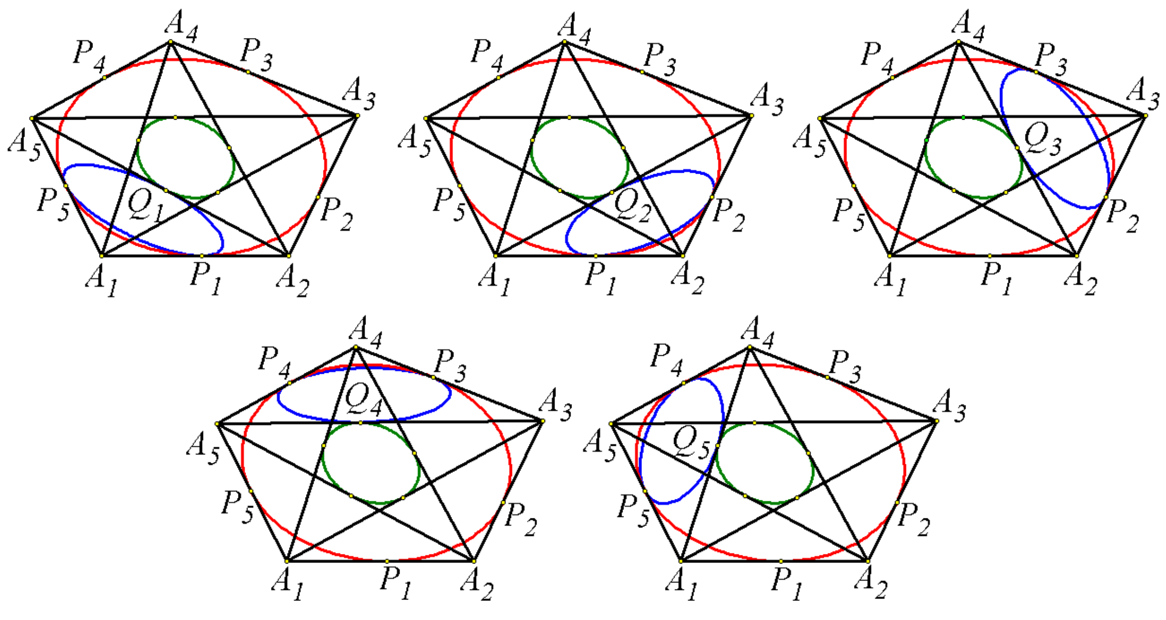
$$(4)\qquad a_2=-\frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{t_5-t_1}{t_2-t_1}.a_1,\ a_3=-\frac{k_3}{k_1}\cdot\frac{t_5-t_1}{t_3-t_2}.a_1,\ a_4=-\frac{k_4}{k_1}\cdot\frac{t_5-t_1}{t_4-t_3}.a_1,\ a_5=-\frac{k_5}{k_1}\cdot\frac{t_5-t_1}{t_5-t_4}.a_1.$$

С помощта на равенствата (4) стигаме до равенството

$$(5)\qquad k_1a_2a_3a_4a_5+k_2a_3a_4a_5a_1+k_3a_4a_5a_1a_2+k_4a_5a_1a_2a_3+k_5a_1a_2a_3a_4=0.$$

Нека сега допирните точки на k'' с A_5A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5 и A_4A_1 са съответно Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 и Q_5 (Фиг. 2, 3). От лема 1 следва, че тройките точки (Q_1,P_5,P_1), (Q_2,P_1,P_2), (Q_3,P_2,P_3), (Q_4,P_3,P_4) и (Q_5,P_4,P_5) са допирни точки на елипси, вписани съответно в триъгълниците $A_5A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$ и $A_4A_5A_1$ (Фиг. 3). Да разгледаме $\Delta A_5A_1A_2$ и елипсата, допиращата се до страните му A_2A_5, A_5A_1 и A_1A_2 съответно в точките Q_1, P_5 и P_1. С помощта на теоремата на Брианшон се вижда, че правите A_1Q_1, A_2P_5 и A_5P_1 минават през една точка. Затова, според теоремата на Чева, е изпълнено равенството $\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{A_5Q_1}}.\frac{\overline{A_5P_5}}{\overline{A_1P_5}}.\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_2P_1}}=-1$. Оттук получаваме $\frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{A_5Q_1}}=-\frac{k_2}{k_5}$. По аналогичен начин от другите четири триъгълника намираме подобни равенства. По този начин забелязваме, че са изпълнени равенствата

$$(6)\qquad \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{A_5Q_1}}=-\frac{k_2}{k_5},\ \frac{\overline{A_3Q_2}}{\overline{A_1Q_2}}=-\frac{k_3}{k_3},\ \frac{\overline{A_4Q_3}}{\overline{A_2Q_3}}=-\frac{k_4}{k_2},\ \frac{\overline{A_5Q_4}}{\overline{A_3Q_4}}=-\frac{k_5}{k_3},\ \frac{\overline{A_1Q_5}}{\overline{A_4Q_5}}=-\frac{k_1}{k_4}.$$



Фиг. 3

Нека елипсата k'' има за фокус точката O'', фокален параметър p'' и числен ексцентрицитет e''. Спрямо Гаусовата координатна система K'' от фиг. 2 афиксите q_j и a_j на точките Q_j и A_j $\left(j=1,2,3,4,5\right)$ се изразяват съответно с формулите

$$(7)\qquad \begin{gathered} q_1=\frac{2p''}{e''.\tau_1^2+2\tau_1+e''},\quad q_2=\frac{2p''}{e''.\tau_2^2+2\tau_2+e''},\quad q_3=\frac{2p''}{e''.\tau_3^2+2\tau_3+e''},\\ q_4=\frac{2p''}{e''.\tau_4^2+2\tau_4+e''},\quad q_5=\frac{2p''}{e''.\tau_5^2+2\tau_5+e''},\end{gathered}$$

$$(8)\qquad \begin{gathered} a_1=\frac{2p''}{e''\tau_5\tau_1+\tau_5+\tau_1+e''},\quad a_2=\frac{2p''}{e''\tau_1\tau_2+\tau_1+\tau_2+e''},\quad a_3=\frac{2p''}{e''\tau_2\tau_3+\tau_2+\tau_3+e''},\\ a_4=\frac{2p''}{e''\tau_3\tau_4+\tau_3+\tau_4+e''},\quad a_5=\frac{2p''}{e''\tau_4\tau_5+\tau_4+\tau_5+e''}.\end{gathered}$$

Сега аналогично на $\left(4\right)$ от равенствата $\dfrac{\overline{A_kQ_j}}{\overline{A_lQ_j}}=\dfrac{a_k-q_j}{a_l-q_j}$, $\left(7\right)$ и $\left(8\right)$ след не сложни пресмятания получаваме равенствата

$$(9)\qquad \begin{gathered} \frac{\overline{A_2Q_1}}{\overline{A_5Q_1}}=\frac{\tau_3-\tau_1}{\tau_4-\tau_1}.\frac{a_2}{a_5},\quad \frac{\overline{A_1Q_2}}{\overline{A_3Q_2}}=\frac{\tau_5-\tau_2}{\tau_4-\tau_2}.\frac{a_1}{a_3},\quad \frac{\overline{A_2Q_3}}{\overline{A_4Q_3}}=\frac{\tau_1-\tau_3}{\tau_5-\tau_3}.\frac{a_2}{a_4},\\ \frac{\overline{A_3Q_4}}{\overline{A_5Q_4}}=\frac{\tau_2-\tau_4}{\tau_1-\tau_4}.\frac{a_3}{a_5},\quad \frac{\overline{A_4Q_5}}{\overline{A_1Q_5}}=\frac{\tau_2-\tau_4}{\tau_1-\tau_4}.\frac{a_4}{a_1}.\end{gathered}$$

Накрая от $\left(6\right)$ и $\left(9\right)$ следват равенствата

$$(10)\qquad a_2=-\frac{k_2}{k_1}.\frac{\tau_5-\tau_2}{\tau_3-\tau_1}.a_1,\ a_3=-\frac{k_3}{k_1}.\frac{\tau_5-\tau_2}{\tau_4-\tau_2}.a_1,\ a_4=-\frac{k_4}{k_1}.\frac{\tau_5-\tau_2}{\tau_5-\tau_3}.a_1,\ a_5=-\frac{k_5}{k_1}.\frac{\tau_5-\tau_2}{\tau_4-\tau_1}.a_1.$$

С помощта на равенствата $\left(10\right)$ отново стигаме до равенството $\left(5\right)$.

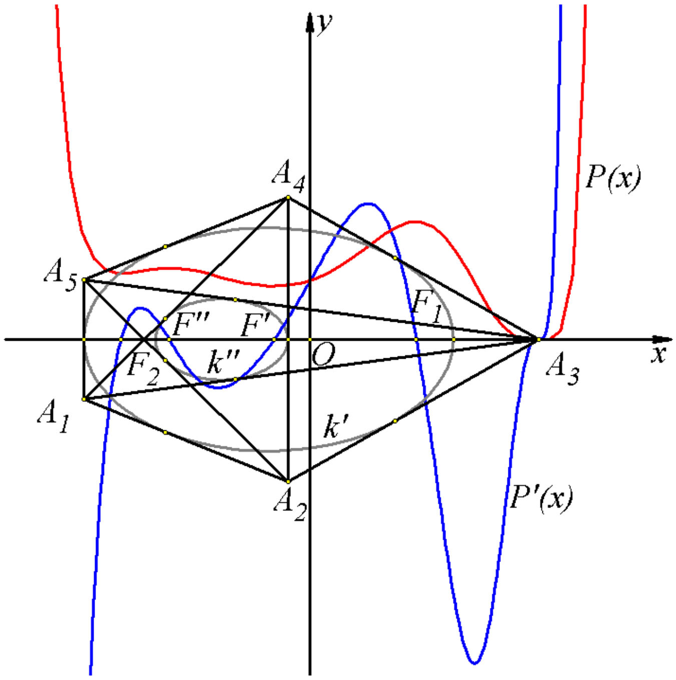
Сега да разгледаме полином $P(z)$ от степен $n=k_1+k_2+k_3+k_4$, който има k_j кратен корен във върха A_j $\left(j=1,2,3,4,5\right)$ на $A_1A_2A_3A_4A_5$ и е зададен спрямо K' или K''. Спрямо която и да е от двете координатни системи, според лема 2 и равенството (5), коефициентът пред z има стойност, равна на 0. Затова производната $P'(z)$ има корен $z=0$. Това всъщност на геометричен език означава, че $P'(z)$ има корени във фокусите O' и O'' съответно на елипсите k' и k''.

Аналогично, ако разгледаме координатни системи с центрове в другите фокуси F' и F'' на k' и k'', получаваме, че $P'(z)$ има корени и в точките F' и F''. С това, формулираната в началото теорема е доказана.

Полиномът $P'(z)$ има k_j-1 кратен корен във върха A_j $\left(j=1,2,3,4,5\right)$ (Генов, Миховски & Моллов, 1991), а останалите четири корена се описват от току-що доказаната теорема. По този начин получаваме пълна геометрична картина на корените на $P'(z)$.

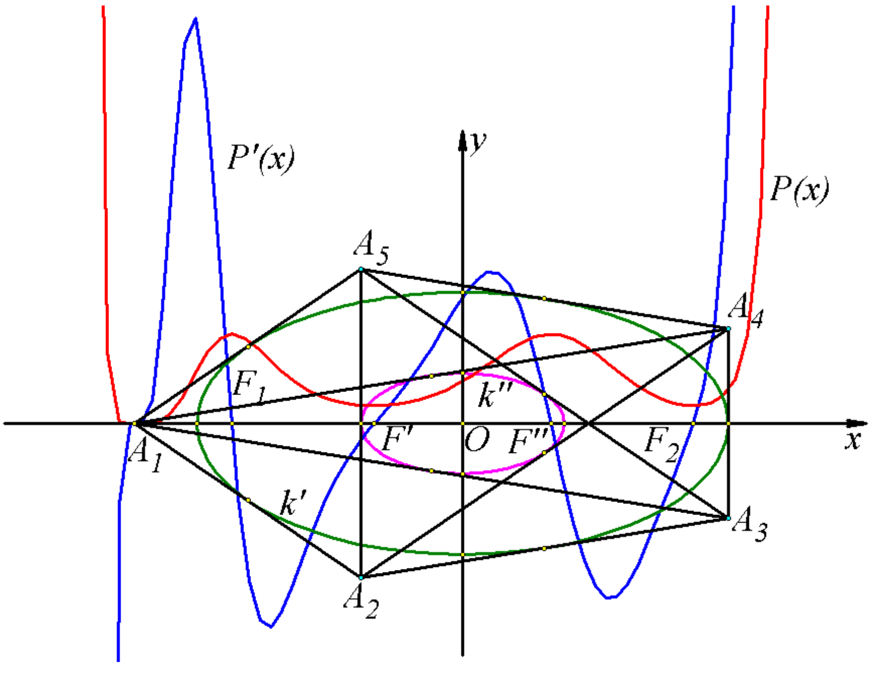
Ако $P(z)=P(x)$ е полином с реални коефициенти на реална променлива, можем да представим някои геометрични интерпретации на доказаната теорема. На фиг. 4 е представен полином $P(x)$ с корени във върховете на петоъгълник, симетричен относно абсцисната ос. Той има двукратни комплексно спрегнати корени в точките A_1

и A_5, трикратни комплексно спрегнати корени в точките A_2 и A_4 и един реален корен в точката A_3.



Фиг. 4

На фиг. 5 е представен полином $P(x)$ с корени във върховете на медитангенциален петоъгълник, симетричен относно абсцисната ос (Ненков, 2009), (Гроздев & Ненков, 2019). Той има шесткратен реален корен в точката A_1, шесткратни комплексно спрегнати корени в двойките точки (A_2, A_5) и (A_3, A_4).



Фиг. 5

ЛИТЕРАТУРА/LITERATURE

1. Гроздев, С. & В. Ненков (2020). Относно полиномите с корени във върховете на един клас изпъкнали четириъгълници, *Математика и информатика,* 3, 324-329. (ISSN 1310-2230)

[Grozdev, S. & V. Nenkov (2020). About the polynomials with roots in the vertices of a class of convex quadrilaterals, *Mathematics and Informatics,* 3, 324-329. (ISSN 1310-2230)]

2. Ненков, В. (2009). Няколко етюда за вписани конични сечения, *Математика и информатика*, 5, 17-27. (ISSN 1310-2230)

[Nenkov, V. (2009). Some studies on inscribed conics, *Mathematics and Informatics*, 5, 17-27. (ISSN 1310-2230)]

3. Гроздев, С. & В. Ненков (2018). Полиноми с кратни корени във върховете на триъгълник, *Математика и информатика*, 4, 352-359. (ISSN 1310-2230)

[Grozdev, S. & V. Nenkov (2018). Polynomials with multiple roots in the vertices of a triangle, *Mathematics and Informatics,* 4, 352-359. (ISSN 1310-2230)]

4. Ненков, В. (1998). Конични сечения, вписани в триъгълник, *Математика и информатика*, 5, 54-59. (ISSN 1310-2230)

[Nenkov, V. (1998). Inscribed conics in a triangle, *Mathematics and Informatics*, 5, 54-59. (ISSN 1310-2230)]

5. Генов, Г., С. Миховски & Т. Моллов (1991). *Алгебра с теория на числата*. София: Наука и изкуство.

[Genov, G., S. Mihovski & T. Molov (1991). *Algebra with Number theory*. Sofia: Nauka I izkustvo.]

6. Ненков, В. (2009). Няколко афинно породени свойства на елипсата, *Математика плюс*, 2, 54-59. (ISSN 0861-8321)

[Nenkov, V. (2009). Some afinely derived properties of the ellipse, *Mathematics Plus*, 2, 54-59. (ISSN 0861-8321)]

7. Гроздев, С. & В. Ненков (2019). Полиноми с корени във върховете на медитангенциални многоъгълници, *Математика и информатика*, 5, 544-549. (ISSN 1310-2230)

[Grozdev, S. & V. Nenkov (2019). Polynomials with roots in the vertices of medi-tangental polygons, *Mathematics and Informatics*, 5, 544-549. (ISSN 1310-2230)]

ABOUT THE POLYNOMIALS WITH ROOTS IN THE VERTICES OF A CLASS OF PENTAGONS

Prof. DSc Sava Grozdev, Prof. PhD Veselin Nenkov

Abstract. It is derived a geometric relation between the roots of polynomials of a complex variable with multiple zeroes in the vertices of a convex pentagon and the zeroes of the corresponding derivatives. Some polynomials of a real variable with real coefficients are considered as application.